

KAV

Guerill

BIBLIOTHEK

GEOGRAPHISCHER HANDBÜCHER

HERAUSGEGEBEN VON

PROF. DR. FRIEDRICH RATZEL.

Unter Mitwirkung von

Professor Dr. **Georg v. Boguslawski**, ehem. Sektionsvorstand im Hydrographischen Amt der Kaiserl. Admiralität in Berlin; Professor Dr. **Carl Börgen**, Vorstand des Kaiserlichen Observatoriums in Wilhelmshaven; Professor Dr. **Ed. Brückner** in Bern; Professor Dr. **Oskar Drude**, Direktor des Botanischen Gartens in Dresden; Dr. **F. A. Forel**, Professeur à l'Académie de Lausanne in Morges; Dr. **Karl v. Fritsch**, Professor an der Universität in Halle; Dr. **Siegmund Günther**, Professor an der technischen Hochschule in München: Dr. **Julius Hann**, Professor an der Wiener Universität und Redakteur der Zeitschrift für Meteorologie; Dr. **Albert Heim**, Professor am Schweizerischen Polytechnikum und der Universität in Zürich; Dr. **Otto Krümmel**, Professor an der Universität und Lehrer an der Marine-Akademie in Kiel; Dr. **Albrecht Penck**, Professor an der Universität Wien; Dr. **Benjamin Vetter**, Professor an der technischen Hochschule in Dresden.

STUTTGART.
VERLAG VON J. ENGELHORN.
1890.

HANDBUCH

DER

MATHEMATISCHEN GEOGRAPHIE

VON

PROFESSOR DR. SIEGMUND GÜNTHER
IN MÜNCHEN.

MIT 155 ABBILDUNGEN.

STUTTGART.
VERLAG VON J. ENGELHORN.
1890.



Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

Vorwort.

Der Absicht des Herrn Herausgebers gemäß soll die „Bibliothek geographischer Handbücher“ auch ein Handbuch der mathematischen Geographie umfassen, und der Unterzeichnete wurde mit der Herstellung desselben betraut. Von den Grundsätzen, nach welchen bei der Lösung dieser Aufgabe verfahren wurde, ist hier kurz Bericht zu erstatten, denn obwohl das von Herrn Prof. Dr. Ratzel aufgestellte allgemeine Programm selbstredend auch in dem vorliegenden Falle als Richtschnur zu gelten hatte, brachte doch andererseits der Gegenstand es mit sich, daß man über das Wesen der hier zu behandelnden Disziplin ebenso wie über die formale Seite der Behandlung leichter auseinander gehen kann, als es bei einem anderen der in das Programm aufgenommenen geographischen Spezialfächer der Fall ist. Eine Verständigung über den Inhalt der „mathematischen Geographie“ wie nicht minder über die Art der Darstellung ist von vornherein dringend geboten; der Leser muß durch die Vorrede bereits in den Stand gesetzt werden, sich ein Bild von dem zu machen, was das Buch ihm bieten werde, damit er auf der einen Seite nicht zu viel erwarte, aber auf der anderen auch nicht durch die eingehendere Erörterung solcher Fragen, welche man bisher nicht als im Vordergrunde stehend zu betrachten gewohnt war, sich enttäuscht fühle. Aus diesen Gründen wird man es billigen, wenn dieser Vorbericht

einen größeren Raum beansprucht, als man vielleicht vermuten möchte.

Als der Herr Herausgeber diese Sammlung mit seiner „Anthropogeographie“ eröffnete, erwuchs ihm die Pflicht, den neuen Wissenszweig erst zu kennzeichnen und ihm die richtige Stelle in der Gesamtwissenschaft anzuweisen, und in einer ähnlichen Lage befand sich der Verfasser der „Allgemeinen Geologie“, deren Grenzlinien ebenfalls der scharfen Festlegung bedurften, wogegen für Klimatologie, Ozeanographie und Gletscherkunde Umfang und Inhalt als allseitig anerkannt gelten konnten. Diesmal hingegen tritt wieder die Notwendigkeit einer vorgängigen Begriffsbestimmung an uns heran, denn wenn man die zahllosen Lehrbücher der „mathematischen“ oder „astronomischen“ Erdkunde durchblättert, so wird man allem anderen eher als der so wünschenswerten Uebereinstimmung der Autoren bezüglich der Hauptfrage begegnen. Es lag uns deshalb in erster Linie ob, auf dem Wege geschichtlich-methodologischer Untersuchung zu einer Fixierung des Begriffes des von uns darzustellenden Grenzgebietes zwischen Mathematik und Geographie zu gelangen, und es geschah dies, wie der Text der Einleitung ersehen lässt, in der Weise, dass der mathematischen Geographie, wie wir sie auffassen, *das allgemeinste Ortsbestimmungs- oder Orientierungsproblem* zur vollständigen Auflösung zugewiesen ward.

Dieses selbst zerfällt wiederum in verschiedene, unter sich koordinierte Einzelprobleme. Wir haben zunächst die Gestalt und Größe des Erdkörpers zu ermitteln, wir haben sodann einen auf oder an (d. h. über oder unter) der als *Erdoberfläche* zu definierenden geometrischen Fläche gelegenen Ort so zu fixieren, dass er auf dieser und in seiner Beziehung zu ihr eindeutig bestimmt erscheint und durch Registrierung der Bestimmungsstücke jederzeit wieder aufgefunden werden kann, und wir haben endlich ebenso den momentanen Ort der Erde im Weltraume einem als stabil bekannten Gebilde, falls ein solches existiert, gegenüber anzugeben. Alles, was der Erledigung einer dieser drei Teilaufgaben dient, gehört unserer Auffassung zufolge in das

Gebiet der *mathematischen Geographie,* und es scheint uns insbesondere dadurch auch dieses Gebiet gegen das so nahe benachbarte der *physikalischen Geographie* so gut abgegrenzt, als es bei den durch die Natur der Sache gegebenen Grenzverschlingungen thunlich ist. Um nur ein Beispiel für die Unmöglichkeit einer gänzlichen, einer radikalen Auseinanderhaltung beider Disziplinen anzuführen, sei an die in neuerer Zeit als überaus wichtig erkannte Lokalattraktion der über die Erdoberfläche hervorragenden Massen erinnert. Es ist eine recht eigentlich im Wesen der physikalischen Geographie begründete Aufgabe, die von solchen Massen im Auftreten der Erdschwere bewirkten Unregelmässigkeiten kennen zu lernen, und für die mathematische Geographie ihrerseits sind solche Lotstörungen bedeutsam, weil sie wesentlich die Mittel zur Beurteilung des wahren Charakters dessen gewähren, was wir *Erdgestalt* nennen, und was vor allem bekannt sein muß, ehe weitere Versuche, einen Ort geometrisch zu bestimmen, gemacht werden können. Angesichts der unleugbaren und durch keine künstliche Systematik zu beseitigenden Thatsache, daß solche Grenzbezirke vorhanden sind, muß es dem Takte des Bearbeiters überlassen bleiben, die Abmarkung in jedem Einzelfalle für sich vorzunehmen und sich auf das mitten inne liegende Territorium nur so weit zu begeben, als es in Verfolgung des gerade vorschwebenden Zieles unerlässlich erscheint. Inwieweit wir selbst dieser Grundregel nachgelebt haben, möge der Leser entscheiden.

Im übrigen wird unsere Definition des Begriffes der mathematischen Geographie gewiß auf manchen Widerspruch stoßen; dem einen wird der Begriff als ein zu enger, dem anderen als ein zu weiter erscheinen. Da aber eben irgend welche Einigkeit in der Litteratur doch nicht besteht, so müssen wir uns daran genügen lassen, daß unsere Festsetzung wenigstens etwas Greifbares liefert und ungezwungen die Gegenstände und Untersuchungsobjekte in sich aufnimmt, welche vom *„common sense“* als dahin gehörig angesehen werden. Den Vorwurf freilich können und wollen wir nicht abwälzen, daß Uebergriffe in andere,

nicht eigentlich geographische Gebiete mit unserer Anschauung unlöslich verbunden sind. Es bedünkt uns, als seien alle die teilweise mit so großer Mühe angestellten Versuche, *der Erdkunde einen strenge einheitlichen Charakter zu verleihen*, nicht von Erfolg gekrönt gewesen, als spreche schon die Unmöglichkeit, zwischen *Geographie* und *Geologie* eine nur halbwegs erkennbare Scheidelinie zu ziehen, für die wohl unlieb empfundene aber nicht aus der Welt zu schaffende Eigenart der erstgenannten Wissenschaft, keine wie immer beschaffene Umzäunung ertragen zu können. Was die zweite Unterabteilung unseres Fundamentalproblemes anlangt, so ist dieselbe zweifellos einwurfsfrei, das rein geographische Gepräge derselben tritt unverkennbar zu Tage, dagegen wird man teilweise finden, daß für die erste Unterabteilung Gefahr bestehe, mit der *Geodäsie*, für die dritte, mit der *Astronomie* in einen „Kompetenzkonflikt“ zu geraten.

Schreiber dieses hat sich schon an anderer Stelle [1]) dahin ausgesprochen, daß es für einen jungen Mann, der sein Leben in den Dienst der wissenschaftlichen Erdkunde zu stellen beabsichtigt, von höchstem Werte wäre. einen Kurs der praktischen Geometrie durchzumachen, einen Kurs, der von den elementaren Verrichtungen der Feldmeßkunst bis zur „höheren Geodäsie“ emporführt und den Lernenden mit der Handhabung der verschiedenen Instrumente bekannt macht, mit denen der junge Geograph vertraut sein muß, wenn er durch Reisen in fremden und teilweise sogar schon in bekannten Ländern unser thatsächliches Wissen zu fördern beabsichtigt. Auch der unvergeßliche Zöppritz wußte sehr wohl, weshalb er auf die von ihm mit großer Regelmäßigkeit in Gießen — möglicherweise der einzigen Universität, die auch in dieser Hinsicht für die Ausbildung ihrer Studierenden Sorge trug — abgehaltenen geodätischen Uebungen Gewicht legte. Wie aber die Dinge in Wirklichkeit liegen, wird ein Studierender der Erdkunde nur ganz ausnahmsweise

---

[1]) Günther, Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen, München 1886. S. 30.

einer solchen Vorbildung teilhaftig werden, und da muß denn eben der Unterricht in der mathematischen Geographie aushelfen. Von der Tendenz der großen Gradmessungsarbeiten unserer Zeit und von den Hilfsmitteln, welche bei der Verwirklichung dieser Tendenz zur Verwendung kommen, eine klare Vorstellung zu besitzen, ist eine unbedingte Notwendigkeit für den Geographen; derselbe braucht nicht selbst Geodät zu sein, aber er muß es verstehen, dereinst als Lehrer nicht bloß historisch zu schildern, wie man zu den genauesten Maßen für die Dimensionen der Erde gelangte, sondern die Messungsmethoden selbst in einer für den Standpunkt seiner Schüler geeigneten Weise zu erläutern. Und wenn diese Schüler Hörer einer Hochschule sind, dann muß die Erläuterung eine mathematische sein, ähnlich, wie sie in diesem Buche gefunden wird.

Nicht viel anders ist auch des Verfassers Stellung gegenüber der Astronomie geartet. Im großen und ganzen teilt er die Auffassung eines bekannten und verdienten Fachgenossen, dessen bezügliche Aussprüche [1]) er deshalb wörtlich wiederzugeben sich erlaubt. „Daß auch die Bewegungen des Erdkörpers ein unerläßlicher Gegenstand für den Geographen sind, sahen wir schon. Nur kann er hier der Hilfe der Astronomie noch viel weniger entbehren; die Lehre von der Erdbahn selber, vom Schwanken der Exzentrizität derselben, von den Schwankungen des Winkels der Ekliptik, von Präzession, Nutation u. s. w. empfängt er von ihr . . .“ Gewiß, die Sternkunde ist hier der gebende, die Erdkunde der empfangende Teil, allein die Empfängerin soll sich auch darüber im klaren sein, was sie erhält. Der Geograph braucht nicht selbst Sonnen- und Mondfinsternisse, Planetenbahnen oder gar Störungen zu berechnen, allein daß und wie solche Berechnungen möglich sind, daß der astronomische Kalkul, so ungemein verwickelt und vielgestaltig derselbe auch beim weiteren Vordringen wird, auf verhältnismäßig ein-

[1]) G. Gerland. Beiträge zur Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1887. S. XXXII.

fachen Grundlagen beruht, das soll dem Geographen bekannt sein. Wenn derselbe z. B. auseinanderzusetzen hat, daß das Altertum über kein anderes brauchbares Mittel zur Bestimmung von Längenunterschieden verfügte, als über die Beobachtung von Verfinsterungen, so sollte er zugleich doch wenigstens für seinen Teil etwas davon wissen, wie man sich von dem Eintreten derartiger Phänomene im voraus vergewissert. Wir wiederholen: alle Einzelheiten, welche nur den Astronomen von Fach interessieren, bleiben ausgeschlossen, aber die Prinzipien der Lehren von der Bewegung der Erde um ihre Achse, des Erdschwerpunktes in elliptischer Bahn und von den der Erdachse auferlegten Oszillationen gehören in unser Bereich. Es wäre ohne sie das Ortsbestimmungsproblem nur partiell lösbar, und wir streben dessen allgemeine Auflösung an.

Wenn wir so *inhaltlich* den Rahmen, innerhalb dessen wir uns zu bewegen haben werden, etwas weit zu spannen scheinen, so müssen wir auf der anderen Seite auch dafür sorgen, daß die *Behandlung der einzelnen Gegenstände* keine extensiv zu ausgedehnte werde. Gewisse Beschränkungen sind für uns eine gebieterische Notwendigkeit, schon aus dem rein äußerlichen Grunde, weil der programmgemäß an gewisse Grenzen gebundene Umfang des unserem Fache vorbehaltenen Bandes sonst weit über das gestattete Maß hinaus anschwellen würde. Es fährt (a. a. O.) Gerland fort, wie folgt: „Es ergibt sich aus dem Gesagten, daß der Geograph eine genaue Kenntnis einer Reihe von Meßinstrumenten und praktische Geschicklichkeit in ihrer Anwendung haben muß. Ja, ich möchte diese *Instrumentenlehre*, deren ja auch der Reisende auf das Dringendste benötigt ist, als ganz besonders wichtig möglichst betonen. Ebenso schließt sich hier als äußerst wichtige Nebendisziplin, als eine Art Kunstlehre der mathematischen Erdkunde, die *Kartographie* an.“ Niemand wird vorstehenden Bemerkungen des Straßburger Gelehrten ihre Berechtigung absprechen wollen; trotzdem aber vermag unser Handbuch der gestellten Forderung nur sehr teilweise gerecht zu werden. Von den Beobachtungs-

werkzeugen wird allerdings vielfach die Rede sein, ihr Zweck wird dargelegt, das Operieren mit denselben dem Sinne nach gelehrt, auch der zahllosen, hierbei sich eröffnenden Fehlerquellen und ihrer Bekämpfung wird gedacht werden — darauf aber verzichtet der Verfasser von Anfang an, daß durch die Lektüre seines Buches ein Jünger der Wissenschaft in die Beobachtungskunst eingeführt und in derselben heimisch werde. Hierzu bedarf es, soweit nicht die unmittelbare praktische Uebung auf der Sternwarte und im Terrain das Beste zu thun hat. wesentlich anderer litterarischer Hilfsmittel. Ein vergleichendes Beispiel wird am besten die Sache klarlegen: als Vergleichsobjekte wählen wir das vorliegende Buch und das wohlbekannte, vortreffliche Werk von Jordan [1]). Dieser Schriftsteller beschreibt ausschließlich solche Instrumente und Methoden, von deren Nutzbarkeit er sich selbst in langjähriger Praxis und zumal auch als Mitglied einer Forschungsexpedition zu überzeugen Gelegenheit hatte, diese aber auch so eingehend wie nur möglich, mit Berücksichtigung jeder vielleicht in Betracht kommenden Detailfrage — wir unsererseits suchen möglichst alle Verfahrungsweisen zu charakterisieren, auch die älteren und jetzt weniger gebrauchten, denn, was wir schreiben, ist ein *Handbuch*, und in einem solchen muß, wenn irgend angängig, auf jede vom Leser zu stellende Anfrage eine Antwort bereit liegen, keine erschöpfende zwar, aber doch eine, die ausreicht, um den Fragesteller über gewisse Hauptpunkte aufzuklären und ihm mittels sorgfältiger Litteraturnachweise die Möglichkeit gründlicherer Belehrung zu verschaffen. Hiermit dürfte denn namentlich auch unsere Stellung zu der *Lehre von der geographischen Ortsbestimmung* ausreichend scharf gekennzeichnet sein.

Während wir aber diese letztere immerhin für einen sehr integrierenden Bestandteil unseres Programmes erachten und demgemäß behandeln, schließen wir die Theorie

---

[1]) Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin 1886.

der Kartenprojektion grundsätzlich aus. Ein irgendwie dringendes Bedürfnis, auch sie mit aufzunehmen, kann nicht als bestehend anerkannt werden, denn jede Gruppe von Interessenten findet unschwer Lehrbücher dieser Disziplin, welche sich ihren besonderen Wünschen anpassen. Für den ersten Anfänger sorgt Steinhauser, für den jungen Studierenden der Erdkunde Zöppritz, für den nach Beherrschung des Stoffes strebenden älteren N. Herz, und in jüngster Zeit sind noch die Schriften von Hammer, welche sich insbesondere der Systematik wegen empfehlen, hinzugekommen. Bei alledem würden wir es nur freudig begrüßen können, wenn der Herr Herausgeber und die Verlagshandlung sich entschlößen, der „Bibliothek" dermaleinst noch ein „Handbuch der theoretischen und angewandten Kartographie" einzuverleiben, allein dieses unser Buch kann auch nicht annähernd solchem Zwecke dienen helfen. Gewisse einfache Grundprinzipien der Netzentwurfslehre werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt; einige speziellere Fragen, auf welche wir uns geführt sehen werden, sollen gelegentlich in dem Umfange diskutiert werden, wie es für die unmittelbare Anwendung wünschenswert erscheint. Wie mit der Kartographie halten wir es mit der der mathematischen Geographie freilich sehr nahe verwandten *wissenschaftlichen Nautik:* soweit dieselbe für unser eigentliches Fach, vor allem für die Breiten- und Längenbestimmung, direkte Bedeutung zu beanspruchen hat, können und wollen wir uns der Rücksichtnahme auf sie nicht entschlagen, jedoch völlig unmöglich ist es uns, einen Lehrbegriff der Navigationskunde zu liefern.

Auf allseitige Billigung rechnen wir, wenn wir von unserer Darstellung die *astronomische Chronologie* fast ganz entfernt halten, die ja freilich in der Mehrzahl der Unterrichtswerke ihren Platz eingeräumt zu erhalten pflegt. Wir sind nicht im stande, in diesem Zweige der angewandten Mathematik, so reizvoll er dem Eingeweihten erscheinen mag, ein *geographisches Element* zu erkennen, und damit ist die äußerste Beschränkung nach dieser Seite hin selbstverständlich geworden. Lediglich jene

Fragen der Zeitmessung, deren Beantwortung von der Kugelgestalt der Erde abhängig ist, sowie die zur Zeitübertragung in Beziehung stehenden Aufgaben interessieren die mathematische Geographie als solche.

Wenn der litterarische Apparat in diesem Handbuche ein vergleichsweise umfänglicher und schwerfälliger geworden ist, so wolle man diesen Umstand der Anschauung zu gute halten, welche sich der Verfasser von dem Wesen und von der Bestimmung eines Handbuches gebildet hat. Ein solches kann und darf nicht alles abhandeln und lehren wollen, was der betreffenden Wissenschaft zugerechnet wird, es kann und soll aber jede nur mögliche Belehrung darbieten bezüglich der Quellen, aus welchen ein tieferes Wissen zu schöpfen ist. In dieser Hinsicht möchten wir auch weitgehenden Wünschen entgegenkommen. Des ferneren hat der Verfasser, sowohl seiner persönlichen Neigung folgend, als auch geleitet von der Ueberzeugung, daß der geschichtliche Entwicklungsgang nahezu immer auch das sachliche Verständnis am leichtesten erschließt, jede einzelne Doktrin möglichst von ihrem Ursprunge bis zur Gegenwart zu verfolgen sich bemüht. Insonderheit die Lehre von der Erdgestalt gewinnt bei dieser Art der Betrachtung einen höheren Grad von Durchsichtigkeit, als er bei Einschlagung eines mehr dogmatischen Weges der Beweisführung erzielt werden kann.

Zum Schlusse muß wohl auch die Frage nach den in diesem Bande vorausgesetzten Vorkenntnissen berührt werden. Nirgends darf in der Erdkunde — das hat man in der großen analytischen Periode des vorigen Jahrhunderts wohl ab und zu vergessen — die Mathematik Selbstzweck sein, und mit je leichterem mathematischem Rüstzeuge man im Einzelfalle auskommen kann, um so besser. Andererseits darf aber auch auf die Herbeiziehung keiner schwierigeren Theorie Verzicht geleistet werden, wenn ohne ihre Hilfe an einer wichtigen Frage vorübergegangen werden müßte, und so ist der Gesamtinhalt dieses Buches nur dem zugänglich, der mit der sphärischen Trigonometrie und mit den Anfangsgründen der

sogenannten „höheren Mathematik“ Bescheid weiß. Gleichwohl sind die meisten Partien auch Lesern zugänglich, welche sich auf die von der Rechnung gelieferten Resultate beschränken wollen. —

Hiermit glauben wir unser eingangs gegebenes Versprechen eingelöst und demjenigen, der von dem Buche Gebrauch zu machen gedenkt, Klarheit über das, was er zu erwarten hat, verschafft zu haben. Möge dieser Bestandteil der Ratzelschen „Bibliothek“ nur auch nach Form und Inhalt eine solche Ausgestaltung erfahren haben, daß er neben seinen verdienstvollen Vorläufern ein Plätzchen zu behaupten vermöge! Wir benützen zugleich diese Gelegenheit, um unserem geehrten Kollegen, Herrn Dr. S. Finsterwalder, unseren verbindlichsten Dank für die große Mühewaltung auszusprechen, welcher er sich bei der Revision des Druckes unterzogen hat. Sein sachverständiger Rat ist dem Verf. insbesondere bei den die praktische Beobachtungsthätigkeit betreffenden Fragen von hohem Nutzen gewesen.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Methodologisch-bibliographische Einleitung.

Geschichte des Wortes Geographie. Das Wort *mathematische Geographie* gehört zu denjenigen, über deren Bedeutung sich durchaus noch keine allseitige Uebereinstimmung unter den Fachmännern herausgebildet hat. Dieser Umstand kann auch keineswegs unsere Verwunderung erregen, wenn wir bedenken, daß nicht einmal die *Geographie* als solche jene festen Grenzen für ihre Wirksamkeit kennt, die wir durch Tradition und nachgefolgte scharfe Begriffsbestimmung anderen Wissensgebieten, der Mathematik, Botanik u. s. w. gezogen sehen. In unserem Sonderfalle gestaltet sich die Herausarbeitung einer klaren, unzweideutigen Definition schon aus dem Grunde schwieriger, weil das Wort γεωγραφία in seiner ursprünglichen Bedeutung sich fast vollständig mit unserer mathematischen Geographie von heute gedeckt hat [1]). Um aber wenigstens einige Aufklärung über die Phasen zu erhalten, welche Sache und Bezeichnung im Laufe der Zeit durchzumachen hatten, betreten wir den geschichtlichen Weg, der uns nicht nur in der zunächst erwähnten Angelegenheit zur Orientierung führen, sondern uns zugleich die Möglichkeit verschaffen soll, mit Vermeidung früherer Fehlgriffe zu völlig befriedigenden

---

[1]) Auf diese Thatsache ist in neuerer Zeit besonders vom Verf. in seinem Schriftchen „Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen“ (München 1886) hingewiesen worden.

Festsetzungen durchzudringen. Die bekannten Werke von Lüdde [1]) werden wir dabei als vortreffliche Führer anzuerkennen und zu benützen haben.

Griechische Periode. Das ältere Griechentum hat von der wissenschaftlichen Bedeutung der Erdkunde überhaupt keine rechte Vorstellung gehabt [2]); man besaß zwar Reisebeschreibungen, wie die des Skylax, der um 500 v. Chr. die damals bekannten Meeresbecken durch- und umschiffte, man behandelte auch in geschichtlichen Werken die einschlägigen Materien aus dem Bereiche der Erd- und Völkerkunde [3]), zum Teile mit großem Geschick, aber man dachte nicht an systematische Darstellung. Auch die Philosophen, welche sich seit Thales' Zeiten ununterbrochen mit der kosmischen Stellung des Erdkörpers und mit dessen Beziehungen zu den Gestirnen beschäftigten, begnügten sich mit der Verkündigung ihrer oft gewagten Hypothesen [4]) und überließen es dem großen, von der Naturforschung der Neuzeit in einer oft geradezu betrübenden Weise mißverstandenen und mißhandelten Aristoteles, in seiner genialen μετεωρολογία eine erste und einheitliche Zusammenfassung alles bis dahin gewonnenen Wissens zu versuchen [5]). Wir können mit M. Schmidt gerne zugeben, dass zwei Milesier in der Geschichte der

[1]) Lüdde, Die Geschichte der Erdkunde, Berlin 1841; Die Geschichte der Methodologie der Erdkunde, Leipzig 1849.

[2]) Eingehende Nachweisungen über die ältere hellenische Geographie findet man in den nachstehend verzeichneten Schriften: M. C. P. Schmidt, Zur Geschichte der geographischen Litteratur bei den Griechen und Römern, Berlin 1887; H. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, 1. Abteilung, Leipzig 1887. Dieses letztere Geschichtswerk, eine hochachtbare Leistung, ist leider noch ein Torso.

[3]) Die ersten „Periplen" rühren zwar von Skylax selbst her, doch waren fälschlich unter seinem Namen auch Arbeiten verwandter Natur verbreitet, welche in Wirklichkeit erst anderthalb Jahrhunderte später kompiliert worden waren.

[4]) Das erste Kapitel wird uns einen Einblick in diesen Komplex eigenartiger Spekulationen und Phantasiegebilde gewähren.

[5]) In seinem Beitrag zu Iwan Müllers „Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft" (9. Halbband, S. 72 ff.) hat der Verf. die obige Behauptung des näheren begründet.

Erdkunde eine bahnbrechende Bedeutung haben, indem Anaximander als der *erste Kartograph*, Hekataeus als der *erste beschreibende Geograph* anzusehen ist; allein der Zusammenhang zwischen diesen ersten schüchternen Bethätigungen geographischen Sinnes fehlte noch vollständig und ward überhaupt von den Griechen niemals vollkommen erreicht. Im Zeitalter der Diadochen schrieb zwar Euklid seine „Φαινόμενα“, welche man mit vollem Rechte als den ersten elementaren Abriß der astronomischen Geographie bezeichnen darf, allein der berühmte Mathematiker hatte sich bei dieser Arbeit nicht im allermindesten durch geographische Rücksichten, sondern einzig und allein durch den Wunsch leiten lassen, alle Anwendungen, deren das von ihm geschaffene geometrische System fähig war, gewissermaßen als Ergänzungkapitel zu diesem zusammenzustellen. Festen geographischen Boden unter die Füße bekommen wir erst, indem wir uns zu Eratosthenes wenden, und dieser Gelehrte verleugnete auch als Geograph in keiner Weise den Mathematiker, der er von Hause aus war. „Das Hauptgewicht der Eratosthenischen Arbeit,“ sagt Berger [1]), „lag in der Verpflanzung der Geographie auf den Boden der Mathematik und Geometrie.“ Wir dürfen dabei nicht verschweigen, daß gegen diesen einseitigen Standpunkt bereits im Altertum Stimmen sich erhoben [2]); zumal der Geschichtschreiber Polybius war es, der sich in diesem Sinne aussprach, allein er verfiel auch zugleich in das entgegengesetzte Extrem, legte allen Nachdruck auf Reisen, auf die Erweiterung des länderkundlichen Wissens und setzte die Erdkunde, wie dies leider auch heute noch so viele Pädagogen thun, zu einer bloßen Hilfswissenschaft der historischen Forschung herab [3]). Aehnlich, wenn schon

---

[1]) Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes, Leipzig 1880. S. 15.

[2]) Ibid. S. 9.

[3]) Aus des Polybius Werke sind hier insbesondere die folgenden Stellen herauszuheben: I, 41; II, 14; III, 36; V, 21. Auch der Stoiker Polemon (um 200 v. Chr.) that sich durch seine Gegnerschaft gegen Erastosthenes hervor; vgl. hierzu Bunburys in-

gemäßigter und von den mathematischen Neigungen des Hellenenvolkes minder abweichend war die Denkweise Strabons, dessen große Verdienste um physikalische und Anthropogeographie ihn wohl dazu berechtigten, die starre Systematik des Eratosthenes gerade nicht als das absolute Ideal geographischen Wissens zu betrachten [1]). Freilich wäre ohne erstere jede anderweite Arbeit von fragwürdigem Nutzen gewesen, und wir sehen deshalb die nächstfolgenden griechischen Schriftsteller immer wieder mit Vorliebe den von dem Bibliothekar von Alexandria vorgezeichneten Weg beschreiten. Durchaus als Mathematiker fühlten und dachten die drei aus vorchristlicher Zeit allein in Betracht kommenden Männer Hipparch, Geminus und Posidonius [2]), welch letzterer allem Anscheine nach den jüngeren Cleomedes erheblich beeinflußt hat [3]). Wahrscheinlich noch aus der Zeit vor Christus

---

haltsreiches Buch „A History of Ancient Geography among the Greeks and Romans from the earliest ages till the fall of the Roman Empire“ (vol. II, London 1879. S. 1 ff.). Inwieweit Hipparch sich auf dieselbe Seite neigte, geht aus Strabons unvollkommenem Berichte nicht mit hinreichender Klarheit hervor; jedenfalls kann, wie sich gleich zeigen wird, an einen prinzipiellen Gegensatz zwischen dem ersteren und Eratosthenes nicht gedacht werden, da der Berührungspunkte zwischen beiden allzu viele waren.

[1]) Berger, S. 10. Eine Rechtfertigung Strabons gegen den in der That zu weit gehenden Vorwurf, als habe derselbe von einer geometrischen Grundlage seiner Wissenschaft überhaupt nichts wissen wollen, enthält H. Fischers Abhandlung „Ueber einige Gegenstände der physischen Geographie bei Strabon“ (Wernigerode 1879).

[2]) Was sich von Hipparchs Ansichten durch geschickte Ausnützung der Quellenschriften ermitteln ließ, findet man gesammelt und verwertet bei Berger: Die geographischen Fragmente des Hipparch, Leipzig 1869. Geminus und Posidonius sind vielleicht Zeitgenossen des Genannten gewesen, wenigstens verlegt beide Blaß („Dissertatio de Gemino et Posidonio“, Kiel 1883) in das zweite vorchristliche Jahrhundert. Die „Εἰσαγωγή“ des ersteren (lateinisch und griechisch herausgegeben von Edo Hildericus zu Altdorf 1590) ist ein Lehrbüchlein der mathematischen Geographie; wegen Posidonius sind seine von Blake zusammengestellten „Reliquiae“ (Leyden 1810) zu vergleichen.

[3]) Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 201.

datieren auch die sphärischen Schriften des Theodosius[1]), bei denen aber — ähnlich wie es bei Euklid (s. o.) und noch früher bei Autolycus der Fall war — ganz und gar der geometrische Gesichtspunkt vorherrscht. Daran wird nichts geändert durch den Umstand, daß im späteren Mittelalter und bis tief in die neuere Zeit herein — so noch als Galilei 1589 seine Professur in Pisa antrat — eine Vorlesung über die Sphärik des Theodosius als eine gute Einleitung in die Geographie angesehen wurde. Nicht viel anders verhielt es sich mit der etwa um 80 n. Chr. entstandenen Schrift „Σφαιρικά“ des Menelaus, die allerdings in rein mathematischer Beziehung einen gar nicht zu unterschätzenden Fortschritt gegen die ganz elementare Vorarbeit des Theodosius bezeichnet.

Hiermit sind wir chronologisch bei dem Manne angelangt, dessen Auffassung des Wortes γεωγραφία von einem in der Geschichte sonst nicht leicht wieder nachweisbaren Einflusse für die Folgezeit gewesen ist. Claudius Ptolemäus, ein Zeitgenosse der Kaiser Trajan und Hadrian, von dessen großem Verdienste um Ortsbestimmung und Kartenzeichnung uns Peschel[2]) ein anschauliches Bild entwirft, glaubte mit diesen beiden Aufgaben die Thätigkeit des Geographen erschöpft, und in der That war ja von einer wissenschaftlichen Erdkunde so lange keine Rede, als nicht in der bezeichneten Richtung eine sichere Grundlage geschaffen war. „Ptolémée prend,“ so läßt sich einer der gründlichsten Kenner seiner Werke, der französische Akademiker Letronne[3]), ver-

[1]) Theodosii Sphaericorum libri tres, ed. Pena, Paris 1558; ed. Nizze, Berlin 1826; Theodosii De diebus et noctibus, ed. Dasypodius, Straßburg 1572; Theodosii De habitationibus, ed. Maurolycus, Messina 1558.

[2]) Peschel-Ruge, Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. Humboldt und C. Ritter, München 1877. S. 51 ff. Die Ausgaben der ptolemäischen Geographie sind zahlreich (die beste wohl von Wilberg); französisch, begleitet von Zusätzen aus Delambres Feder, gab dieselbe Halma heraus (Paris 1813, 1816). Das uns an dieser Stelle zumeist interessierende erste Buch ist verdeutscht bei Georgii (Alte Geographie, Stuttgart 1832).

[3]) Letronne, Examen critique des prolégomènes de la Géographie de Ptolémée, Paris 1830. Die von Lüdde (Gesch. d. Erd-

nehmen, „le mot Géographie dans le sens graphique et non descriptif. Pour Ptolémée la Géographie c'est l'art de dresser des cartes générales de la terre.“ Das ganze Mittelalter hindurch wirkte die hier charakterisierte Anschauung nach, wie denn noch der geniale Erasmus Rotteradamus von der Geographie sagt [1]: „Ptolemaeus hanc disciplinam ad certiorem rationem redegit.“ Nur wenige Schriftsteller allerdings traten völlig in die Fußstapfen des Meisters ein; viele Geographen der späteren Antike waren nur Sammler, die meist nicht allzuviel auf Kritik hielten; die Kompendiographen Solinus, Dionysius Periegeta und wie sie alle heißen, blieben von der strengen ptolemäischen Doktrin so gut wie gänzlich unberührt. Höher als sie und dem klassischen Vorbilde näher stehen in nachchristlicher Zeit unter den Griechen Agathemerus [2]) mit seiner „γεωγραφίας ὑποτύπωσις“ und unter den Römern Pomponius Mela [3]), der seinen Lehrbegriff wenigstens mit einer korrekten Darstellung der von der Kugelform der Erde bedingten Verhältnisse einleitet.

Römerzeit und Mittelalter. Eine lange Zeit von mehr denn tausend Jahren schließt sich an, während deren wie aller übrigen Wissenschaften so auch der Geographie eine Stagnation sich bemächtigt hatte, aus welcher sie auch die Anstrengungen einzelner hochbegabter Vertreter der scholastischen Richtung nicht zu erwecken imstande waren. Die Autoren der späteren Kaiserzeit, wie nicht minder

---

kunde, S. 37 ff.) gegen Letronnes Interpretation der ptolemäischen Grundauffassung erhobenen Einwände erscheinen uns unzutreffend.

[1]) Wiedergegeben ist diese Aeußerung des großen Polyhistors bei Lüdde (Gesch. d. Methodol., S. 8 ff.).

[2]) Bunbury, Vol. II. S. 655.

[3]) Die drei Bücher „De situ orbis“ wurden von Gronovius 1722 zu Leyden, in deutscher Uebertragung von Diez 1774 zu Gießen herausgegeben. Wie hoch ihr Wert von denkenden Pädagogen geschätzt ward, erhellt aus dem Umstande, daß der Nürnberger Schulrektor Cochläus zu Anfang des 16. Jahrhunderts den Pomponius Mela in der Gelehrtenschule der genannten Stadt als Lehrbuch einzubürgern bemüht war. Vgl. Otto, Johann Cochläus der Humanist, Breslau 1874. S. 24 ff.

der patristischen Periode [1]), kann man kaum besser schildern als mit Peschels Worten [2]): „Die lateinisch schreibenden Geographen des früheren christlichen Mittelalters schöpften ihr Wissen nicht aus griechischen Quellen. Herodot, Eratosthenes, Polybius, Strabon, Ptolemäus, von den sogenannten kleinen Geographen ganz zu schweigen, werden fast nie genannt und bleiben völlig unbenützt. Die gelehrtesten Männer der damaligen Zeit hielten sich im günstigsten Falle an Plinius, von dem ein großer Kenner der alten Astronomie behaupten konnte, er habe Hipparchs Schriften nie gelesen, sondern nur aus dritter Hand gekannt. Gewöhnlich wurde aber dem Plinius der kürzere Mela und noch lieber Solinus vorgezogen, der wesentlich auf Kosten des Plinius seine gedrängte Erdbeschreibung verfaßte, die wertvollsten Erkenntnisse verschwieg, dafür aber einer nach Wundern lüsternen Phantasie durch Aufsammlung aller geographischen Fabeln reiche Sättigung gewährte.“ Von den Scholastikern sind Wilhelm von Conches und Albertus Magnus wirkliche Geographen gewesen, und die von wirklich mathematischem Geiste durchdrungene Schrift „De natura locorum“ ist noch drei Jahrhunderte nach dem Zeitpunkte ihrer Abfassung maßgebend für akademische Vorträge über mathematische und physikalische Erdkunde gewesen [3]). Auf dieses letztere Moment ward also nach wie vor besonderes Gewicht gelegt, indessen kamen doch auch schon Anzeichen dafür vor, daß neben dem formalen Stoffe auch die Pflicht des Geographen, Erdgegenden wirklich zu *beschreiben,* in einzelnen Fällen zur Anerkennung gelangte [4]). Die Reform des mathe-

[1]) Die beste Charakteristik dieses Zeitalters gibt Marinellis Monographie „La geografia e i padri di chiesa“ (Rom 1883; ins Deutsche übertragen von Ludwig Neumann, Leipzig 1884).

[2]) Peschel-Ruge, S. 80.

[3]) Näheres hierüber ist zu finden bei v. Aschbach, Die Wiener Universität und ihre Humanisten im Zeitalter Kaiser Maximilians I., Wien 1877. S. 277 ff. Der Mathematiker und Mediziner Collimitius war besonders thätig, das Andenken des großen Scholastikers wieder aufzufrischen.

[4]) Nach Huber (Die englischen Universitäten, 1. Bd., Kassel

matischen Universitätsunterrichtes in der zweiten Hälfte des 15. und zu Beginn des 16. Jahrhunderts legte den geographischen Unterricht auch noch zunächst in die Hände des Mathematikers, und für gewöhnlich dürfte derselbe sich enge genug an die „Sphaera materialis“ des Sacrobosho angeschlossen haben, doch begegnen wir in Wien, Ingoldstadt, Tübingen und anderwärts wenigstens ernst gemeinten Versuchen, die Zuhörer in dasjenige einzuführen, was man damals eben unter Länderkunde verstand. So wird von Justus Stöffler in Tübingen, der zu den ersten Astronomen seiner Zeit sich rechnen durfte, berichtet, daß er die europäischen Itinerare — vorab die nach Rom führenden — in seiner geographischen Vorlesung ausführlich erläuterte [1]). Und Sebastian Münster, der Verfasser der weltberühmten und für die Verbreitung erdkundlichen Wissens in weitesten Kreisen auch thatsächlich sehr verdienstvoll gewordenen „Kosmographey“, war von Hause aus Professor der Mathematik und der alttestamentlichen Sprachen [2]).

Begriffsscheidung zwischen mathematischer Geographie und Geographie überhaupt. Wir stehen, wie aus den bisherigen Angaben erhellt, einem Wendepunkte jetzt ziemlich nahe: *noch ist die Geographie dem*

1839. S. 124) hat während des 13. Jahrhunderts der auch durch seine Einsicht in meteorologische Vorgänge vor seinen Zeitgenossen sich auszeichnende Giraldus an der jugendfrisch aufblühenden hohen Schule Oxfords Vorträge über „Topographia Cambriae“ gehalten.

[1]) Vgl. Heyd, Melanchthon und Tübingen 1512—1518, Tübingen 1839. S. 63 ff. Dort ist von einem gegenwärtig noch auf der Bibliothek der schwäbischen Landesuniversität verwahrten Konzepte eines Vorlesungsheftes von Stöffler die Rede, welches die Aufschrift führt: Commentarii Stoeffleri in Geographiae Ptolemaei libros II priores usque ad caput de magna Germania.

[2]) Münsters Weltbeschreibung entwickelte sich auch ursprünglich aus kartographischen Anfängen; er begann mit der Mappierung der Umgegend von Heidelberg, deren Entwurf seinem „Organicum uranicum“ (Basel 1536) beigegeben ist, und verkündete zugleich seinen Plan, eine richtige „Landtaffel Teutscher Nation“ auszuarbeiten. Stufenweise nahm dann dieser Plan immer größere Dimensionen an.

„common sense“ nach ein Anhängsel der Mathematik, allein es bereitet sich doch bereits die Scheidung vor in eine mathematische Geographie einerseits und in eine das γράφειν betonende Geographie im engeren Sinne andererseits. Wir sind an diesem Orte nicht in der Lage, die einzelnen Stadien dieses in der Natur der Sache begründeten Scheidungsprozesses zu kennzeichnen, doch können wir den Wunsch nicht unterdrücken, daß sich jüngere Kräfte mit dem hier angedeuteten Spezialkapitel der geographischen Unterrichts- und Prinzipiengeschichte näher befassen möchten. Als einer der ersten Autoren, welche das Wesen der Geographie in minder engem Sinne auffaßten, ist Glareanus zu nennen, dessen Werkchen „De geographia liber unus“ (zuerst erschienen 1527) eine sehr beträchtliche Zahl von Auflagen erlebte und dem Bedürfnisse der Bildungsbeflissenen in hohem Grade entgegengekommen zu sein scheint [1]; Glarean selbst war sich bei der Abfassung seines Buches allerdings wohl kaum bewußt, daß er einen methodischen Fortschritt angebahnt hatte, und seine unmittelbaren Zeitgenossen befanden sich im gleichen Falle [2]. Aus dem 16. Säkulum ist neben dem zuletzt Genannten noch besonders der ältere Gemma Frisius zu nennen als ein Schriftsteller, bei dem die mathematische Anschauung zwar vorherrschte, ohne aber das beschreibende Element auszuschließen [3]. Ja, wir finden bei ihm sogar bereits eine recht ausgesprochene Neigung zum Spezialisieren vor und halten es deshalb für zweck-

[1] Nicht weniger als 11 Ausgaben kennt R. Wolf (Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz, 1. Cyklus, Zürich 1858. S. 8). Ebenda wird eine gedrängte Analyse des Inhaltes gegeben, aus der hervorgeht, daß Glarean das geometrische Gerüste seiner Disziplin in aller Strenge errichtete, dann aber auch die Länder, Flüsse, Städte kurz beschrieb und namentlich auch die Resultate der großen überseeischen Entdeckungsfahrten mitteilte.

[2] In einem Briefe des Erasmus an Poncher in Paris (a. a. O., S. 5) heißt es von Glarean: „In der Geschichte besitzt er große Kenntnisse; in der Musik, Geographie *und den übrigen mathematischen Wissenschaften* besteht seine eigentliche Stärke.“

[3] Aus der großen Anzahl mathematisch-geographischer Lehrbücher des wackeren Holländers heben wir hier nur eines hervor: De locorum describendorum ratione, Antwerpen 1550.

entsprechend, seine Kategorientafel, wie sie in der französischen Bearbeitung seines Hauptwerkes enthalten ist, zu reproduzieren. „Nous croyons," so heißt es dort[1]), „quatre descriptions principales, par lesquelles est représentée la disposition de la superfice terrestre; Savoir est,

Cosmographie	C'est à dire, description	du Monde.
Géographie		de la terre.
Chorographie		des Régions.
Topographie		des lieux."

Man erkennt, daß in vorliegendem Schema die „Kosmographie" als ein astronomisch-physikalischer Wissenszweig den drei rein terrestrischen Disziplinen gegenübergestellt wird, deren gegenseitige Verschmelzung und Durchdringung dann nur noch eine Frage der Zeit sein konnte. Man sieht aber auch weiter, daß die „Kosmographie" des Münster (s. o.) etwas von der des Gemma Frisius ganz Verschiedenes war; zweifellos ist die Wortbildung und Sinnauslegung bei letzterem die korrektere, und sie hat sich deshalb auch lange Jahre, ja eigentlich sogar bis in unsere Tage zu dem Zwecke erhalten, die naturwissenschaftliche „Weltbeschreibung" von der mehr erzählenden „Erdbeschreibung" zu unterscheiden. Daß man, wie Lüdde angibt[2]), die mathematische und physische Erdkunde in ihrer Vereinigung „Geographia naturalis" genannt habe, können wir nicht durch Beispiele belegen; nur gelegentlich kommt dieser Ausdruck bei Leyser vor.

Varenius. Das 17. und 18. Jahrhundert (in seiner ersten Hälfte) können als der Zeitraum bezeichnet werden, in welchem der oben näher charakterisierte Erkenntnis- und Klärungsprozeß zwar langsame, aber doch erkennbare Fortschritte macht. Sehr wichtig für unsere Zwecke wäre es, Einsicht in eine angeblich von Born-

---

[1]) Gemma Frisius, Exposition sur la Mappe Monde, trad. par Claude de Boissiere, Paris 1556. S. 2. Aehnlich klassifiziert übrigens auch schon Peter Apian (der ältere) in seiner „Cosmographia" (Landshut 1524) unser Wissen von der Erde und ihren Bestandteilen.

[2]) Lüdde, Gesch. d. Method., S. 8 ff.

mann herausgegebene Schrift des Tübinger Mathematikprofessors W. Schickard „De studio geographico rite instituendo“ zu erhalten, welche ihrem Titel nach von Lüdde[1]) — jedoch der sonstigen Gewohnheit entgegen ohne Entstehungszeit und Druckort — angeführt wird; Poggendorff[2]) weiß nichts von derselben, und so liegt der Verdacht einer Täuschung nur zu nahe, wiewohl Schickard allerdings bei verschiedenen Gelegenheiten seine Teilnahme für die Förderung der geographischen Wissenschaft bekundet hat[3]). Recht belehrend hinsichtlich des latenten Kampfes zwischen der hergebrachten und der sich neu bildenden Auffassung ist Varenius, dieser einzigartige geographische Denker, den man mit Hahn getrost zu den klassischen Vertretern der Geographie rechnen darf[4]). Die Vorbildung des Varenius war eine fast exklusiv mathematische; als getreuer Schüler des scharfsinnigen Joachim Jungius hatte er von früh an die Ueberzeugung in sich aufnehmen müssen, daß in jeder Disziplin nur so weit Wahres und Feststehendes zu finden sei, als in derselben die mathematische Behandlungsweise Platz gegriffen habe[5]). Von der Mathematik aus also, so bemerkt Hahn zutreffend, war Varenius an das Studium und an die Weiterführung der Erdkunde herangetreten, aber sein Aufenthalt in Hamburg und Amster-

---

[1]) Lüdde, Gesch. d. Erdk., S. 41 ff.

[2]) Poggendorff, Biographisch-litterarisches Handwörterbuch der exakten Wissenschaften, 2. Band, Leipzig 1863. Sp. 794 ff.

[3]) Zum Beweise dafür können wir uns auf die bemerkenswerte, u. a. bereits die Auflösung des irrigerweise unter dem Namen Pothenots bekannt gewordenen geodätischen Problemes enthaltende Abhandlung beziehen: Kurze Anleitung, wie künstliche Landtafeln auß rechtem Grund zu machen, und die bisher begangene Irrthumb zu verbessern, Tübingen (posthum) 1669. Das ganze Fundament der Geographie besteht nach Schickard, und darin wird ihm jedermann beipflichten, „in richtigen und nach Kunst der Mathematic delineirten Geographischen Mappen“.

[4]) J. G. Hahn, Die Klassiker der Erdkunde und ihre Bedeutung für die geographische Forschung der Gegenwart, Königsberger Studien, 1. Band, S. 213 ff.

[5]) Vgl. Wohlwill, Joachim Jungius, Festrede zur Feier seines dreihundertsten Geburtstages, Hamburg 1888.

dam, der stete Verkehr mit Reisenden und Seefahrern erweckte in dem jungen Adepten der exakten Wissenschaften den geographischen Geist, und aus der Vereinigung dieser beiden Anregungen ging das in seiner Art einzig dastehende Werk hervor, welches die „allgemeine Erdkunde“ geschaffen hat[1]). Sie hatte nach des Verfassers eigener Aussage den Zweck, *die Erde im ganzen* zu betrachten, ihre Beziehungen zu der Sonne und zu den anderen Weltkörpern, ihre verschiedenen Bewegungen, ihre Länder und Meere, die Erscheinungen auf ihrer Oberfläche, in ihrer Tiefe und in ihrem Luftkreise möglichst umfassend zu behandeln[2]). So sehen wir denn bei Varenius die *mathematisch-physikalische Erdkunde* als autonome und dem Grundgedanken nach vollkommen fertige Wissenschaft wie eine Athene aus dem Haupte des Zeus hervortreten, und wenn eine nachhaltige Wirkung von einem Anstoße erwartet werden durfte, so war es diesmal der Fall. Bis zu einem gewissen Grade traf dies auch ein, das beweist schon die Zahl der Auflagen des Varenschen Werkes, freilich aber waren, zumal in Deutschland, die Hochschulverhältnisse mit ihrem pedantischen Zuschnitte auf Brotstudien der Fortpflanzung und Erweiterung derartiger Neuerungen recht wenig günstig. Hier blieb die Geographie ein Appendix der angewandten Mathematik, wie man dies recht deutlich aus einem Lehr-

---

[1]) Die Originalausgabe kam 1664 heraus: Geographia generalis, in qua affectiones generalis telluris explicantur etc. Newton ließ eine revidierte Auflage erscheinen (Cambridge 1672), diese legte dann Jurin mit Zusätzen aufs neue auf (ibid. 1712), und eine französische Uebersetzung besorgte Depuisieux. Ueber die Entstehung des Werkes, sowie über die Lebensumstände des im jugendlichsten Alter dahingegangenen Verfassers berichtet ausführlich Breusing (Petermanns geogr. Mitteilungen, 1880. S. 136 ff.).

[2]) Auch die Wendung *vergleichende Erdkunde* ist Eigentum des Varenius, doch soll sie nicht das bezeichnen, was spätere Geographen mit diesem Terminus ausdrücken wollten. Dies bemerkt zutreffend A. v. Humboldt (Kosmos, 1. Band, S. 74); Varens „Geographia comparativa“ trug ein ausgesprochen *nautisches* Gepräge, wie dies von Blink (Bernhard Varenius, De grondlegger der wetenschapelijke geographie, Amsterdam 1886) näher erörtert wird.

büchlein eines Wittenberger Professors aus der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts ersehen kann [1]), und selbst ein so systematischer, freier Kopf, wie der Philosoph Christian Wolf, blieb, was diesen Punkt anlangt, in seinen Kompendien durchaus im alten Gleise [2]).

Liebknecht. Immerhin mag es für den geschichtlich arbeitenden Methodologen als erfreuliches Anzeichen einer Wendung zum Besseren gelten, daß um jene Zeit die Frage, wie der niedere und höhere geographische Unterricht am passendsten einzurichten sei, in der akademischen Tageslitteratur häufiger diskutiert zu werden anfängt. Ist auch der Wert dieser Dissertationen, absolut genommen, ein viel geringerer als derjenige der in unserer Zeit erscheinenden Gelegenheitsschriften von analogem Charakter, so begegnet man doch mancher gesunden Ansicht unter einem Schwulste bedeutungsloser Redensarten. Eine wertvollere Erscheinung, von der auffallenderweise die neueren Schriftsteller so gut wie gar keine Notiz zu nehmen sich veranlaßt fanden, ist dagegen das Lehrbuch des Mathematikers Liebknecht [3]), welches den geographischen Vorlesungen an der Universität Gießen zu Grunde lag und dieser letzteren in einer Beziehung einen entschiedenen Vorsprung vor mancher Schwesteranstalt gesichert haben dürfte. Der Autor identifiziert bewusst „Geographia generalis, quam mathematicam vocant", mit dieser letzteren. Man besitze zwar, so meint er, schon manchen ganz schätzbaren Leitfaden der Geographie, aber nur wenige, welche diesem Fache in der richtigen mathemathischen Weise „ex merito" gerecht werden. Aufs

---

[1]) Nottnagel, Synopsis mathematica continens Mathesin Generalem Arithmeticam Geometricam Astronomiam Geographiam, Wittemberg 1665. Was in dem winzigen Büchlein über Flüsse und Gebirge beigebracht wird, ist ganz annehmbar.

[2]) Die „Geographie" schlechtweg bildet einen Teil des vierten Bandes der „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften" (Halle 1710).

[3]) Liebknecht, Elementa Geographiae Generalis, triplici sectione exposita, Frankfurt a. M. 1712.

engste schließt sich Liebknecht an Ptolemäus an: „Geographia ... ex rei veritate hodie Scientia Mathematica dicatur de totius Globi terraquaërei, ejusdem partium ac affectionum quantitativarum dimensione juxta Coeli positionem instituta artificiosaque illius expressione agens." Auch da, wo von der Geschichte der Erdkunde die Rede ist, werden zunächst lauter Mathematiker und Astronomen als deren Förderer namhaft gemacht, und erst nachher kommt die Sprache auch auf die neueren Erweiterungen des geographischen Horizontes und auf die Männer, welchen man dieselben zu danken hatte [1]). Daß dann Liebknecht auf die von ihm selbst gestellte Frage, „an Scientia sit Geographia", eine den mathematischen Charakter der Disziplin hervorhebende Antwort gibt [2]), ist leicht zu denken.

Da wir in keinem anderen Werke der Uebergangszeit die einseitige Auffassung der ptolemäischen Tradition so bestimmt und bewußt sich ausprägen gesehen haben, wie gerade in dem Liebknechtschen, so wollen wir bei demselben noch einen Augenblick uns aufhalten. Wie ein akademischer Lehrer ums Jahr 1700 von der Geographie dachte, läßt sich mit Bezugnahme auf die von uns beigebrachten Daten etwa folgendermaßen charakterisieren: *Die Geographie behauptet nur insoweit wissenschaftlichen Charakter, als sie der Mathematik zugänglich ist, und insofern darf, wenigstens unter dem Gesichtspunkte des akademischen Lehrers, schlechthin Geographie mit mathematischer Geographie identifiziert werden; die Länderkunde mag als Anhang gelegentlich mitbehandelt oder dem elementaren Unterrichte überlassen werden* [3]). Prinzipiell liegt in dieser Defini-

[1]) Liebknecht, S. 35 ff.
[2]) Ibid. S. 95.
[3]) Daß aber auch der eigentliche Schulunterricht in vielen Fällen die Länderbeschreibung gegenüber den geometrisch-astronomischen Grundlehren zurücktreten ließ, geht aus den von Kropatschek (Verhandl. d. I. deutschen Geographentages, Berlin 1882. S. 117 ff.) gesammelten Notizen unzweifelhaft hervor. Als autonomen Lehrgegenstand findet derselbe die Geographie zuerst (?) in Düsseldorf angeführt, allein dasjenige, was der dortige Rektor Monheim 1566 seinen Schülern zu lehren angewiesen wurde,

tion, die wir allerdings nicht wörtlich, sondern nur dem Sinne nach bei den Vertretern der Hochschularistokratie vorfinden, ein entschiedener Rückschritt gegen Varenius, der sich die Dinge von einer viel höheren Warte aus betrachtete. Aber mit dieser Ueberspannung eines dem Grundgedanken nach ja ganz richtigen Prinzipes war auch zugleich eine Wendung zum Besseren vorbereitet, die sich dann gegen die Mitte des in Rede stehenden Jahrhunderts hin nach und nach zu vollziehen beginnt [1]).

Die Niederländer. Die Niederlande übernehmen, wie sie in der Begründung einer wissenschaftlichen Navigationslehre und einer exakten Kartographie sich an die Spitze gestellt hatten, so auch im vorliegenden Falle den Vortritt, und es hat auch nichts Ueberraschendes, dass die aus allen Teilen des Erdkreises in diesem auch politisch glücklich situierten Staate zusammenlaufenden geographischen Anregungen auf Theorie und Methodik nachwirkten [2]). Man griff auf Varenius zurück und schied aus dem Gesamtumfange der Geographie mit klarem

---

waren „prima Geographiae et Astronomiae momenta", und daß bei dieser Verkuppelung zweier Lehrgegenstände der erstere zu kurz gekommen sein wird, erscheint uns nur allzu glaublich. Zudem waren für den Unterricht nur „lectiones extraordinariae" angesetzt, und damit war der ganzen Sache eine ähnliche untergeordnete Stellung angewiesen, wie in den Pädagogien von Corbach und Gröningen, wo „Sphaerik und Geographie" vorgetragen werden sollten, „wenn gerade Zeit und spezielle Veranlassung sich bietet". Eine dunkle Ahnung von dem Richtigen bekundet (Kropatschek, S. 120) Michael Neander, der bekannte Rektor von Eisleben, durch seine Aeußerung (1583), man könne die Erde φυσικῶς, ἐθνικῶς und πολιτικῶς betrachten, doch ist an eine Durchführung des richtigen Einfalles natürlich nicht zu denken. Anderwärts war dasjenige, was in einigen Schulen im Anschlusse an Sleidanus und Clüver durchgenommen worden zu sein scheint, im besten Falle nichts anderes als an der Hand der Karte betriebene Weltgeschichte.

[1]) Als ein anscheinend nicht weiter nachgeahmtes Beispiel irriger Deutung des Wortbegriffes haben wir Ricciolis „Geographia et Hydrographia reformata" (Bologna 1661) namhaft zu machen. Als ob zur γῆ nicht auch deren Gewässer gehörten!

[2]) Was oben angedeutet ist, findet man weiter ausgeführt in einer von sehr accentuiertem holländischem Patriotismus ge-

Bewußtsein *deren sämtliche mathematisch-naturwissenschaftliche Bestandteile* unter dem Namen *„Allgemeine Geographie“* aus. Der erste Niederländer, welcher in diesem Sinne in die Fußstapfen Varens trat, war der Amsterdamer Mathematiker Struyck, dessen kompendiarische Darstellung[1]) in der That Neues bietet und aus den ausgefahrenen Wegen der Ueberlieferung in eine völlig anders geartete Bahn einlenkt. Ziemlich rasch auf Struyck folgte dessen Landsmann Lulofs[2]), durch dessen Namen derjenige seines Vorgängers vielleicht mehr als billig in den Hintergrund gedrängt worden ist; zum Teile mag dies allerdings an der größeren Reichhaltigkeit und Uebersichtlichkeit des Lulofsschen Buches liegen, doch ist auch der gewichtige Umstand nicht zu unterschätzen, daß dasselbe sehr bald einer guten und sachlich sogar über das Original hinausgehenden deutschen Uebersetzung teilhaftig wurde[3]). Die sich im 18. Jahrhundert allmählich folgenden Werke Bergmans[4]), v. Mitterpachers[5]) und Bodes[6]) bewegen sich ausnahmslos in dem Geiste

---

tragenen Abhandlung Blinks: De Geographie als Wetenschap (Vragen des Tyds, 1886).

[1]) Struyck, Inleiding tot de allgemeene Geographie benevens eenige sterrekundige en andere Verhandelingen, Amsterdam 1740.

[2]) Lulofs, Inleidinge tot eene natuur- en wiskundige Beschouwing des Aardkloots, Leyden 1750. Sprachlich sei bemerkt, daß „Wiskonst“ die niederländische Germanisierung von Mathematik ist; das mathematisch-physikalische Element in dieser „Betrachtung des Erdballes“ ist sonach mit wünschenswertester Deutlichkeit betont.

[3]) J. Lulofs' Einleitung zur mathematischen und physikalischen Kenntnis der Erdkugel, deutsch von Kästner, Göttingen und Leipzig 1755.

[4]) Bergman, Physisk Beskrifning över Jordklot, Upsala 1766; Physikalische Beschreibung der Erdkugel, auf Veranlassung der kosmographischen Gesellschaft verfaßt von Bergman, aus dem Schwedischen übersetzt von Röhl, Greifswald 1791.

[5]) Mitterpacher v. Mitterburg, Physikalische Erdbeschreibung, Wien 1789.

[6]) Bode, Anleitung zur *allgemeinen* Kenntnis der Erdkugel, Berlin 1786. Das lesbare, nicht zu hohe Anforderungen an Vorbildung und Denkkraft des Lesers stellende Buch erlebte noch 1820 eine erweiterte Auflage.

der holländischen Vorarbeiten und dürfen ein besonderes Verdienst nur nach der sachlichen Seite (Bergman) oder wegen eines höheren Geschickes in der Popularisierung schwieriger Sätze (Bode) beanspruchen. In Deutschland fand damals allerdings die Bezeichnung der allgemeinen Erdkunde noch nicht denjenigen Beifall, der ihr späterhin zu teil wurde [1]; gleichwohl wird unser Leser nunmehr einsehen, wie wenig Lüdde mit der Behauptung [2] im Rechte ist, es entstamme die fragliche Bezeichnung erst dem neuen Jahrhundert und sei erstmalig von Rühs gebraucht worden [3]. Für die Schule freilich, und zwar sowohl für die elementare wie das Gymnasium, war der in den Kreisen der eigentlichen Fachgelehrten so wohlthätig wirkende Fortschritt zunächst noch ohne alle Folgen geblieben; im Gegenteile, während man zuvor in ein paar geometrischen und astronomischen Erklärungen das wahre Wesen der Geographie erblickt hatte, ließ man sich allgemach von der wahren Basis derselben immer weiter abdrängen und näherte sich der ebenso weit verbreiteten, wie von unglaublicher Kurzsichtigkeit zeugenden Ansicht, daß die Erdkunde nur in ihrer Eigenschaft als „dienende Magd der Geschichte" für den Pädagogen einen Gegenstand des Interesses bilde [4]. Bezeichnend ist hierfür der

[1]) Eine ziemlich absonderliche Einteilung ist die im „Abriß der Geographie" (Göttingen 1775) des bekannten Gatterer enthaltene. Danach setzt sich die Geographie zusammen aus *Grenzkunde, Länderkunde, Staatenkunde* und *Ethnographie*, und zwar zerfällt die Grenzkunde wieder in einen mathematischen und physikalischen Teil. Tiefer gründet die letztere Zerfällung freilich nicht, das angeblich Physikalische läuft vielfach nur auf ein bloßes Spiel mit Worten („Bergmeridian" und „Bergparallel") hinaus.

[2]) Lüdde, Gesch. d. Method., S. 42 ff. Bodes Buchtitel (s. o.) hätte doch dem Verfasser eines geschichtlich-methodischen Werkes nicht unbekannt bleiben sollen.

[3]) Rühs, Entwurf einer Propädeutik des historischen Studiums, Berlin 1811. S. 96 ff.

[4]) Auch über diese Periode findet man in dem uns schon bekannten Vortrage Kropatscheks einige dankenswerte Nachweisungen. Durch Hübners 1693 zuerst erschienene „Kurze Fragen aus der alten und neuen Geographie" war die Sitte, dem Lernenden einfach eine Masse von Daten aus der politischen Geographie darzubieten, in den Schulen heimisch geworden, und Büsching

folgende Satz: „Es ist der Endzweck der Geographie, von der gegenwärtigen Verfassung der Erde nicht nur in Anschauung der natürlichen Grenzen, sondern auch deren politischen Reichen Nachricht zu geben, so daß diejenige Methode die beste ist, nach welcher man den *gegenwärtigen* Zustand der Erde und die neuesten Veränderungen erkennen kann.“ Wenn ein sonst klarer Kopf wie Hauber eine solche Erklärung gibt, ohne zu bemerken [1]), daß die durch Kriege und Verträge bestimmten Grenzlinien der Staaten etwas rein Historisches, für die Erdkunde dagegen absolut Zufälliges sind, so darf man sich nicht wundern, daß das große Heer der Lehrbuchschreiber niederer Ordnung in statistischen Trivialitäten das A und O geographischer Thätigkeit erblickte.

Die Dreiteilung der Erdkunde angebahnt. So steht denn von 1740 an die allgemeine oder mathematisch-physikalische Geographie [2]) der deskriptiven ohne jedes vermittelnde Glied gegenüber; die Vertreter der ersteren sind Mathematiker und Naturforscher, die Länder- und Völkerkunde entbehrt eines strenge wissenschaftlichen Charakters beinahe gänzlich. Kants achtungswerter Versuch, die physische Erdkunde auch durch einen anthropogeographisch-ethnologischen Bestandteil zu bereichern [3]), steht ziemlich isoliert da. Erst in der zweiten Hälfte des Jahr-

---

mit seinen Nachfolgern hielt im wesentlichen auch einseitig am statistischen Standpunkte fest. Die weiter oben bereits angeführte Disputation von Leyser wendet sich gegen Hübner und dringt darauf, nich bloß Länder- und Staatsverfassungen, sondern auch Berge, Thäler, Flüsse u. s. w. zu beschreiben.

[1]) Kropatschek, S. 125.

[2]) Gelegentlich kommt natürlich auch noch das Wort „Geographie“ in der alten (ptolemäischen) Bedeutung vor, so z. B. bei Maupertuis: Elémens de la géographie, Paris 1742.

[3]) Der dritte Abschnitt der „Vorlesungen über physische Geographie“ (S. 697 ff. der Schubertschen Gesamtausgabe) widmet sich der Völkerkunde, die mit den sehr wenig bezeichnenden Worten „Summarische Betrachtung der vornehmsten Naturmerkwürdigkeiten aller Länder nach geographischer Ordnung“ eingeführt wird und in ihrem anekdotenhaften Wesen sicherlich den schwächsten Teil des ganzen Cyklus bildet.

hunderts beginnt man den Besitzstand wieder zu revidieren und allmählich einzusehen, daß eine *Dreiteilung* des Faches den thatsächlichen Verhältnissen am besten entsprechen würde; damit aber erhält auch die *mathematische Geographie* als solche, auch unabhängig von der bisher mit ihr verschmolzenen physischen, ihr Bürgerrecht als *selbständiges Grenzgebiet der Mathematik und Geographie.* Daß das früher der deutschen Sprache fremde Wort „*Erdkunde*" um diese Zeit zuerst hervortritt [1]), darf gewiss gleichfalls als ein Symptom der Vertiefung gelten: man wollte nicht mehr bloß *beschreiben*, sondern auch innere Zusammenhänge *erkunden* lernen.

Die physische Geographie bei Kant wird noch mit einem mathematisch-geographischen Kapitel eingeleitet, das in Lichtenbergs berühmten Vorlesungen über die erstgenannte Disziplin bereits fast gänzlich verschwunden ist [2]). In Göttingen scheint man sich über die Begriffsbildung innerhalb der Geographie bereits völlig klar gewesen zu sein, Lichtenbergs Klassifikation stimmt fast auch im Wortlaute mit derjenigen Kästners überein, dessen Darlegung wir, weil in ihr die beste Bestätigung aller unserer bisherigen Behauptungen enthalten ist, vollinhaltlich hierher setzen wollen [3]). „Die *mathematische Geographie* betrachtet, was bey der Erde einer Ausmessung fähig ist. Man pflegt sie zuweilen die *allgemeine* zu nennen, unter welchem Nahmen man aber auch die *physische Geographie* mit begreift, und beyde zusammen der *politischen* entgegensetzt." Auf einem Buchtitel hat, soweit wir zur Zeit sehen können, wiederum als einer der ersten Kästner die „mathematische Geo-

---

1) Diese Bemerkung ist von Ruge (Aus der Sturm- und Drangperiode der Geographie, Zeitschr. f. wissensch. Geogr., 5. Jahrgang, S. 249) gemacht worden.

2) In Gamaufs „Erinnerungen aus Lichtenbergs Vorlesungen über die physikalische Geographie" (Wien und Triest 1818) nimmt die Erläuterung der wichtigsten mathematisch-geographischen Fundamentalbegriffe 2 Seiten von 414 in Beschlag!

3) Kästner, Anfangsgründe der angewandten Mathematik, 2. Teil, Göttingen 1781. S. 327.

graphie" vereinigt [1]). Auch die Nichtmathematiker bequemten sich der von den Vertretern der exakten Wissenschaften aufgestellten Begriffsscheidung an. An der Spitze dieser Geographen im engeren Sinne steht Gaspari, der sogar ein methodologisches Schriftchen im Sinne der neuen Einteilung schrieb [2]) und sein großes Lehrbuch durch eine ganz entsprechend gehaltene Erklärung eröffnete [3]). Und diese Auffassung ist dann lange Zeit die maßgebende geblieben, obwohl andere Versuche, der oft ventilierten

---

[1]) Wir meinen hier die „Weitere Ausführung der mathematischen Geographie" (Göttingen 1795), eine von uns später noch öfters zu erwähnende Schrift. Positiv zum erstenmal scheint G. W. Krafts „Kurze Einleitung zur mathematischen Geographie" (St. Petersburg 1738) diese Aufschrift zu führen. Im allgemeinen weiß man zwischen dem, was wir heute so nennen, und dem, was an mathematischen Hilfslehren in der physischen Geographie zur Verwendung kommt, noch keinen rechten Unterschied zu machen, wie nachstehende Aufschrift beweist: Mallet, Allgemeine oder mathematische Beschreibung der Erdkugel, aus dem Schwedischen übersetzt von Röhl, Greifswald 1774. Bald darauf erscheint ein kleines Lehrbuch von Pfennig: Anleitung zur mathematischen Erdbeschreibung, Berlin 1779; in mehr gemeinfaßlicher Form sucht den Stoff zu verarbeiten A. G. Walch: Ausführliche mathematische Geographie, ein Lesebuch für die Jugend, Göttingen 1783. Ein uns sonst nicht wieder vorgekommenes Synonym für mathematische Erdkunde begegnet uns bei Kautsch: Geographia practica, Kalisch 1784; Ad Geographiam practicam supplementa, Leipzig 1800.

[2]) Gaspari, Ueber den methodischen Unterricht in der Geographie, Weimar 1791.

[3]) Gaspari, Lehrbuch der Erdbeschreibung, 2. Kursus, Weimar 1819. S. 1. „Die Erde kann bloß als ein großer Körper, als ein Teil der Welt, als ein Gegenstand der Meßkunde, d. i. in Rücksicht auf alles das, was an und bei ihr, als einem Körper, meßbar ist, betrachtet werden: dies geschieht in der *mathematischen Geographie.* Oder man richtet seine Aufmerksamkeit insbesondere auf die natürliche Beschaffenheit der Erde: dies ist *physische Geographie.* Oder endlich, man betrachtet die Erde als einen Wohnplatz vernünftiger Geschöpfe, welche die Erdoberfläche unter sich geteilt haben, und die in Gesellschaften, in Staaten, leben. Dies ist die *politische Geographie,* die man auch unter dem bloßen Namen *Geographie* gemeiniglich verstehet." Der gewaltige Umschwung, welcher sich im Laufe des „didaktischen" Jahrhunderts vollzogen hatte, tritt hier klar zu Tage: Für Liebknecht, v. Wolf, Maupertuis bedeutete der „bloße Name Geographie" noch eine ganz exakte Disziplin, für Gaspari bereits eine statistisch-erzählende. Man

Angelegenheit eine neue Seite abzugewinnen, daneben herliefen [1]). Die pädagogische Schule Pestalozzis glaubte, wie wir aus einer Programmschrift von Henning [2]) erfahren, mathematische, physische, topische, politische und historische Erdkunde unterscheiden zu sollen, was sich denn auch ganz gut rechtfertigen ließe. Auch wird hierdurch die Richtigkeit der These nicht alteriert, in welcher wir nunmehr die Ergebnisse unserer retrospektiven Betrachtungen zusammenfassen [3]):

Als das gegenwärtige Jahrhundert begann, galt bei der Mehrzahl der kompetenten Fachmänner, sei es, dass sie von der Seite der Naturwissenschaften oder von der Seite der Geisteswissenschaften her an die Methodik der Geographie herangetreten waren, die Einteilung in drei fundamentale Unterabteilungen als feststehend: in eine mathematische, in eine naturwissenschaftliche und in eine beschreibend-geschichtliche. Wurde letztere die politische genannt, so lag im Grunde eine Verwechslung des Teiles mit dem Ganzen vor.

Mathematische Geographie als selbständiger Wissenszweig. Im laufenden Jahrhundert waren die Dinge in der Hauptsache ähnlich gelagert. Die mathematische Geographie wird als selbständiger Lehrgegenstand in einer

---

ist auf diese rapide Begriffsumbildung bisher viel zu wenig aufmerksam gewesen; nicht leicht in einer anderen Wissenschaft dürfte sich jemals etwas Aehnliches ereignet haben.

[1]) Bei Lüdde (Gesch. d. Method., S 20 ff.) sind solche Versuche besprochen. Ein gewisser C. Lindner ging (Guthsmuths Zeitschr. f. Pädagogik, 1806. S. 270 ff.) wieder ganz auf Ptolemäus zurück und definierte: „Die Geographie fragt, *wo* ist dieser und jener Ort?“ Das nämliche Journal enthält auch (a. a. O., S. 198 ff.) eine methodologische Jugendarbeit C. Ritters; in seinem Systeme tritt die „mathematische Erdbeschreibung“ sehr zurück. Rühle v. Lilienstern sprach der Geographie die Autonomie überhaupt ab und teilte ihre einzelnen Kapitel bezüglich der Astronomie, der Physik und Chemie, der Naturgeschichte und der „Historie im eigentlichen Sinne“ zu.

[2]) Henning, Ueber die Methode beim geographischen Unterrichte. Yverdun 1812.

[3]) Die durch H. v. Helmholtz in Aufnahme gebrachte Zerfällung des gesamten menschlichen Wissens in Natur- und Geisteswissenschaften darf hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

stetig wachsenden Menge größerer und kleinerer Lehrbücher abgehandelt, und es erscheint auch nicht leicht ein allgemein geographisches Werk, worin jener nicht ein einleitender Abschnitt gegönnt wäre. Gleichwohl kann man nicht behaupten, daß mit dieser äußerlichen Anerkennung der innere Ausbau, die fortschreitende Einsicht in die eigentlichen Ziele und Aufgaben der Wissenschaft gleichen Schritt gehalten habe. Gewöhnlich begnügt man sich, derselben die Betrachtung der kosmischen Stellung der Erde zuzuweisen, dieselbe als eine Art von Nachtrag zur eigentlichen Sternkunde hinzustellen, wie es beispielsweise seitens des bekannten dänischen Astronomen Bugge geschah [1]). Allein es ist leicht einzusehen, daß diese Anordnung erstens verschiedenartige Dinge zusammenwirft, die organisch nicht zusammen gehören, und daß zweitens für den Geographen wenigstens diese Abtrennung einer Disziplin aus dem Besitzstande der eigenen Wissenschaft etwas überaus Unbefriedigendes haben muß, obwohl ja zweifellos aus didaktischen Gründen eine Zusammenfassung an sich heterogenerer Dinge dringend geboten erscheinen kann. Prinzipielle methodische Aeußerungen treffen wir erst in der zweiten Hälfte unseres gegenwärtigen Jahrhunderts häufiger an. Dafür, wie die strenge mathematische Richtung, die Gauß inauguriert hat, die „mathematische Geographie" auffaßte und wie sie diese in engste Beziehung zur „physikalischen" gesetzt haben wollte, ist typisch das ausgezeichnete Werk [2]) von Ed. Schmidt, welches noch heute jedem Studierenden bestens anempfohlen werden kann. Doch wird darin gleich tüchtig in die eigentliche Facharbeit hineingegangen und auf die organische Stellung der behandelten Disziplin gerade kein besonderes Gewicht gelegt. Weit mehr leistet in dieser Beziehung der von Fröbel [3]) unternommene Versuch, die einzelnen

---

[1]) Bugge, Handbuch der Astronomie und mathematischen Geographie, deutsch von Tobiesen, Altona 1816.

[2]) Ed. Schmidt, Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie, Göttingen 1829—30.

[3]) Fröbel-Heer, Mitteilungen aus dem Gebiete der theoretischen Erdkunde, 1. (einziger) Band, Zürich 1836. Die stete Rück-

Teile der Erdkunde systematisch zu gliedern; leider scheint derselbe nicht zu allgemeinerer Beachtung durchgedrungen zu sein. Daran war wohl vorzugsweise der Umstand schuld, daß Carl Ritters schriftstellerisches Wirken das geographische Feld mit einer gewissen Ausschließlichkeit beherrschte. Seine Thätigkeit darf uns an diesem Orte nicht näher beschäftigen, sein Verhältnis zur mathematischen Erdkunde ist niemals ein irgendwie enges gewesen, und letztere wird auch keineswegs durch den nach seinem Tode entbrannten Streit über Wesen und Berechtigung der „vergleichenden Erdkunde" berührt.

Wir dürfen somit ohne Verzug über das Jahr 1850 hinaus- und in die neueste Zeit eingehen, welche uns allerdings ein ganz ungleich umfänglicheres Material für unsere methodologischen Untersuchungen zur Verfügung stellt. Absolute Vollständigkeit streben wir nicht an, doch dürften uns bemerkenswertere Meinungsäußerungen kaum entgangen sein [1]). Eine vorbereitende Bemerkung müssen wir jedoch noch machen. In den vierziger Jahren wurde die Bezeichnung *astronomische Geographie*, welche natürlich auch früher schon, z. B. bei A. v. Humboldt, nachzuweisen ist, durch den bekannten pädagogischen Schriftsteller Diesterweg (geb. 1790) in den Vordergrund geschoben, mehrere geachtete Autoren haben seitdem ihren Werken ebendiese Aufschrift gegeben, und es fehlt nicht an Stimmen, welche die gänzliche Beseitigung der „mathematischen" zu gunsten der „astronomischen" Geographie verlangen [2]). Wir persönlich können uns diesem Verlangen nicht anschließen. Allerdings sind

---

sichtnahme auf das geschichtlich Gewordene verleiht Fröbels Versuche einen um so höheren Wert, als derselbe der Zeit einer auf die Spitze getriebenen Konstruktion der Dinge a priori angehört.

[1]) Wenn dem wirklich so ist, so danken wir dies wesentlich den ebenso eingehenden wie extensiv vollständigen methodologischen Berichten H. Wagners im 7., 8., 9. und 10. Bande des „Geogr. Jahrbuches".

[2]) Zumal in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" sind wir diesem Wunsche zu wiederholten Malen begegnet.

es großenteils astronomische Operationen, welche zur Lösung der uns im folgenden beschäftigenden Aufgaben führen, aber erstens ist doch die Astronomie ganz unbestritten eine Spezialdisziplin der Mathematik, und zweitens sind sehr wohl Probleme denkbar, bei deren Erörterung jeder Appell an die Gestirne des Himmels und deren Bewegungen unterbleibt[1]). Darin liegt wohl eine ausreichende Rechtfertigung für den von uns eingehaltenen konservativen Standpunkt.

Die Stellung der mathematischen Geographie im Gesamtorganismus der Wissenschaft. Die Gesamtheit der Fachmänner, welche die Bedeutung der mathematischen Geographie für System und Studium der Erdkunde überhaupt einer Würdigung unterzogen haben, zerfallen in zwei große Klassen. *Die eine Klasse scheidet jene aus dem Organismus der Wissenschaft völlig aus und räumt ihr eine bloss propädeutische Stellung im Vorhofe ein, die andere dagegen sieht in derselben ein absolut notwendiges, keinem anderen an Rang und Wichtigkeit für das Ganze nachstehendes Glied des Wissenschaftskörpers.* Wir selbst rechnen uns rückhaltslos der zweiten Kategorie zu, können uns aber dadurch nicht der Verpflichtung überhoben erachten, die von den Vertretern der gegenteiligen Ansicht vorgebrachten Gründe kennen zu lernen und zu prüfen.

Wir beginnen mit einem der entschiedensten Verfechter der anthropogeographischen Doktrin, mit Wappäus, einem die Eigenart des Meisters nicht verleugnenden Schüler Carl Ritters, und mit seiner Behauptung[2]),

---

[1]) Als Beispiel sei folgendes aufgeführt: In einem loxodromischen Dreieck ABC, dessen sphärische Seiten AB und AC vom Erdpole A ausgehen, kennt man außer den geographischen Koordinaten von B auch den Kurswinkel und die Weglänge BC; dann können die Länge und Breite des Punktes C durch bloße Rechnung ermittelt werden. Selbst also da, wo es auf geographische Ortsbestimmung ankommt, ist zwar stets Mathematik, nicht aber stets Astronomie von nöten. Desgleichen fehlt letztere auch bei der telegraphischen Zeitübertragung.

[2]) Wappäus, Handbuch der Geographie und Statistik, Göttingen 1855.

Zweck der wissenschaftlichen Erdkunde sei „die Erkenntnis der Erde in ihren Beziehungen zur Natur und zur Geschichte, d. h. insofern sie den Grund und Boden alles Lebens und den Schauplatz für die Entwicklung des Menschengeschlechtes bildet". Eine solche Auffassung kann dem exakten Elemente freilich keinen anderen Platz als etwa den ziemlich untergeordneten einräumen, der sich aus seiner Unentbehrlichkeit für statistische Arbeit von selbst ergibt. Aehnlich Guthe, der in der Vorrede zu seinem bekannten — seitdem mehrmals von H. Wagner überarbeiteten — Lehrbuche der Geographie die uns von früher her, z. B. von Kästner und Gaspari, erinnerliche Trichotomie zwar anführt, mathematische und physikalische Geographie jedoch nur als Hilfswissenschaften der *„eigentlichen"* Geographie betrachtet wissen will [1]. Minder prägnant spricht sich Ruge [2]) aus, doch bekennt auch er sich zu der Anschauung, daß die Beziehungen zwischen der mathematischen und der übrigen Erdkunde mehr nur äußerliche seien. Durchaus in seinem guten Rechte ist dieser Geograph, wenn er die Astrognosie und die Beschäftigung mit den kleinen Planeten aus seiner Wissenschaft verbannt, dergleichen hat in der That mit der γῆ nicht das Mindeste zu thun und belastet nur das ohnehin wahrlich schon reich genug bemessene Pensum unserer Wissenschaft. Dagegen sehen wir uns veranlaßt, gegen einige der erwähnten Vermehrung vorhergehende Sätze zu protestieren, insbesondere gegen die nachstehend wiedergegebenen [3]). „Beide Fächer, Mathematik und Astronomie, sind die ersten und wichtigsten Hilfswissenschaften für die Erdkunde, um, was das Ziel dieses

[1]) Geographisches Jahrbuch, 7. Band, S. 604. Guthes Programm muß den befremden, der weiß, daß dieser hochverdiente Geograph von der Mathematik her zu der Wissenschaft übergetreten ist, welche seinen Namen berühmt machen sollte.

[2]) Ruge, Das Verhältnis der Erdkunde zu den verwandten Wissenschaften, Dresden 1874.

[3]) Ibid. S. 6 ff. Es hat uns gefreut, zu sehen, daß wir in diesem Punkte mit H. Wagner vollkommen übereinstimmen, welcher sich (a. a. O., S. 624) wie folgt äußert: „Hier wollen wir nur gleich ein Bedenken gegen die Ansicht einschalten, daß uns die Astronomie

Zweiges der Geographie ist, der Erde ihre Stellung im und zum Weltall anzuweisen. Sie nimmt die von dieser Seite gebotenen Resultate ebenso fest und rückhaltslos an, wie der Historiker beglaubigte Dokumente." Wir würden es nicht für ein Glück halten, wenn letzteres durchgängig der Fall wäre; wir verlangen zwar gewiß nicht von jedem Geographen, daß er selbst regelmäßig eine solche Prüfung vorzunehmen gewillt und befähigt sei, dafür haben wir eine viel zu hohe Meinung von dem Werte der Arbeitsteilung auch auf diesem Arbeitsfelde — wohl aber dünkt es uns unbedingt geboten, daß *Geographen* vorhanden sind, welche sich der selbständigen Prüfung mathematisch-geographischer Fragen zu unterziehen vermögen, und dazu, solche Geographen heranzubilden, soll eben auch das vorliegende Werk seinen Beitrag leisten. Nicht viel verschieden von Ruges Auffassung ist diejenige des Dänen Löffler[1]). Derselbe glaubt übrigens nicht bloß gegen die Astronomie, sondern auch gegen die Geschichte „Front machen" zu müssen, ein Ausdruck, der uns nicht anmutet, weil wir die Grenzregulierungen zwischen den einzelnen Abzweigungen des menschlichen Wissens lieber auf friedliche Weise vollzogen wünschen. Wenn Löffler „ein spezielleres Studium des Universums mit seinen Himmelskörpern und Kreisbewegungen" als ungeographisch von sich abweist, so kann man ihm ja bis zu einem gewissen Grade beipflichten; die Frage wird nur sein, wo das „speziellere" Studium anfängt, und da möchten wir allerdings vor engherziger Umhegung des Gebietes der Geographie sehr dringend warnen. Wir werden ja weiter unten sehen, daß ohne eine tiefere Kenntnis gewisser astronomischer Vorgänge die Beschäftigung mit so mancher Frage, die wir wenigstens als eine echt geographische ansehen zu sollen glauben, zu den Unmöglichkeiten ge-

---

alles das Erdganze betreffende Material fertig lieferte. Ist dies nicht der Fall, so kann *keine andere Disziplin als die Erdkunde selbst* sich mit Festsetzung desselben befassen."

[1]) Löffler, Die Geographie und ihre Hilfswissenschaften, Zeitschr. f. wissenschaftl. Geographie, 2. Jahrgang. S. 1 ff.

hört. Auch die Koordinierung von Astronomie und Geschichte kommt uns unter dem philosophischen Gesichtspunkte unzulässig vor, denn wir können uns zwar recht gut eine Geographie ohne Geschichte, nicht aber ohne Astronomie denken.

Eine tiefer eingehende Untersuchung über die Geographie und ihre Gliederung ist von Ratzel [1]) angestellt worden. Mit Fug hebt derselbe hervor, daß jene philosophisch-architektonischen Betrachtungen, die in Frankreich ehedem so beliebt waren, der Erdkunde einen bestimmten Platz als Baustein im Aufbau alles menschlichen Wissens zwar anweisen, daß solche Klassifikationen jedoch den Beifall des Geographen nicht so leicht erwerben werden, denn bei solcher Prokrustesarbeit muß sich jede einzelne Wissenschaft Verrenkungen aller Art gefallen lassen, die den Fachmann nichts weniger als sympathisch berühren [2]). Ratzels eigene Auffassung, die allerdings mit Comtes Spaltung in „abstrakte" und „konkrete" Wissenschaften manches gemein hat, gemahnt sehr an die aus dem 18. Jahrhundert überkommene Dreiteilung, indem sie *physikalische* und *Anthropogeographie* als die beiden Hauptgruppen normiert; die erste der drei traditionellen Gruppen hat sich eine gewisse Rangerniedrigung gefallen lassen müssen und erscheint bei Ratzel als „mathematisch-astronomische Propädeutik, gewöhnlich als mathematische Geographie bezeichnet". Wenn wir es als Wesen eines propädeutischen Wissenszweiges betrachten,

[1]) Ratzel, Anthropogeographie oder Grundzüge der Anwendung der Erdkunde auf die Geschichte, Stuttgart 1882. S. 7 ff.

[2]) Es sind wesentlich d'Alembert, A. Comte und Cortambert, mit deren Systemen sich der selbst nach einheitlicher Gliederung der eigenen Wissenschaft ringende Fachmann abzufinden hat. Im ganzen kann bei den erwähnten Konstruktionen nicht allzuviel herauskommen, denn ein liebevolles Versenken ins Einzelne ist bei derlei großartigen Spekulationen von vornherein ausgeschlossen. Bekanntlich hat schon Gregor Reysch in seiner 1503 zuerst erschienenen „Margaritha Philosophica" den Anfang mit einer schematischen „Philosophiae partitio" gemacht, deren feine Subdivisionen den Spätscholastikern jener Zeit gewiß sehr willkommen waren, einen positiven Nutzen aber in keiner Weise gewähren.

daß wir uns mit ihm nicht um seiner selbst, sondern um der aus ihm entspringenden indirekten Vorteile willen beschäftigen, so erkennen wir sofort die Uebereinstimmung, welche bezüglich dieses Punktes zwischen Ratzel und v. Richthofen [1]) herrscht. Die „astronomische Geographie" ist letzterem zufolge für den Geographen nur Mittel, nicht Selbstzweck, aber freilich muß er mit dem Instrumente und seiner Handhabung vertraut sein, denn „daraus erwachsen hohe theoretische Probleme der reinen Geographie, welche sich auf die Beziehungen der Erscheinungen auf der Erdoberfläche zu der kosmischen Stellung des Planeten gründen und zu den wichtigsten und weittragendsten gehören." Bei einer späteren Gelegenheit läßt übrigens v. Richthofen durchblicken, daß er die propädeutische Stellung der mathematischen Geographie mehr als ein Kunstprodukt, resp. als etwas durch die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaft und die Spezialisierung ihrer einzelnen Zweige Herausgebildetes ansieht, daß er aber an und für sich der antiken Auffassung von der Superiorität des mathematischen Elementes gar nicht so fern steht. Die *eigentliche fundamentale* Aufgabe der Geographie, so meint er [2]), ist dem Geographen durch den *Geodäten* aus der Hand genommen worden, doch verbleibt dem ersteren noch immer die Verarbeitung des ihm durch seine Hilfsarbeiter gelieferten Materiales. Letzteres ist gewiß wahr, und wir glauben, daß es auch nicht schaden kann, wenn Geographie und Geodäsie sich recht innig durchdringen, wie sie es ja glücklicherweise auch in verschiedenen Epochen ihrer Geschichte und in so mancher hervorragenden Persönlichkeit thaten und noch thun. — Den Ansichten Ratzels verwandt sind auch diejenigen von Boas [3]), der in der Geographie eine physikalische und eine kosmographisch-historische Betrachtungsweise unterscheidet und, gewiß zu enge, alle Forscher als Geographen gelten lassen will, welche die

---

[1]) v. Richthofen, Aufgaben und Methoden der heutigen Geographie, Leipzig 1883.

[2]) Ibid. S. 26 ff.

[3]) Boas, The Study of Geography, Science, vol. IX. S. 137 ff.

Erscheinungen an der Erdoberfläche studieren. Das Prinzip der *Zweiteilung,* in welchem allerdings für die mathematische Geographie nicht der nach unserem Dafürhalten ihr gebührende Raum vorhanden wäre, scheint in neuerer Zeit auch in anderen Ländern sich Anhänger zu werben [1]), zumal in den Niederlanden.

Wir haben eine ganze Reihe niederländischer Schriftsteller namhaft zu machen, die den methodischen Fragen und dabei auch der Einordnung der mathematischen Erdkunde in das System ernste Teilnahme entgegenbringen. Voran steht Bos in Gröningen [2]), der in der Geographie eine Naturwissenschaft erkennt, nämlich einen Bestandteil der Geologie; die „sogenannte" mathematische Geographie jedoch habe keinen geologischen Inhalt und sei deshalb auszuschließen. Bos geht sehr radikal vor und stellt es sogar in Abrede, daß in wissenschaftlich-geographischen Werken von der Rotations- und Revolutionsbewegung der Erde, sowie von deren Begleiterscheinungen gehandelt werden dürfe. Uns scheint hier ein richtiger Schluß vorzuliegen, gezogen aus einer falschen Prämisse. Wenn wirklich der Erdkunde als solcher die Selbständigkeit abzusprechen ist, dann ist auch Bos im Rechte, wir

---

[1]) Für England ist auf Mackinders Note „On the Scrope and Methods of Geography" in den „Proceedings of the R. Geographical Society" (vol. IX. S. 141 ff.) zu verweisen.

[2]) Bos, De plaats der Aardrijskunde in het System der Wetenschappen, Gröningen 1872. Wir haben oben schon gesehen, daß die holländische Sprache die griechischen Wissenschaftsbezeichnungen gerne ablehnt und durch germanische ersetzt. So bedeutet „Aardkunde" nicht etwa das nämliche wie unsere Erdkunde, sondern einzig Geologie, und für Geographie ist das Wort „Aardrijkskunde" von der systematischen Terminologie angenommen worden. Von neueren Niederländern, welche auf Methodologie ihr Augenmerk gerichtet haben, ist vornämlich Timmermann (Over den Omvang der Natuurkundige Aardrijkskunde, Tijdschrift van het Nederl. Ardrijskund. Genootschap, (2) III. S. 374 ff.) zu nennen. Von den neun Bestandteilen, in welche er seine „naturwissenschaftliche", d. h. physische Geographie zerlegt, entfällt einer auf die „wiskundige", d. h. mathematische Erdkunde; Timmermanns Standpunkt gleicht sonach in dieser Beziehung demjenigen, welchen (s. u.) auch Beck betreffs der Einverleibung der mathematischen in die physikalische Geographie vertritt.

aber werden niemals die Degradation der ersteren zu einer bloßen geologischen Spezialdisziplin zugeben und damit hat auch die Beiseiteschiebung der mathematischen Geographie ihre Berechtigung eingebüßt. Die Neigung nach recht enger Begrenzung ihres Studiengebietes scheint unseren niederdeutschen Nachbarn gemeinsam zu sein, wenigstens sucht auch die schon von uns citierte Abhandlung Blinks, „De Geographie als Wetenschap“, in diesem Sinne Stimmung zu machen. Dieser Autor weist als einziges Untersuchungsobjekt der Geographie die Erdoberfläche nebst der an sie angrenzenden Atmosphäre zu und definiert diese sohin als eine rein naturhistorische Disziplin, welcher die Lehre von der kosmischen Bedeutung der Erde als Hilfswissenschaft voranzustellen sei. Gleichwie die „astronomische“ stehe auch die „politische“ Geographie zu dieser selbst nur in einem recht lockeren Verhältnisse, da auch die Völkerkunde im wissenschaftlichen Systeme nicht untergebracht werden könne, und so bleibe denn dem Fachgeographen nur die Beschäftigung mit Hydrographie, Klimatologie und Morphologie der festen Erdoberfläche. Wir haben keinen Grund, zu leugnen, daß uns diese Begrenzung des geographischen Arbeitsraumes einen sehr gezwungenen Eindruck macht — ein Glück nur, daß der Geograph diesem Gehege jeden Augenblick entrinnen kann, müßte er auch den Vorwurf gewärtigen, in seiner momentanen Thätigkeit das Blinksche System durchbrochen zu haben. Noch enger gezogen werden die Grenzlinien des geographischen Lehr- und Forschungsbereiches durch Kan[1], der die „selbständige Wirksamkeit des Geographen“ folgendermaßen fixiert[2]. Dieselbe besteht erstens im Studium der geographischen und kartographischen Litteratur, soweit sie nicht bereits die Domäne des Geophysikers, Biologen und Anthropologen bildet, zweitens im Studium der Erdober-

[1]) Diese Ansichten hat Kan ursprünglich in einer Besprechung der akademischen Antrittsrede v. Richthofens dargelegt; Ratzel nahm die Hauptbestandteile in einen seiner eigenen methodologischen Aufsätze auf (Ausland, 1884. S. 273 ff. S. 294 ff.).

[2]) Geographisches Jahrbuch, 10. Band. S. 631 ff.

fläche, zumal hinsichtlich des Bodenreliefs, der Stromsysteme und der Grundlagen der Verkehrslehre, drittens in der Mitwirkung zur Erreichung einer vollkommenen Kenntnis der Erde im kartographischen Sinne. Wir achten diese Selbstbeschränkung ebenso wie jedes andere redliche Streben, wir vermögen aber nicht abzusehen, welchen Zweck dieselbe erreichen soll. Eine gewisse Konzentration des Studiengebietes sollte für jeden Geographen — wie überhaupt für jeden Mitarbeiter im weiten Reiche der Wissenschaft — nur durch persönliche Neigung und richtige Abschätzung des eigenen Könnens, nicht jedoch durch irgendwelche aprioristische Normen herbeigeführt werden, die schließlich doch selbst wieder nur ein subjektives Gepräge an sich tragen können. Während wir uns jedoch mit den Tendenzen der drei holländischen Gelehrten, bei aller Gegensätzlichkeit der Meinungen, recht wohl innerhalb des uns allen gemeinsamen Rahmens abzufinden geneigt sind, fehlt uns allerdings jedwedes Verständnis für das Vorgehen Dozys, der die Gliederung der Erdkunde in eine mathematische, physikalische und historisch-ethnologische für absurd erklärt, dabei aber doch — man erinnere sich unseres an der Hand der Quellen geführten Nachweises für die allmähliche Entstehung dieser Dreiteilung — auf geschichtlichem Boden zu stehen vermeint [1]). Niemand ist verpflichtet, seine systematischen Anschauungen den Lehren der Geschichte anzupassen, obwohl wir selbst dies für das Zweckmäßigste halten, aber niemand sollte auch für die Rechtfertigung selbstgeschaffener Paradoxen sich auf jene große Lehrmeisterin berufen, ohne triftige urkundliche Belege zur Hand zu haben!

Hiermit wäre denn der ersten Kategorie der auf die mathematische Geographie überhaupt Bedacht nehmenden Methodiker ihr Recht widerfahren; wir wissen jetzt, weshalb

---

[1]) Von Dozy war früher unter dem Titel „Aardrijkskundig Weekblad“ eine Zeitschrift herausgegeben worden, welche sich jedoch nicht zu behaupten vermögend war. Eine französische Uebersetzung des in Rede stehenden Artikels brachte Jahrgang 1881 der „Revue de géographie“.

unserer Disziplin mehrfach bloß eine Pförtnerstellung an den Vorhöfen der eigentlich geographischen Wissenschaft eingeräumt wird. Ehe wir jedoch auch der zweiten Kategorie uns zuwenden, erscheint es angezeigt, gewisse vermittelnde oder transitorische Ansichten einer kurzen Besprechung zu unterziehen. Indem der Engländer Markham [1]) den naturwissenschaftlichen Charakter der Erdkunde scharf betont und ihr Gebiet gegen die benachbarten Wissensgebiete abzugrenzen unternimmt, kommt er auch auf deren mathematische Seite zu sprechen, legt großes Gewicht auf die Mappierungsarbeit des Geodäten, scheint aber darüber nicht zu voller Klarheit gelangt zu sein, ob die Präparierung des „geographischen Skelettes" für sich schon eine geographische oder nur eine vorbereitende Beschäftigung sei. Ein dem von Markham angestrebten ähnliches Ziel verfolgt Strachey [2]), der die Darstellung unserer Kenntnisse von Gestalt und Größe der Erde gemäß ihrer historischen Entwicklung zwar nicht der physischen Erdkunde, in der er die Quintessenz des Ganzen erblickt, direkt zurechnen, aber doch neben letztere als gleichberechtigt stellen will. Auch C. Neumanns „allgemeine physikalische Geographie" [3]) werden wir wohl am besten in diese Rubrik mit hereinnehmen. Sie umfaßte in dem Vorlesungscyklus des viel zu wenig gewürdigten Breslauer Geographen vier Hauptabschnitte, und der erste derselben hatte es mit der Betrachtung der Erde als Weltkörper zu thun, d. h. also, um in unserer Sprache zu reden, mit mathematischer Erdkunde.

---

[1]) Markham, On the position which Geography holds relatively with reference to the other sciences and positively as a distinct body of knowledge with defined limits, Proceedings of the R. Geogr. Soc., 1879. S. 602 ff. S. 675 ff.

[2]) Strachey, On the Scrope of Scientific Geography, ibid. 1872. S. 443 ff.

[3]) Trotz mancher Anregung war Neumann selbst nie dazu zu bewegen, seine Vorlesungen zu veröffentlichen, doch wird, wenigstens was die prinzipielle Seite derselben anbelangt, die Lücke durch den mit hingebender Pietät geschriebenen Nekrolog von Partsch (Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin, 17. Band. S. 81 ff.) ausgefüllt.

Die Gegenüberstellung von *allgemeiner* und *spezieller* Erdkunde, wie sie einen der Grundzüge des Neumannschen Systems bildet, entspricht — zumal auch in ihren Motiven — ganz und gar unseren eigenen Ueberzeugungen und soll deshalb wenigstens in einer Randnote [1]) wiedergegeben werden. Allerdings geben wir der Teilung der allgemeinen Erdkunde den Vorzug, allein der Uebergang von der Zweiteilung zur Dreiteilung der Gesamtwissenschaft erscheint uns auch als ein sehr natürlicher, leicht zu vollziehender.

Vor Uebertreibungen hat man sich dabei allerdings in acht zu nehmen. Dahin aber rechnen wir den von Bertacchi [2]) schon mehrfach in der Presse vertretenen Vorschlag, die Erdkunde gemäß ihrer Scheidung in drei Untergruppen vollkommen auseinander zu reißen. Die mathematische, historische und physikalische Geographie — mit welchem Rechte ist einzig die letztere eine „geografia scientifica“? — sollen je einen besonderen Lehrstuhl, aber jeweils in einer anderen Fakultät und sogar in einer anderen Universitätsstadt erhalten, so daß mithin ein Studierender, der sich in Turin die nötige Vor-

---

[1]) Ibid. S. 101. „Die allgemeine Geographie ist die unerläßliche Propädeutik für jedes spezielle geographische Studium. Sie wirft Licht auf alle einzelnen Abschnitte der Spezialgeographie, lehrt die Einzelnheiten derselben in ihrem wahren Werte, ihren Ursachen, ihrem Zusammenhange erkennen. Hierdurch wird für die beiden Disziplinen eine verschiedene Behandlungsweise bedingt. Die spezielle Geographie hat einen vorwiegend *deskriptiven* Charakter, und wo sie in das philosophische Gebiet hinübergreift, verfolgt sie die Richtung, die *Wirkung* der natürlichen Gegebenheiten auf Kultur und Geschichte der einzelnen Länder auseinanderzusetzen. Die allgemeine Geographie ist vorwiegend *explikativ*, sie erörtert die *Ursachen* der natürlichen Gegebenheiten und erläutert die allgemeinen Naturgesetze, durch die sie bedingt werden; das rerum cognoscere causas ist ihre Devise.“ Eine Kommentierung dieser markigen Sätze würde nur dazu dienen, deren Eindruck abzuschwächen.

[2]) Vgl. die beiden Schriften des genannten Geographen: La geografia nel insegnamento, Turin 1885; Note Geografiche, Saggi scientifici popolari sulle questione più agitate in varii campi della geografia fisica, esploratrice, storica e descrittiva, ibid. 1887. Letzteres ist ein ziemlich umfängliches Buch, von dem hier nur das erste Hauptstück in Betracht kommt.

bildung an mathematischer Geographie erworben, seine Studien in Rom fortzusetzen hätte. Das heißt denn doch das *einheitliche Element* in der Erdkunde sehr gering achten! Eine Uebertreibung nennen wir es ferner, wenn man zu dem im Beginne dieser Einleitung genügend gekennzeichneten antik-ptolemäischen Standpunkte zurückkehren und neben der mathematischen Behandlungsweise keine andere als vollberechtigt zulassen will. Dieser Rückfall ist in der neueren Litteratur keine häufige Erscheinung; wir können sogar, strenge genommen, nur den einzigen Cramer[1]) als einen Autor bezeichnen, der die Erdkunde als rein mathematische Disziplin definieren und ihr exklusiv das Studium geometrischer *Formen* zuteilen möchte.

Wohl einer der ersten unter den neueren Geographen, welche die Autonomie der mathematischen Geographie *innerhalb* des Rahmens der Gesamtgeographie postulierten, ist Supan[2]) gewesen. Dronke[3]) zerfällt die „allgemeine" Erdkunde in drei Unterabteilungen von analoger Stellung zum ganzen, nämlich in mathematisch-astronomische und physikalische Erdkunde, sowie Geographie der Organismen[4]). Anscheinend dichotomisch, in Wirklichkeit trichotomisch ist auch das System Reiters[5]), gegen dessen einzelne Aufstellungen wir zwar manches

---

[1]) Cramer, Streifzüge auf dem Gebiete der Geographie und des geographischen Unterrichtes, Zentralorgan für die Interessen des Realschulwesens, 1880.

[2]) Supan, Ueber den Begriff und Inhalt der geographischen Wissenschaft und die Grenzen ihres Gebietes, Mitteil. d. k. k. geogr. Ges. zu Wien, 1876. S. 54 ff.

[3]) Dronke, Die Geographie als Wissenschaft und in der Schule, Bonn 1885.

[4]) Wenn man, woran die Mehrzahl der Fachmänner nicht im mindesten Anstoß nimmt, die biologische Geographie der physikalischen als Spezialkapitel zurechnet, so kommt Dronkes Standpunkt ganz auf den gleich nachher gekennzeichneten Matzats hinaus.

[5]) Das Reitersche „System der Erdkunde" ist als Anhang einer anderen Schrift dieses Autors beigegeben (Die Konsolidation der Physiognomik, als Versuch einer Oekologie der Gewächse, Graz 1885).

einzuwenden hätten, das aber doch immerhin der mathematischen Erdkunde den Rang läßt, welchen wir für diese in Anspruch nehmen zu müssen glauben. Sehr anziehend ist für uns die von Matzat[1]) durchgeführte Stoffgruppierung; dieselbe ist ebenfalls nur bedingt trichotomisch, scheint uns aber, wie das nachstehende Schema darthut, die unterzubringenden Thatsachen sehr gut darzustellen.

I. Mathematische Geographie. II.
A. Physikalische — Geographie — B. Statistische.

Ohne in bestimmte Vorschläge hinsichtlich der Klassifikation sich einzulassen, erörtert Marinelli[2]) in vortrefflicher Weise die unendlich mannigfaltigen Wechselbeziehungen zwischen der Geographie und den mathematischen Wissenschaften und vindiziert damit der mathematischen Erdkunde ihre hervorragende Stellung im Organismus der geographischen Disziplinen. Hier wäre wohl noch manche methodologische Arbeit zu verzeichnen, die in verdienstvoller Weise das Material zur Beurteilung der obschwebenden Fragen vermehrt und gesichtet hat[3]), allein für uns verbietet sich ein meritorisches Eingehen auf die-

---

[1]) Matzat, Methodik des geographischen Unterrichtes, Berlin 1885.

[2]) Marinelli, Della geografia scientifica e di alcuni suoi nessi collo sviluppo degli studî astronomici e geografici, Rom 1879. Der hier erwähnte Vortrag wurde vom Verfasser beim Antreten seines geographischen Lehramtes an der Universität Padua gehalten. In der Hereinziehung von Theorien der Astronomie und Kosmologie ins Bereich der Geographie geht Marinelli weiter als die Mehrzahl seiner Fachgenossen.

[3]) Hierher gehört u. a. Marthes Abhandlung „Ueber Begriff, Ziel und Methode der Geographie“ (Zeitschr. d. Ges. f. Erdk. zu Berlin, 12. Band. S. 422), welcher Wagner, als einem der durchdachtesten modernen Beiträge zur geographischen Prinzipienlehre, eine sehr gründliche Analyse widmet (Geogr. Jahrbuch, 7. Band. S. 623 ff.). Die drei *Stufen*, welche Marthe stipuliert, decken sich nicht entfernt mit den oben erwähnten drei Gruppen, doch läßt auch diese Anordnung in der die erste Stufe kennzeichnenden „Kenntnis der realen Beschaffenheit der Erdoberfläche“ unserer Spezialdisziplin ihr Recht widerfahren. — Nur ganz mittelbar berührt uns hier auch das ideenreiche Schriftchen L. C. Becks: Die Aufgaben der Geographie mit Berücksichtigung der Handelsgeographie, Stuttgart 1884. Beck scheint (S. 15 ff.) geneigt, die

selben, weil die mathematische Geographie nicht besonders berücksichtigt wird.

Weitaus am engsten mit unseren eigenen Anschauungen berühren sich diejenigen, welche unlängst erst G. Gerland in geistvoller, an scharfen Pointen nicht armer Darstellung an die Spitze eines unter seiner Leitung herauskommenden periodischen Organes gestellt hat[1]). Von der *Geschichte der Geographie* in ihrer eigenartigen Position zunächst absehend, scheidet diese Klassifikation als die einander äquivalenten Unterdisziplinen der Wissenschaft die folgenden aus:

1. *Mathematische Geographie;*
2. *Geophysik oder Physikalische Geographie;*
3. *Spezielle Länderkunde;*
4. *Geographie der Organismen.*

Zu dieser vierten Klasse ist jedoch nach dem ausdrücklichen Ausspruche Gerlands die Lehre von der geographischen Bedingtheit des Menschen, die *Ethnologie,* nicht zu rechnen; im Einverständnisse mit C. Neumann will er diesen Wissenszweig aus der Erdkunde ganz entfernt wissen, und auch der Anthropogeographie im Sinne Ratzels soll eine solche exterritoriale Stellung zugewiesen werden. Diesen radikalen Standpunkt vermögen wir uns, soviel Anziehendes auch für uns erwähntermaßen das Gerlandsche System besitzt, *nicht* anzueignen, ebenso-

---

mathematische Erdkunde gänzlich in der von ihm allerdings mit einem höchst umfassenden Programme ausgestatteten „Geophysik" aufgehen zu lassen.

[1]) Beiträge zur Geophysik, herausgegeben von G. Gerland, 1. Band, Stuttgart 1887. Gerland hebt unter den älteren Werken, deren Grundtendenz mit der ihn selbst leitenden übereinstimme und nicht ohne Einfluß auf seine eigene Systembildung gewesen sei, hauptsächlich Studers „Lehrbuch der physikalischen Geographie und Geologie" (Bern 1844—47) hervor, welchem ein von gleichem Geiste beseeltes und noch jetzt schätzenswertes „Lehrbuch der mathematischen Geographie" (Bern 1836, 1842) den Weg gebahnt hatte. In der That würde Studer unser rückhaltslos anzuerkennendes Vorbild sein, wenn er nicht durch eine unglückliche und mit seiner sonstigen Denkweise schwer vereinbaren Trennung der physikalischen Geographie von der „Geologie" selbst an seiner Basis gerüttelt hätte.

wenig möchten wir die Selbständigkeit der vierten Abteilung aufrecht erhalten, vielmehr weisen wir Pflanzen- und Tiergeographie, soweit es sich um *beschreibende Thätigkeit* handelt, der dritten, sofern es auf *Erklärung der thatsächlichen Wahrnehmungen* ankommt, der zweiten Abteilung zu. Außerdem gestatten wir uns noch die Vertauschung der zweiten und dritten Abteilung, und zwar aus Gründen, zu deren Darlegung, mit welcher auch unsere eigene Auffassung der methodologischen Grundfragen verknüpft ist, wir uns nunmehr wenden wollen.

Scharfe Begriffsbestimmungen für die drei Hauptteile der Geographie. Die Erdkunde, dieses Wort in seiner größten Allgemeinheit genommen, stellt für jede einzelne Stelle unseres Planeten drei Fragen: *Wo befindet sich diese Stelle? Wie ist diese Stelle beschaffen? Weshalb ist die Beschaffenheit der Stelle gerade eben die an ihr soeben konstatierte?* Auf das *Wo?* gibt die *mathematische Geographie*, auf das *Wie?* die *Länder- und Völkerkunde*, auf das *Weshalb?* endlich die von uns vollständig mit der „Geophysik“ identifizierte *physikalische Geographie* Auskunft. Kein geographisches Problem ist denkbar, das nicht in einer dieser drei Sparten seine natürliche Unterkunft fände und finden müßte. Wir haben es z. B. mit einem isolierten Berge zu thun. Zunächst wird, um diesem geographischen Individuum vollkommen gerecht zu werden, die mathematische Geographie Länge und Breite des Gipfels, sowie den radialen Abstand dieses Punktes von einem Fixpunkte (dem Erdzentrum) oder von einer normativen Niveaufläche (dem Meeresspiegel) zu ermitteln trachten, sodann setzt die deskriptive Geographie ein und schildert uns die Beschaffenheit des Berges, seine Besiedelung mit Pflanzen, Tieren und menschlichen Wohnplätzen, wobei auch der Sonderart der in diesen Wohnstätten sich aufhaltenden Menschen zu gedenken ist, und schließlich nimmt die physikalische Geographie das Wort, um uns aufzuklären über die geognostische Beschaffenheit der Erhebung, die Kräfte, welche bei deren Bildung mitgewirkt haben, die Quellen und

Wasseradern, durch welche sie mit den benachbarten Strömen und mit dem Weltmeere in Verbindung steht, die magnetischen Kraftäußerungen der Gegend, die Veränderungen, welche durch das Aufragen des Berges in der ihn umgebenden Atmosphäre hervorgebracht werden. Damit aber jede der drei Einzeldisziplinen im konkreten Falle nicht versage, sondern die von ihr erwarteten Dienste gründlich leiste, muß auch jede, ohne Rücksicht auf die besonderen Fälle, ein *festgegliedertes wissenschaftliches System* besitzen, in welchem dann alle dem Forscher begegnenden Spezialitäten ungezwungen ihren Platz finden können. Wie dieses System für die Länder- und Völkerkunde einerseits, für die physikalische Erdkunde andererseits zu gestalten sei, kann an diesem Orte begreiflicherweise keinen Gegenstand der Diskussion bilden; uns genügt es vielmehr, zu wissen, was wir von der mathematischen Geographie als solcher zu erwarten und zu verlangen haben, und nur die enger begrenzte Frage, auf welche einzelnen Punkte das *Wo?* von vorhin Bezug zu nehmen habe, harrt noch der Entscheidung.

Der Punkt, dessen Festlegung die mathematische Geographie zu leisten hat, gehört der Erde an — einerlei, ob ihrer Litho-, Hydro- oder Atmosphäre. Da ist denn natürlich zuerst die Notwendigkeit zur genauen Bestimmung der *Erdgestalt* gegeben; untrennbar an diese Aufgabe geknüpft ist die weitere der Bestimmung der *Erdgrösse*. Nachdem wir hierüber im klaren sind, können wir ein zum Erdkörper in fester Verbindung stehendes Achsensystem konstruieren und die Lage eines Punktes durch seine Koordinaten angeben; dieses Problem der *geographischen Ortsbestimmung* ist ein ziemlich umfassendes und bildet recht eigentlich den Kern der mathematischen Erdkunde, würde aber auch zugleich deren Gipfel repräsentieren, wenn — die Erde stabil im Raume stände. Dem ist aber nicht so, es eignet ihr vielmehr eine mehrfache Bewegung, und wenn also der Zweck der Ortsbestimmung nicht lediglich ein *relativer* (terrestrischer), sondern ein *absoluter* (kosmischer) sein soll, so muß auch auf diese verschiedenen Bewegungen Rücksicht ge-

nommen werden [1]). Wir erkennen sonach, daß zur Kennzeichnung des Wesens unserer Disziplin als ebenso notwendige wie hinreichende Formulierung die folgende zu gelten hat:

Die mathematische Geographie hat den Zweck, die Lage irgend eines mit dem Erdkörper, resp. einer seiner drei Aussenhüllen verschiedenen Aggregatzustandes fest verbundenen Punktes gegen ein im Raume unveränderlich angenommenes Koordinatensystem mit jener Schärfe zu bestimmen, welche dem augenblicklichen Stande der Theorie und Beobachtungskunst angepasst ist.

Damit sind dann auch zugleich die drei Unterabteilungen unseres geographischen Wissenszweiges gegeben; sie haben zu erörtern erstens Gestalt und Größe der Erde, zweitens die Möglichkeit einer rein tellurischen Ortsbestimmung, drittens die Bestimmung des momentanen Erdortes im Weltraume. Sind diese drei Punkte erledigt, so ist es auch das durch die Frage *Wo?* signalisierte Problem im denkbarst weiten Umfange.

---

[1]) Vorläufig gehen wir noch von der seit den Zeiten der griechischen Geometer bis zum Auftreten Kants — man vergleiche seine allerdings noch nicht von voller Jugendreife zeugende Schrift „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte“ (Königsberg 1746. S. 11 ff.) — als dogmatisch feststehend erachteten Annahme aus, daß es einen solchen absoluten, „krümmungslosen“ und ebensowohl unendlichen wie auch unbegrenzten Raum gäbe. Ist dies der Fall, so wird der freie Gedanke durch nichts gehindert, innerhalb des Raumes, und zwar entweder in starrer Verbindung mit einem der Weltkörper oder auch unabhängig von einem solchen, ein Gerüste von drei jeweils aufeinander senkrecht stehenden geraden Linien zu errichten, die durch je zwei derselben bestimmten drei Koordinatenebenen gelegt anzunehmen und nunmehr einen willkürlichen Raumpunkt als durch die aus ihm auf die drei Ebenen gefällten, mit Vorzeichen behafteten Lote *eindeutig* fixiert sich vorzustellen. Ueber die wirkliche Ausführung dieser Forderung, sowie über die nicht zu leugnenden Schwierigkeiten, auf welche dieselbe stößt, sobald auf die kritizistische Raumthéorie eines verfeinerten Kantianismus die ihr nicht zu versagende Rücksicht genommen wird, werden wir im zehnten Abschnitte unseres dritten Kapitels weitere Untersuchungen anzustellen haben.

Erstes Kapitel.

Gestalt und Grösse der Erde.

I. Die ältesten Anschauungen über die Gestalt des Erdkörpers.

Die altgriechischen Naturphilosophen. Wie es in jedem einzelnen Gebiete des menschlichen Wissens nicht nur vorübergehende Teilnahme, sondern nachhaltigstes Interesse erweckt, die verschiedenen Etappen kennen zu lernen, auf welchen der weite Weg bis zur Erreichung eines einstweiligen Abschlusses von denen zurückgelegt wurden, die uns in der Erforschung der Wahrheit vorangingen, so dürfen wir uns auch hier, wo es sich um die fundamentale Frage der mathematischen Erdkunde handelt, einer solchen retrospektiven Betrachtung nicht entschlagen. Freilich ist, nachdem seit drei Jahrhunderten die Lehre von der Kugelgestalt der Erde zum Gemeingut der Volksschule aller Kulturländer geworden, diese Lehre derart in Fleisch und Blut der Menschheit übergegangen, daß man sich die Möglichkeit, es habe sich damit einmal anders verhalten, nicht vorstellen kann. Trotzdem ist dem so, und man hat auch keineswegs ein Recht, zu behaupten, daß unbewußte oder bewußte Gegnerschaft gegen die fragliche Lehre als ein besonders ungünstiges Kriterium des Geisteszustandes derer, die so dachten, zu gelten habe. Wie so häufig, bedurfte auch in diesem Falle das Durchdringen zur Wahrheit einer gewissen Zeit.

Den früher der haltbaren Basis vielfach entbehrenden Untersuchungen über die kosmologischen Ansichten der alten griechischen Philosophen ist eine solche neuerdings durch das bahnbrechende Werk von Diels[1]) ver-

[1]) Doxographi Graeci; collegit, recensuit, prolegomenis indicibusque instruxit Hermannus Diels, Berlin 1879. In diesem überaus bedeutenden Werke ist der wohl geglückte Versuch gemacht, eine

liehen worden. Danach scheint es, daß das bisher allseitig für Thales in Anspruch genommene Verdienst, als der erste die Sphärizität des Erdkörpers vertreten zu haben, demselben wieder abgesprochen werden müsse; der Milesier lehrte allerdings die Rundung der Welt und kannte auch bereits die Zoneneinteilung der Himmelskugel, aber ferner dürfte ihm noch die Uebertragung sphärischer Eigenschaften auf die Erde gelegen sein, bezüglich deren er sich kaum wesentlich über den von den jonisch-äolischen Dichtern eingenommenen Standpunkt erhoben haben dürfte [1]). Auch Anaximander müssen wir in dieser Hinsicht dem Thales gleichstellen; einer in neuerer Zeit erst für das bessere Verständnis dieses antiken Denkers erschlossenen Quelle zufolge hielt derselbe die Erde für walzenförmig und verlegte den Wohnsitz der Menschen auf die eine

---

ganze Reihe vereinzelter, in den Schriften späterer Zeit zu findender Gelegenheitsaussprüche auf ihre eigentliche Quelle zurückzuführen, nämlich auf die in ihrer ursprünglichen Fassung ganz verloren gegangenen Φυσικαὶ δόξαι des Theophrast. Bis dahin galten als das Beste über die altjonische Astronomie die geschichtlichen Werke von Zeller (Philosophie der Griechen, Leipzig 1859—68) und Brandis (Handbuch der Geschichte der griechisch-römischen Philosophie in drei Teilen bis Aristoteles, Berlin 1835—60), sowie einzelne Monographien von Teichmüller, allein durch Diels' Forschung konnte erst ein wirklicher Einblick in die Gedankenrichtung der älteren Periode erreicht werden. Die gerade für uns wichtigen Punkte des Dielsschen Originals hebt bündig und geschickt heraus eine Dissertation von M. Sartorius: Die Entwicklung der Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras und Empedokles, in besonderem Anschlusse an Theophrast dargestellt, Breslau 1883. Neuestens hat auch P. Tannery seine auf dem Gebiete der Geschichte der reinen Mathematik längst erprobte Arbeitskraft den hier in Rede stehenden Dingen zuzuwenden begonnen: Pour l'histoire de la science hellène, Paris 1887.

[1]) Diels, S. 475 ff.; Sartorius, S. 19 ff. Bei Homer und Hesiod ist bekanntermaßen die Erde eine flache, vom Okeanos umflutete Scheibe, deren kreisförmiger Rand zugleich dem halbkugelförmig den Erdkreis überspannenden, massiven Himmelsgewölbe angehört; das symmetrische Gegengewicht zum Firmamente bildet der unterirdische Tartarus. Bestimmte Vorstellungen darüber, wie die in den Okeanos eintauchenden Gestirne auf dessen Morgenseite wieder zum Vorschein kommen können, scheint sich das homerische Zeitalter noch nicht gebildet gehabt zu haben (Sartorius, S. 15).

der ebenen Grundflächen des Cylinders [1]). Eben und plattenförmig scheint sich auch Anaximanders Nachfolger, Anaximenes, die Erde gedacht zu haben [2]). Noch weniger erfreulich kommen dem modern Fühlenden jene philosophischen Doktrinen vor, welche der Erde eine unendliche Ausdehnung beilegen, sei es nach „unten“ zu, so daß die Erde, wie bei Heraklit [3]), im Unendlichen wurzelt, sei es nach den Dimensionen der Länge und Breite, wie bei Xenophanes [4]). Selbst noch bei dem viel späteren Anaxagoras, der doch bereits von der großen pythagoreischen Reform hätte berührt sein können, wird der Erdkörper als flaches Blatt definiert, welches durch den Gegendruck der zusammengepreßten Weltluft getragen werde [5]). Man ersieht aus unserer Darlegung, daß selbst noch zur Zeit des peloponnesischen Krieges, also um 400 v. Chr., richtige Anschauungen über die fundamentale Frage der mathematischen Geographie nichts weniger als allgemein verbreitet gewesen sein können [6]).

---

[1]) Sartorius, S. 25 ff. Maßgebend erwies sich eine — von Diels und Tannery näher beleuchtete — Stelle beim Kirchenvater Hippolyt: „Τὸ δὲ σχῆμα αὐτῆς“ — τῆς γῆς — „ὑγρὸν, στρόγγυλον, χιόνι λίθῳ παραπλήσιον. Τῶν δὲ ἐπιπέδων, ᾧ μὲν ἐπιβεβήκαμεν, ὃδε ἀντίθετον ὑπάρχει.“ Diese Angabe läßt sich nur mit der Hypothese einer Walze vereinbaren.

[2]) Sartorius, S. 32 ff.; Henri Martin, Hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes, Mém. de l'acad. des inscriptions et belles-lettres, vol. XXIX, 2. S. 109 ff.

[3]) Sartorius, S. 39 ff.

[4]) Diels, S. 580; Sartorius, S. 50 ff.

[5]) H. Martin, S. 175 ff.; Sartorius, S. 55 ff.

[6]) Selbst ein Hippokrates und ein Herodot verblieben auf dem Boden der kindlich-naiven Anschauung, wiewohl dem letzteren wenigstens die andere nicht fremd geblieben sein kann. Er hätte sonst nicht, wie er es gethan, spotten können über diejenigen, welche sich die Erde in eine Drehbank eingespannt und darin abgerundet dächten (lib. IV, cap. 36, 45). Wenn man freilich den Wortlaut sich näher ansieht, so kann man recht wohl auch auf die Vermutung kommen, der große Reisende, der das Meer nach allen Richtungen befuhr, habe sich über die kreisförmige, abgedrechselte Scheibe der Jonier und speziell des Hekatäus lustig machen wollen. Dieser Auffassung der Worte scheint M. C. P. Schmidt (a. a. O., S. 26) zuzuneigen, die andere vertritt Peschels Geschichtswerk (S. 34). — Bezüglich Herodots und seiner eigen-

Derjenige, der zuerst ein klares Bewußtsein von der Kugelgestalt der Erde besaß, ist unstreitig Pythagoras gewesen [1]). Die Einteilung der Erdoberfläche in die fünf bekannten Gürtel ist unzweifelhaft altpythagoreisch, ein Gleiches gilt für die Bezeichnung der Tropenzone, daß sie die „verbrannte“ (διακεκαυμένη) sei, und damit hat Pythagoras, ohne es zu wollen und zu ahnen, eine Irrlehre inauguriert, welche sich den Fortschritten der Erdkunde noch nach mehr denn zweitausend Jahren hinderlich erweisen sollte [2]). Daß der samische Philosoph sich bei seiner Bestimmung der Erdgestalt nicht durch jene Erwägungen leiten ließ, welche uns im elften und zwölften Abschnitte dieses Kapitels zu beschäftigen haben werden, daß für ihn vielmehr einzig und allein ein gewisses geometrisch-ästhetisches Gefühl maßgebend war, kann sein Verdienst wohl nicht wirklich schmälern. Gewiß ist, daß die pythagoreische Schule seitdem diese Grundwahrheit treu bewahrte und auch auf die näheren Himmelskörper, Sonne, Mond und Planeten, ausdehnte [3]). Von Parmenides, der eigentlich ein Schüler des Xenophanes, dabei aber auch durch pythagoreische Gedankeneinflüsse mit bestimmt war, ist es bekannt, daß er die sphärische

---

tümlichen Zurechtrichtung der Zoneneinteilung für die Voraussetzung einer planen Erde ist nachzusehen bei Berger (S. 44).

[1]) Das Beste, was über die vom Meister selbst und von seinem bedeutendsten Schüler aufgestellten Ansichten betreffs der Einrichtung des Weltgebäudes geschrieben wurde, sind zwei Abhandlungen von H. Martin: Hypothèse astronomique de Pythagore (Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, tomo V. S. 99 ff.); Hypothèse astronomique de Philolaus (ibid. S. 127 ff.). Es ist gar nicht leicht, jene Bestandteile des pythagoreischen Systemes, welche von dessen Begründer selbst herrühren, von jenen zu trennen, die erst die Zuthat späterer Epochen sind. Ueber die ältesten Phasen der griechischen Kosmologie mögen noch folgende Schriften zu Rate gezogen werden: Oettinger, Die Vorstellungen der alten Griechen und Römer über die Erde als Himmelskörper, Freiburg i. B. 1850; Gruppe, Die kosmischen Systeme der Griechen, Berlin 1851.

[2]) Ueber die Hypothese, daß es durch Hitze unbewohnbar gemachte Zonen geben müsse, wird weiter unten einiges weitere beigebracht werden.

[3]) Sartorius, a. a. O., S. 48.

Außenform der Erde ebenso wie deren angeblich zentrale Stellung im Universum auf die allgemeine Anziehungskraft der Massenteilchen zurückführte, welche sich nur unter den angegebenen beiden Bedingungen wechselseitig zu paralysieren vermöge; dies geht aus einer vielcitierten Stelle des Aëtius [1]) deutlich hervor. Aehnlich wie Parmenides scheint auch Platon den Pythagoreern, mit denen er auf seiner ersten Reise nach Großgriechenland in persönlichen Verkehr getreten war, die Bekehrung zur Sphärizitätslehre verdankt zu haben, denn diese war ihm anscheinend noch ganz fremd, als er seine Jugendarbeit, den „Phädon", verfaßte [2]). Späterhin nimmt diese Lehre in den platonischen Schriften einen breiten Raum ein, und so ist es nur natürlich, daß auch des Meisters großer Schüler, Aristoteles, jene in bereits dogmatische Form bringen konnte, wie wir uns später des näheren überzeugen werden. Seit Aristoteles und dem der Blütezeit nach zwischen diesem und Platon mitten inne stehenden Eudoxus [3]) war in der wissenschaftlichen Welt die

---

[1]) Die „Epitome" des Aëtius, der ungefähr um 100 n. Chr. seine kompilatorische Thätigkeit ausgeübt haben mag, ist eben, wie Diels (a. a. O., S. 45 ff.) das wahre Sammelbecken gewesen, in welchem mehr oder minder gute Nachrichten über althellenische Philosophie zusammengeflossen waren.

[2]) Vgl. R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 32; daneben auch Böckh, De platonico systemate globorum coelestium, Heidelberg 1810. Im erwähnten Dialoge bezeichnet Platon den Himmel als σφαιροειδής, die Erde charakteristisch als περιφερής.

[3]) Ueber diesen bislang kaum genug gewürdigten Mann, dessen Bedeutung für die theoretische Astronomie an späterer Stelle nach Schiaparelli zu erörtern sein wird, verbreitet sich Künßbergs Abhandlung: Eudoxus von Knidus, 1. Teil, Dinkelsbühl 1888. Es gelingt dem Verfasser, diesen Mathematiker, der ja freilich auch für Geographie viel geleistet hat, strenge zu sondern von dem gleichnamigen Geographen aus Kyzikus. Daß der Knidier über die Prinzipien der mathematischen Erdkunde so klar dachte, wie nur irgend einer der älteren Griechen, belegt Künßberg mittels einer Stelle in dem sogenannten „eudoxischen Papyrus" des Pariser Louvre: „Ἡ δὲ γῆ σφαιροειδὴς οὖσα ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ κεῖται, σφαιροειδεῖ ὄντι." An „sphäroidisch" im modern-geometrischen Sinne ist dabei natürlich nicht zu denken.

Frage nach der geometrischen Beschaffenheit des Erdkörpers endgültig entschieden, und nur ein Beweis für den Mangel an Fachbildung war es, wenn gelegentlich eine schüchterne Andeutung [1]), daß es auch anders sein könne, sich hervorwagte.

Die patristische Zeit. Beklagenswerterweise erlitt jedoch, als von der späteren römischen Kaiserzeit an der gesamte Besitzstand des Wissens ins Schwanken geriet, auch die Lehre von der Kugelgestalt der Erde neue Anfechtungen und ging sogar schließlich gänzlich verloren [2]). Die Kirchenväter huldigten zum Teile — keineswegs sämtlich — dem Grundsatze, daß alle heidnische Gelehrsamkeit über Bord geworfen werden müßten, und in richtiger Konsequenz dieser Idee kehrten sie auch zu der alten Identifizierung des sinnlichen Scheines mit der thatsächlichen Wahrheit zurück. Mißverstandene Aussprüche der Psalmen und Propheten mußten zur Bekämpfung der verhaßten griechischen Philosophen herhalten. Am freiesten hielten sich von dieser Verirrung jene Väter, denen ihre nationalgriechische Herkunft eine gewisse Immunität gegen die geistige Erkrankung ihrer Zeit verliehen hatte; dahin gehören Origenes, Clemens Alexandrinus, Gregor von Nyssa, Basilius, welch letzterer sich die aus der Kugelform der Erde entspringenden Folgen klar genug gemacht hatte, um die Beschattungsverhältnisse, wie sie sich für die einzelnen Zonen ergeben müssen, ganz zutreffend zu

[1]) Nach Strabon hätte Polybius, der ein geistvoller Historiker, aber jeder mathematischen Bildung bar war, von einer Auftreibung des Erdkörpers nahe beim Aequator gesprochen. Siehe hierüber und andere verwandte, minder haltbare Tagesleistungen der Antike Köler, Allgemeine Geographie der Alten, 1. Teil, Lemgo 1803. S. 156 ff.

[2]) Neben der uns schon bekannten Schrift Marinellis mögen, als eingehendere Nachweisungen enthaltend, folgende Arbeiten angeführt sein: Möller, Geschichte der Kosmologie in der christlichen Kirche bis auf Origenes, Halle 1860; Zöckler, Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, 1. Abteilung, Gütersloh 1877; Günther, Die kosmographischen Anschauungen des Mittelalters, D. Rundschau f. Geographie u. Statistik, 4. Jahrgang. S. 249 ff. S. 313 ff. S. 345 ff.

beschreiben [1]). Die Lateiner sind geteilt; Ambrosius sieht in der richtigen Erkenntnis des Sachverhaltes nichts Verfängliches, Augustinus beobachtet eine kluge Neutralität, der redegewandte Lactantius dagegen gießt auf das Haupt desjenigen, der die biblische Ausdrucksweise nicht als Norm anerkennen will, die gefüllte Schale seines Zornes aus [2]). Weitaus am schlimmsten war es mit den syrischen Hellenisten bestellt, deren orientalische Phantasie im engsten Anschlusse an die Bildersprache der heiligen Schrift ihr Genügen fand. „Ephräm," so berichtet Zöckler [3]), „Diodorus, Theodor von Mopsuestia, Acacius von Caesarea, Chrysostomus, Severianus denken sich das Verhältnis des Himmels zur Erde als das eines halbkugelförmigen oder gar flachen Daches zum überdachten Fußboden, gestalten also das ganze Weltgebäude zelt-, haus- oder kammerförmig, unter Berufung auf biblische Belege. Den am ersten Schöpfungstage geschaffenen oberen Himmel schildert unter anderem Severianus als Oberdach oder Söller (ὑπερῷον), das Firmament oder den Wolkenhimmel als Mitteldach (μέση στέγη) der Erde [4]). Die Sonne und die Sterne läßt eben dieser Zeitgenosse des Chrysostomus nächtlicherweise nicht unter der Erde her, sondern um die gleich einer hohen Mauer sie verdeckende nördliche Region (τὰ βοῤῥινὰ μέρη) herumlaufen; eine

---

1) Zöckler, S. 128 ff.

2) Lactantius imputiert (De falsa religione divinarum institutionum, lib. III, cap. 32) seinen Gegnern, sie stellten sich nur, als ob sie die Wahrheit nicht einsehen könnten. Nur Scherzes halber trügen sie ihre Absurditäten zur Schau, „quasi ut ingenia sua in malis rebus exerceant vel ostentent".

3) Zöckler, S. 124.

4) Severianus eiferte auch gegen die Annahme, daß der Himmel aus zwei kongruenten Hemisphären sich zusammensetze. Nach Marinelli (a. a. O., S. 31) führen wir einen besonders kräftigen Passus des syrischen Vaters wörtlich an. „Fecit Deus coelum, non orbiculari forma, ut inani sensu astrologi philosophantur. Non enim sphaeram fecit, quae volvatur, sed ut ait propheta: ‚Qui statuit velut fornicem coelum et extendit velut tentorium.' Aiunt prophetae, coelum initium habere et finem . . . Si globus est, summum non habet." Letzteres wird sich allerdings nicht leugnen lassen.

Weltansicht, zu welcher der von ihm abhängige und, wie es scheint, nicht viel spätere Pseudo-Cäsarius in seinen vier Dialogen sich wesentlich ebenso bekennt, der aber auch Chrysostomus und jene übrigen Syrer nicht eben sehr fern gestanden zu haben scheinen." Nicht also der „Anonymus von Ravenna" [1]) noch auch der Alexandriner Kosmas Indopleustes [2]) sind es, welche — dies war die Meinung Peschels [3]) — das bekannte und häufig zur Abbildung gelangte Zerrbild vom „Erdhügel" geschaffen haben, sondern dieses letztere war einer ganzen Anzahl von Theologen gemeinsam, und Kosmas hat ihm lediglich einen besonders deutlichen, die Unmöglichkeit des ganzen Phantasiegebildes unbewußt ins richige Licht stellenden Ausdruck zu verleihen verstanden.

Auch der nicht-christliche Orient machte die Verirrungen des christlichen zum Teile mit, aber die Wahrheit drang hier verhältnismäßig früh durch. Sowohl unter den astronomischen Kapazitäten des weit verbreiteten Arabervolkes, als auch unter den die gelehrte Tradition des jüdischen Stammes aufrecht haltenden Rabbinen war man über die Kugelgestalt der Erde einig [4]).

Die Lehre von der Kugelgestalt der Erde in ihrer Wiedererstehung. Viel langsamer verlief der Gesundungsprozess im Abendlande. Der Altmeister altgermanischer Gelehrsamkeit, Beda Venerabilis, reproduzierte unbefangen die Elemente der ptolemäischen Astro-

[1]) Vgl. Pinder-Parthey, Ravennatis Anonymi Cosmographia, Berlin 1860.

[2]) Die „Τοπογραφικὴ χριστιανική" des vielgereisten und einigermaßen büchergelehrten, aber eben nicht sehr geisteskräftigen alexandrinischen Kaufmannes hat Montfaucon in den zweiten Band seines patristischen Sammelwerkes (S. 186 ff.) aufgenommen und auch zugleich mit dem bekannten Diagramm versehen.

[3]) Peschel-Ruge, S. 97. Nur Patricius und Thomas Edessenus werden daselbst als Vorläufer des Kosmas anerkannt; in Wirklichkeit war deren Zahl, wie wir oben erfuhren, eine weit beträchtlichere.

[4]) Wir verweisen wegen näherer Aufklärung auf unsere ältere Schrift: Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung im Mittelalter bei den Arabern und Hebräern, Halle 1877.

nomie und Kosmographie, zu denen auch die Sphärizitätslehre nebst ihren Konsequenzen gehörte[1]), und von ihm aus ging die Gesamtheit seiner Sätze und Anschauungen in den Besitz Alkuins und der von Kaiser Karl begründeten Hofschule über; auch der etwas spätere Geschichtschreiber Adam von Bremen schildert die Beziehungen der Tag- und Nachtlänge zur Lage eines Ortes auf der Erde so zutreffend, daß man sieht, er habe die Kugelgestalt nicht nur geglaubt, sondern auch inhaltlich begriffen[2]). In den Klosterschulen des Mittelalters gehörte die sphärische Doktrin ebenso zum eisernen Wissensbestande, wie bei den Scholastikern und in den akademischen Vorträgen der allmählich an Zahl und Einfluß zunehmenden Universitäten[3]) — abgesehen allerdings von einer gewissen Entstellung der reinen Wahrheit, welche seit dem 13. Jahrhunderte diese letztere zu verdunkeln begann, ihre Erörterung aber besser nicht hier, sondern erst im zwölften Abschnitte dieses Kapitels finden wird.

II. Himmelskugel und Horizont gemäss dem unmittelbaren Sinneseindrucke.

Die Sinneseindrücke. Schon die geschichtlichen Darlegungen des vorigen Abschnittes legen es nahe, und unsere Sinne bestätigen es, daß dem durch theoretische Bedenken in gar keiner Weise beeinflußten Naturmenschen der Himmel *als ein gedrücktes Gewölbe* erscheint, dessen höchster Punkt dem Beobachter verhältnismäßig nahe erscheint. Längs eines Kreisumfanges, der sich allerdings nur dem auf hoher See Befindlichen in voller Reinheit darstellt und *Gesichts-* oder *Horizontalkreis*, auch schlecht-

---

[1]) Vgl. Bedas Traktat „De natura rerum“ in Mignes Gesamtausgabe der echten Werke des angelsächsischen Presbyters (Paris 1862. S. 271).

[2]) Peschel-Ruge, S. 99 ff.

[3]) Die zu erhaltenden Notizen über diesen Unterricht finden sich gesammelt bei: Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis 1525, Berlin 1887; Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. Zürich 1887.

weg *Horizont* genannt wird [1]), scheint dieses *Himmelsgewölbe* oder *Firmament* sich an die Erde anzuschliessen. An sich wäre, da ja die Atmosphäre nach keiner Seite hin die Gesichtsstrahlen hemmt, zu erwarten, daß das Firmament uns den Eindruck einer geometrischen Halbkugelfläche machte, allein der sinnliche Schein bringt, wie erwähnt, etwas anderes zuwege.

Diese Aenderung ist bedingt durch die dem ausübenden Künstler wohlbekannte *Luftperspektive*, welcher auch die bekannte Erscheinung zugeschrieben werden muß, daß Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes größer erscheinen als später resp. früher, wenn ihre Höhe über jenem eine beträchtlichere ist [2]). Es liegt hier eine ähnliche perspektivische Wirkung vor wie die, kraft deren die Erdoberfläche, wenn sie aus größerer absoluter Höhe, z. B. von einem Luftballon aus, betrachtet wird, weder eben noch, was sie doch in Wirklichkeit ist, gegen den Beschauer *konvex*, sondern im Gegenteile gegen denselben

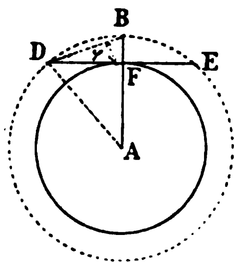
[1]) Die Definition des „ὁρίζων κύκλος" dürfte nach R. Wolf (a. a. O., S. 113) in eine ziemlich frühe Zeit hinaufreichen, denn bei Autolycus von Pitane, von dem der älteste uns bekannte Lehrbegriff der Sphärik herrührt (jedenfalls älter als die euklidischen „Phänomene"), wird der Horizont bereits als etwas Allbekanntes behandelt. Wir besitzen gegenwärtig von den beiden Schriften des genannten Schriftstellers eine den höchsten Anforderungen genügende kritische Ausgabe: Autolyci de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch, Leipzig 1885.

[2]) Vgl. Weyers gründliche Behandlung dieser merkwürdigen und durchaus noch nicht als vollständig geklärt anzusehenden Erscheinung in der „Encyklopädie der Physik" (1. Band, Leipzig 1869. S. 685 ff.). Daß eine optische Täuschung inmitte liegt, erhellt, sobald man mit einem Winkelmeßinstrumente die scheinbaren Durchmesser in verschiedenen Höhen über dem Horizonte mißt, denn dann findet man sie stets einander gleich; ja sogar das Besehen durch einen cylindrisch zusammengerollten Bogen Papier reicht aus, um die Augentäuschung aufzuheben. Daß nicht an eine Mitwirkung der Strahlenbrechung der Luft zu denken ist, versteht sich von selbst, denn diese würde, wie eine geometrische Ueberlegung darthut, eher eine Annäherung der nach den entgegenstehenden vertikalen Rändern einer Kreisscheibe gezogenen Linien mit abnehmender Höhe bedingen.

konkav gekrümmt erscheint. Die Perspektive lehrt, daß die scheinbaren Entfernungen vom Standpunkte des Betrachtenden zum Gewölbe sich mehr und mehr vergrößern müssen, je mehr sich die Gesichtslinien der horizontalen Ebene nähern. Natürlich kann und muß dann die zunächst einen rein optischen Charakter tragende Frage aufgeworfen werden: *Wie lässt sich die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes geometrisch bestimmen?*

Bestimmung der Gestalt des Himmelsgewölbes. Wir finden, daß eine Antwort auf diese Frage zuerst in einer Disputation von Treiber[1]) zu geben versucht wurde, allerdings auf Voraussetzungen hin, welche sich bei genauem Zusehen als unzulässig erweisen; das Theorem, welches zu Grunde gelegt wird, hat den folgenden Wortlaut: „Coelum instar fornicis leniter depressi Terricolis apparet.“ In *Fig. 1* bedeute der innere der beiden konzentrischen Kreise einen Hauptkreis der Erdfeste, der äußere (punktierte) den entsprechenden Grenzkreis der Atmosphäre. Der Horizontalkreis des Punktes F der Erde sei durch die Tangente DE angedeutet; es ist also $DF = FE$; der Erdradius AF schneide den äußeren Kreis in B, so daß also BF das repräsentiert, was man gewöhnlich die *Höhe der Atmosphäre* nennt. Treiber geht nun von der irrigen Meinung aus, das uns sichtbare Firmament sei identisch mit der atmosphärischen Kugelhaube DBE, und deren Ermittlung wäre ja allerdings, wenn man BF als bekannt voraussetzen darf, leicht zu bewerkstelligen; die Aufgabe ist gelöst, sobald man $\sphericalangle BDF = \varphi$ kennt. Nun ist, wenn wir mit

Fig. 1.



[1]) J. F. Treiber, De figura et colore coeli apparente, Jena 1672.

r den Erdradius [1]), mit h die Dicke der Atmosphäre bezeichnen, dem pythagoreischen Lehrsatze zufolge,

$$\overline{DF}^2 = (r+h)^2 - r^2 = 2hr + r^2,$$

$$\text{cotang}\,\varphi = \frac{DF}{BF} = \frac{\sqrt{r}\,.\,\sqrt{2h+r}}{h} = \frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{2h}{r}} = \frac{r}{h}+1,$$

wenn wir nach dem binomischen Satze entwickeln und diese Reihe bei dem zweiten Gliede aufhören lassen. Allein abgesehen davon, daß Treiber für h nur einen ganz unrichtigen Wert in die Rechnung einzustellen in der Lage war, verkannte er auch völlig die ganze Grundlage des Problemes, indem er annahm, unserem Auge, resp. der raumdurchdringenden Kraft desselben, sei durch die äußere Begrenzungsfläche unserer Lufthülle eine unüberschreitbare Schranke gesetzt.

Methode von R. Smith. Ungleich korrekter ging, anscheinend veranlaßt durch eine Bemerkung Mairans, Robert Smith bei der Diskussisn dieser Frage zu Werke [2]). Sein Ausgangspunkt ist allerdings auch der, daß das Firmament als Teil einer Kugel anzusehen sei [3]), deren Mittelpunkt jedoch nicht mit dem Standpunkte des Beob-

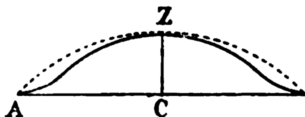
---

[1]) Diese Bedeutung soll der Buchstabe r das ganze Buch hindurch beibehalten.

[2]) R. Smith, A Complete System of Opticks, Cambridge 1728. Eine deutsche Bearbeitung davon ist: A. G. Kästner, Vollständiger Lehrbegriff der Optik nach Rob. Smith, mit Zusätzen, Altenburg-Jena 1755. Uns selbst lag vor: R. Smith, Cours complet de l'optique, trad. par L. P. P., tome I, Paris-Avignon 1767.

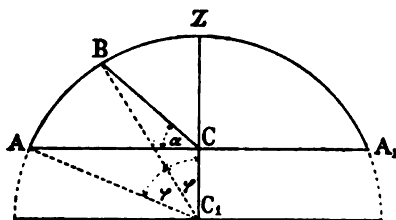
[3]) Soweit unsere Kenntnis reicht, ist dies stillschweigend allgemein angenommen worden; nur Smith erzählt (a. a. O., S. 161 ff.) von einer Ausnahme. Ein gewisser Folkes, ein zuverlässiger Beobachter, habe ihm, dem Autor, berichtet, daß er zum öfteren eine Krümmung des Himmelsgewölbes, wie sie in *Fig. 2* wiedergegeben ist, wahrgenommen habe; dann wäre sonach das Firmament eine *konchoidische Umdrehungsfläche*. Der Wert des Verhältnisses $AC:CZ$ brauchte durch diese — sonst von keiner Seite bestätigte — Modifikation des gewöhnlichen Augenscheines allerdings nicht alteriert zu werden.

Fig. 2.



achters zusammenfalle, sondern sich senkrecht unterhalb desselben befinde. In *Fig. 3* sehen wir einen willkürlich geführten Vertikalschnitt vor uns; C ist der Ort des Beobachters, C_1 das wirkliche Kugelzentrum, Z das mit C und C_1 in derselben Graden liegende Zenit von C, die Punkte A und A_1 gehören dem Horizontalkreise an. Die Gestaltsbestimmung ist erledigt, sobald es gelang, den Winkel $AC_1Z = ZC_1A_1 = 2\varphi$ zu finden. Um dies zu erreichen, suchte Smith einen Punkt des Himmelsgewölbes B auf, der dem Augenmaße nach von A und Z gleiche Winkeldistanz hatte, und maß alsdann den Höhenwinkel $ACB = \alpha$, damit war zugleich φ gegeben. Das rechtwinklige Dreieck ACC_1 liefert nämlich, wenn $AC_1 = \rho$ gesetzt wird, die Beziehung $CC_1 = \rho \cos 2\varphi$; auf das spitzwinklige Dreieck BCC_1 können wir den Sinussatz anwenden und erhalten so die Proportion

Fig. 3.



$$CC_1 : \rho = \sin(180^0 - 90^0 - \alpha - \varphi) : \sin(90^0 + \alpha),$$

$$CC_1 = \frac{\rho \cos(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha}.$$

Setzt man beide Werte von CC_1 einander gleich, so wird die Bestimmungsgleichung:

$$\cos 2\varphi \cos \alpha = \cos(\alpha + \varphi).$$

Hieraus leitet sich unschwer die weitere Gleichung ab [1]):

$$\frac{\sin \frac{3\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tang} \alpha.$$

[1]) Zunächst ist, wenn mit $\cos \alpha$ durchdividiert wird, $\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi = \cos \varphi - \cos 2\varphi$, und für letztere Differenz kann man schreiben $2 \sin \frac{3\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$, für $\sin \varphi$ aber $2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$.

Diese Gleichung ist für cos φ kubisch und liefert drei reelle Wurzeln, von denen jedoch nur eine für den konkreten Fall brauchbar erscheint; für $\alpha = 23^0$ findet sich $\varphi = 16^0\ 33'$, so daß mithin der Bogen AZ statt der eigentlich zu erwartenden 90^0 nur $33^0\ 6'$ umfassen würde. Auf Grund dieses Ergebnisses berechnete Smith ferner eine Tabelle für die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond, wie sie sich infolge des Umstandes ändern müssen, daß der Lauf dieser Himmelskörper nicht an der Innenseite einer Kugelfläche, sondern an der eines plattgedrückten Gewölbes von der angegebenen Beschaffenheit sich vollzieht. In Prozenten des am Horizonte sich darstellenden Durchmessers ausgedrückt, stellen sich die Diameter für die Höhen 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0, heraus, wie folgt: 68 %, 50 %, 40 %, 34 %, 31 %, 30 %. Wäre $CZ = 1$, so würde $AC_1 = 6{,}16$ gesetzt werden müssen.

Gegensatz von Himmelsgewölbe und Himmelskugel. Für die mathematische Erdkunde und deren Ortsbestimmungszwecke hat die an sich gewiß interessante Frage, wie groß der charakteristische Winkel φ anzunehmen sei, eine besonders einschneidende Bedeutung nicht. Wir beziehen nämlich die Gestirnsörter nicht etwa auf den Himmel, wie er unserem Auge erscheint, sondern auf eine ideale Himmelskugel, welche den Standort des Beobachters zum geometrischen Mittelpunkt hat. *Himmelsgewölbe* und *Himmelskugel* sind somit von nun an zwei für uns vollkommen disparate Begriffe.

III. Die scheinbare Umdrehung der Himmelskugel; Einteilung des Horizontes.

Himmelskugel und Horizont. Da wir fürs erste von der wirklichen Entfernung der Himmelskörper von unserer Erde gar nichts wissen und auch fürs erste kein Mittel absehen, uns darüber klar zu werden, welcher von ihnen besonders nahe und besonders ferne ist, so denken wir uns sämtliche Gestirne an der Innenfläche einer Hohl-

kugel befestigt, deren Mittelpunkt mit dem augenblicklichen Standorte des Beobachters zusammenfällt, deren Halbmesser aber für uns durchaus unbestimmbar ist. Wir können aus diesem letzteren Grunde an der scheinbaren Himmelskugel niemals *lineare*, sondern ausschließlich bloß *Bogendistanzen* erkennen und messen [1]), und damit ist es uns nahe gelegt, den fraglichen Radius mit der *Einheit* zu identifizieren [2]). *Der Horizont ist ein grösster Kreis dieser Himmelskugel und teilt dieselbe in eine sichtbare und in eine unsichtbare Hälfte.*

Zenit und Nadir. Es kommt nun darauf an, an dieser Kugel noch weitere Punkte und Linien zu erkennen, durch welche uns die Möglichkeit gegeben wird, irgend einen Punkt auf bereits bekannte Elemente zu beziehen [3]).

---

[1]) Man sollte nicht glauben, wie ungemein häufig selbst von Leuten, denen etwas ganz anderes zuzutrauen wäre, gegen diese einfache Fundamentalwahrheit gesündigt wird, daß man die Grösse von Objekten, deren Entfernung unbekannt ist, in irgend einem Linear- oder Flächenmaße angibt. R. Wolf (Gesch. d. Astr., S. 125) citiert Eduard Biots Auszüge aus den chinesischen Annalen, worin sehr häufig zur besseren Charakterisierung der Größe eines Lichtmeteores (Feuerkugel) dasselbe mit Bruchteilen eines Scheffels verglichen wird. Wie sehr gerade Beschreibungen von Meteoren mit diesem die Notiz absolut wertlos machenden Irrtume zu rechnen haben, betont auch Mädler (Populäre Astronomie, herausg. von Klinkerfues, Straßburg 1882. S. 7).

[2]) In sämtlichen Schriften des vorigen Jahrhunderts fast wird für diesen Radius ein besonderer Buchstabe eingeführt, der sich schließlich natürlich bei jeder Rechnung heraushebeu muß. Um diesen Ballast zu vermeiden, verfahren wir, wie oben angedeutet ist.

[3]) Die folgende Entwicklung der Grundbegriffe soll sich streng an die vielfach vernachlässigte Autopsie anschließen und deshalb so gut wie gar nichts voraussetzen. Einsichtige pädagogische Schriftsteller haben sich längst schon dahin ausgesprochen, daß nur in diesem Sinne erteilter Unterricht wirkliches Verständnis, im Gegensatze zum bloßen Memorieren, erzielen könne; vgl. insbesondere A. Pick: Die astronomische Geographie als Unterrichtszweig an Realschulen, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 1. Jahrgang. S. 79 ff.; Der erste Unterricht in der astronomischen Geographie, Wiener Pädagog. Mitteil., 1. Jahrgang. S. 41 ff. Auch das als mustergültig anerkannte Werk von Martus (Astronomische Geographie, ein Lehrbuch angewandter Mathematik, Leipzig 1880) tritt im wesentlichen auf den gleichen Weg (S. 31 ff.). Trotz unserer

Das Nächstliegende ist offenbar, in dem Mittelpunkte eine Senkrechte auf der Horizontalebene zu errichten und die beiden Punkte zu bezeichnen, in welchen diese Senkrechte die Himmelskugel durchschneidet. Der eine derselben ist erkennbar, der andere nicht; ersterer heißt *Scheitelpunkt* oder *Zenit*, letzterer *Fusspunkt* oder *Nadir* [1]). Jeder dieser Punkte kann geometrisch als *Pol* des Horizontalkreises, sowie eines jeden diesem letzteren parallelen kleinen Kreises der Himmelskugel — *Almukantarat* [2]) — definiert werden. Dagegen hat bis jetzt kein Punkt des Horizontes mehr als ein anderer unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen, und zu einer solchen Unterscheidung können wir erst dann gelangen, wenn wir die *Bewegung der Gestirne* ins Auge fassen.

Scheinbare Bewegung der Sterne. Manche dieser Lichtpunkte ändern zwar stetig ihren Ort, ohne doch jemals dem — nötigenfalls bewaffneten — Auge dadurch unsichtbar zu werden, daß sie unter den Horizont hinabtreten. Wir bemerken jedoch auch andere, welche ursprünglich ziemlich hoch über dem Horizonte stehen, nachher aber sich demselben immer mehr und mehr nähern und schließlich unter denselben hinabtauchen, während in einer ungefähr gegenüberliegenden Gegend andere, vorher nicht gesehene Sterne auftauchen, höher steigen, ein gewisses Maximum der Erhebung über dem Horizont er-

vielgerühmten Volksbildung wissen neunzig Prozent unserer „Gebildeten" vom Himmel und seinen scheinbaren Bewegungen weniger, als der Zögling einer mittelalterlichen Klosterschule oder eine Nonne jener Zeit, denn damals war Kenntnis des Laufes der Gestirne schon um der Zeitbestimmung halber unentbehrlich. Hierüber teilt viel Belehrendes mit Spechts „Geschichte des Unterrichtswesens in Deutschland von den ältesten Zeiten bis zur Mitte des 13. Jahrhunderts" (Stuttgart 1885. S. 270 ff.).

[1]) Vgl. A. Wittstein, Ueber einige aus dem Arabischen entlehnte Sternennamen, Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litter. Abt., 29. Band. S. 174. Zenit ist eine Verketzerung von semt ar-râs („Gegend des Scheitels"), en nadîr drückt ein reziprokes Verhalten aus. Nach Zöppritz haben wir die Schreibart „Zenith" aufgegeben.

[2]) Ebenda wird Almukantarat als mit „coacervavit", er hat aufgehäuft, erklärt.

reichen und alsdann gleichfalls so lange sinken, bis sie dem Auge entschwinden. Wir fassen diese Wahrnehmungen zusammen in dem Erfahrungssatze: *Während ein Teil der Gestirne stets oberhalb des Horizontes verbleibt, ist bei einem anderen ein Untergehen und Aufgehen zu bemerken.* Dieser Umstand wird uns dazu dienen, die gesuchte Einteilung des Horizontes zu ermöglichen.

Für die weitaus überwiegende Menge der himmlischen Körper, insbesondere für alle diejenigen, welche sich durch ihr *Funkeln* auszeichnen, und welche auch durch die stärksten Vergrößerungen in keiner anderen Gestalt als in der unmeßbar kleiner Lichtpunkte aufzutreten gezwungen werden können, stellt sich bei einigermaßen anhaltender und aufmerksamer Beobachtung [1]) folgendes heraus: *Ein bestimmter Stern geht stets an dem nämlichen Punkte des Horizontes auf und unter.* Da durch zwei Punkte eine gerade Linie bestimmt ist, so können wir gleich eine weitere Folgerung anschließen: Wenn vorausgesetzt werden darf, daß die von dem Sterne bei seinem Laufe beschriebene Linie eine geometrisch regelmäßige sein und somit auch auf einer Fläche von bestimmtem geometrischem Bildungsgesetze gelegen sein werde, so wissen wir jetzt, daß diese Fläche mit der Horizontalebene eine Grade gemein haben kann, und es ist damit bereits die Wahrscheinlichkeit eine sehr große geworden, daß diese Fläche selbst eine Ebene, ihr Durchschnitt mit der Himmelskugel, d. h. eben die vom Sterne beschriebene Kurve also ein Kreis ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird zur Gewißheit, wenn wir uns noch überzeugen, daß die Winkelentfernung irgend eines bestimmten Sternes von einem gewissen Punkte des Himmels stets die gleiche bleibt, sowie daß in gleichen Zeiten auch gleiche Wege an der Himmelskugel zurück-

[1]) Hierzu bedarf es nicht gerade besonderer Instrumente, obschon diese naturgemäß eine genauere Bestimmung ermöglichen; ein unverrückt feststehendes, der Horizontalebene paralleles Rohr reicht dafür aus, sich von der Konstanz des Aufgangspunktes der großen Mehrzahl aller Sterne zu versichern. Das Funkeln oder Szintillieren der Sterne, über dessen Entstehung die Akten noch nicht geschlossen sind, eignet nur den sogenannten Fixsternen (vgl. Günther, Die Meteorologie, München 1889. S. 272 ff.).

gelegt werden[1]). Wir haben somit völlig empirisch eine fundamentale Wahrheit erhalten:

Jeder Stern beschreibt an der scheinbaren Himmelskugel eine Kreisbahn, welche den Horizont gar nicht zu berühren braucht, ihn aber auch in einem bestimmten Punkte berühren oder in zwei Punkten durchschneiden kann. Diese letzteren werden bezüglich Aufgangspunkt und Untergangspunkt genannt.

Verbindet man für verschiedene Sterne Auf- und Untergangspunkt durch grade Linien, so erkennt man sofort, daß diese sämtlichen Linien unter sich *parallel* sind. Einzig hieraus würde noch nicht folgen, daß auch für die Bahnebenen das Gleiche gilt, wohl aber ergibt es sich daraus in Verbindung mit dem bereits erwähnten Umstande, daß die Distanz zweier Sterne der bewußten Art sich nicht verändert. Wir dürfen also unserem vorigen Satze noch ein Korollar hinzufügen:

Die Ebenen, innerhalb deren sich je ein bestimmter Stern bewegt, sind durchaus parallel und schneiden die Himmelskugel in einem Systeme von Parallelkreisen; jeder solche Parallelkreis stellt die Bahn des Sternes vor, und natürlich können auch mehrere Sterne sich in demselben Kreise bewegen.

Ost- und Westpunkt. Jedes System paralleler Kugelkreise enthält *einen* und *nur einen* Hauptkreis der Kugel. Derselbe scheidet, wie jeden andern größten Kreis, so auch den Horizontalkreis längs eines Durchmessers, und dieser wieder markiert uns sohin zwei Fixpunkte auf dem Horizonte.

Wir nennen den erwähnten Durchmesser die Ostwestlinie, den an der Aufgangsseite gelegenen Endpunkt den Ostpunkt, den an der Untergangsseite gelegenen den Westpunkt.

Die Pole. Zwei weitere Fixpunkte erhalten wir, sobald wir den auf der Ostwestlinie normal stehenden

---

[1]) Wollte man ganz strenge genetisch verfahren, so wäre dieser Schluß eigentlich ein ὕστερον πρότερον, indem ja eben auf der gleichförmigen Bewegung der Gestirne erst die Möglichkeit scharfer Zeitmessung basiert.

Diameter des Horizontalkreises ziehen. Doch besitzen wir vorderhand noch kein Mittel, um diese beiden Endpunkte begrifflich auseinanderzuhalten, vielmehr wird uns ein solches erst durch eine besondere neue Ueberlegung gegeben. Wir können nämlich auch jenen Kugeldurchmesser ziehen, der zu der ganzen Schar von Parallelkreisen in deren Mittelpunkten senkrecht steht; dieser Durchmesser hat mit der Himmelskugel seinerseits wieder zwei Punkte, die *Pole*, gemein. Dieselben können unter Umständen in die Peripherie des Horizontes fallen, sie können sich allenfalls auch bezüglich mit Zenit und Nadir decken: im allgemeinen jedoch, in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle, werden wir darunter zwei besondere Himmelspunkte uns zu denken haben. Der eine derselben, der *Nordpol*, ist den Bewohnern Europas sichtbar, der andere, der *Südpol*, ist denselben durch die Horizontalebene, ähnlich wie der Nadir, verdeckt; für andere, später zu besprechende Erdgegenden ist das Verhalten ein umgekehrtes. Die Verbindungslinie von Nord- und Südpol nennen wir die *Himmelsachse.* Man erkennt sofort, daß eine durch beide Pole senkrecht zur Ebene des Horizontes gelegte Ebene den auf der Ostwestlinie lotrecht stehenden Durchmesser des Horizontalkreises in sich begreift; nunmehr ist es möglich geworden, dessen Endpunkte bestimmt zu kennzeichnen.

Süd- und Nordpunkt. *Der dem Nordpole des Himmels näher gelegene Erdpunkt heisst Nordpunkt, der dem Südpole näher gelegene Südpunkt des Horizontes.*

Nordpunkt, Ostpunkt, Südpunkt und Westpunkt des Horizontes werden in ihrer Gesamtheit als dessen vier Kardinalpunkte bezeichnet und bilden die Ecken eines dem Horizontalkreise einbeschriebenen Quadrates [1]).

[1]) Die mathematische Geographie als solche ist nicht direkt beteiligt bei den Bemühungen um Ausgestaltung der *Strich-* oder *Windrose,* durch welche nach und nach das vorläufig nur mit vier Speichen ausgestattete Rad deren eine ganze Anzahl erhielt. Für die ältere Zeit sei verwiesen auf Kaibels Aufsatz „Antike Wind-

Kulmination, Zirkumpolarsterne. Jeder der Kreise, welche irgend ein Stern durchläuft, hat zu der durch die Nordsüdlinie gelegten Vertikalebene eine symmetrische Lage; dieselbe teilt den Kreis in zwei kongruente Halbkreise. Der eine der beiden Schnittpunkte liegt von sämtlichen Punkten des Kreisumfanges am höchsten, der andere am tiefsten. Gelangt der Stern an einen dieser beiden Punkte, so sagt man, er *kulminiere*, und zwar unterscheidet man *obere und untere Kulmination*. Bei denjenigen Sternen, die weder auf- noch untergehen, ist jeder der beiden Kulminationspunkte oberhalb des Horizontes gelegen; folgerichtig müssen wir dann aber auch schließen, daß es Sterne geben wird, die selbst bei ihrer oberen Kulmination sich nicht über den Horizont erheben, unserem Auge somit für alle Zeiten entzogen bleiben werden. Daraufhin haben wir alle überhaupt an der Himmelskugel befindlichen Sterne in drei Klassen abzuteilen:

Es gibt nördliche Zirkumpolarsterne, die ihren gesamten Kreislauf oberhalb des Horizontes zurücklegen, südliche Zirkumpolarsterne, welche dem Südpole des Himmels gegenüber ein ganz analoges Verhalten bethätigen, endlich auf- und untergehende Sterne, die einen Teil ihres Kreises oberhalb, einen Teil unterhalb des Horizontes zurücklegen.

Durch Zeichnung können wir uns diese Verhältnisse sehr leicht vergegenwärtigen. In *Fig. 4* stelle uns der um den Mittelpunkt C beschriebene Vollkreis das orthographische Bild [1]) der Himmelskugel dar, projiziert auf die die Pole P_n und P_s sowie die Nordsüdlinie NS des Horizontes in sich schliessende Ebene. Die Kreisdurch-

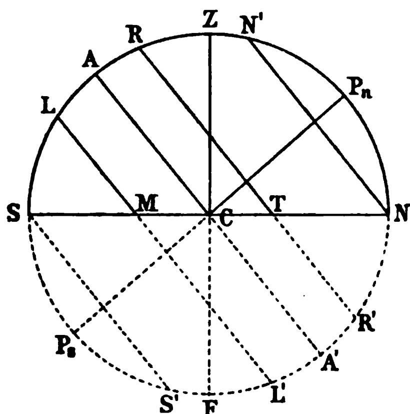
---

rosen" (Hermes, 20. Band. S. 579 ff.); umfassend handeln die ganze Frage nach ihren verschiedenen Stadien ab D'Avezacs „Aperçus historiques sur la rose des vents" (Rom 1874).

[1]) Wir stellen uns für einen Augenblick die — thatsächlich nur ideelle — Himmelskugel als etwas wirklich Vorhandenes, aus durchsichtigem Stoffe Bestehendes vor und lassen dieselbe durch ein in unendlich großer Entfernung auf der verlängerten Ostwestlinie befindliches Auge betrachten. Auf diese Weise entsteht die *orthographische Projektion*, welche also unwillkürlich als die von

messer $P_n P_s$ und NS begegnen sich in C mit dem das Zenit Z und den Fußpunkt F verbindenden Durchmesser. Jede Kreissehne nun, welche auf der Himmelsachse $P_n P_s$ senkrecht steht, kann in unserem Bilde als der Repräsentant eines von einem Stern durchlaufenen Kreises angesehen werden.

Fig. 4.



sentant eines von einem Stern durchlaufenen Kreises angesehen werden. Zwei solche Sehnen sind NN' und SS'; jede in das Kreissegment (resp. in die Kalotte) $NN'P_n$ und $SS'P_s$ fallende Parallelsehne trifft die den Horizont markierende Linie NS erst in ihrer Verlängerung, während jede andere solche Sehne, wie etwa LL', die Nordsüdlinie — in M — durchschneidet. Um diese Beziehungen bequem darstellen zu können, führen wir für den Bogen NP_n oder, was dasselbe ist, für $\sphericalangle\, NCP_n$ eine besondere Bezeichnung ein:

Die Polhöhe. *Unter Polhöhe verstehen wir den kürzesten Winkelabstand des Poles vom Horizontalkreise,*

---

der Natur vorgeschriebene dann erscheint, wenn es sich um die Abbildung von sehr weit entfernten Objekten, von der Oberfläche eines Himmelskörpers etwa, handelt. So hält z. B. jede Mondkarte ganz von selbst die Gesetze der orthographischen Abbildung ein.

d. h. den Abstand des Poles vom Nord- resp. Südpunkte.

Bezeichnen wir jetzt — und ebenso künftig in allen Fällen — die Polhöhe mit φ, so kann das Verhalten der Sterne bezüglich ihrer totalen, partiellen oder überhaupt nicht vorhandenen Sichtbarkeit folgendermaßen kurz charakterisiert werden:

Alle Sterne, deren Angularabstand vom nördlichen Himmelspole $< \varphi$ *ist, gehören zu den nördlichen, alle Sterne, deren Angularabstand von eben diesem Pole* $> 180^0 - \varphi$ *ist, gehören zu den südlichen Zirkumpolarsternen; alle Sterne endlich, die mit ihren Poldistanzen zwischen diesen Grenzen enthalten sind, gehen auf und unter.*

Unsere Definition der Worte „Pol" und „Himmelsachse" war, wie man sich entsinnt, eine rein geometrische; wir nahmen wahr, daß jeder einzelne Stern sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf seiner Kreisbahn bewege, und suchten die Linie auf, welche die Mittelpunkte aller dieser Kreise in sich enthält. Da aber die Umdrehungsgeschwindigkeit für sämtliche Gestirne die gleiche ist, so können wir unseren Beobachtungen noch eine andere, bessere Deutung geben, nämlich diese [1]):

Die scheinbare Himmelskugel dreht sich samt den an ihr befestigt zu denkenden Sternen mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihre Achse, und dadurch sind die Erscheinungen des Auf- und Unterganges veranlasst.

Einige weitere Konsequenzen dieser Thatsache haben wir noch zu ziehen. Bei jedem nicht zur Kategorie der Zirkumpolarsterne gehörigen Gestirne ist ein *Sichtbarkeitsbogen* und ein *Unsichtbarkeitsbogen* zu unterscheiden, die beide zusammen den *Tageskreis* des Gestirnes ausmachen. Die beiden Ausdrücke beziehen sich lediglich auf das Vorhandensein des die eine Himmelshalbkugel verdeckenden Horizontalkreises; ein Stern kann, wenn er zugleich mit der

---

[1]) Bis hierher reicht ungefähr der Inhalt des bereits erwähnten Leitfadens der astronomischen Sphärik von Autolycus (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 112 ff.), nur daß daselbst auch die von uns dem nächsten Abschnitte vorbehaltene Ekliptik eine Stelle gefunden hat.

Sonne am Himmel steht, für das unbewaffnete Auge [1]) sehr wohl unsichtbar sein, obwohl er seinen Sichtbarkeitsbogen beschreibt. Die Bezeichnungen *Tagbogen* und *Nachtbogen* sind wohl an sich verständlich.

Aequator und Aequatorhöhe. Unter den unzähligen Tageskreisen befindet sich ein einziger größter Kreis, der den Horizont längs der Ostwestlinie durchschneidet. Sein Bild ist in unserer *Fig. 4* durch den Kreisdurchmesser AA' repräsentiert. Wir nennen diesen Hauptkreis der Himmelskugel ihren *Aequator*, den Angularabstand seines Kulminationspunktes vom Süd- resp. Nordpunkte die *Aequatorhöhe.* Letztere ergänzt ersichtlich die Polhöhe φ zu neunzig Grad. Für einen im Aequator umlaufenden Stern ist naturgemäß der Sichtbarkeitsbogen dem Unsichtbarkeitsbogen, die Sichtbarkeitsdauer der Unsichtbarkeitsdauer gleich. Wenn zwei Tageskreise vom Aequator gleichen Abstand zu beiden Seiten haben, wie dies z. B. für die Kreise LL' und RR' *(Fig. 4)* der Fall ist, so ist der Sichtbarkeitsbogen des einen Kreises gleich dem Unsichtbarkeitsbogen des anderen Kreises. Geometrisch ist dies gleichbedeutend mit den leicht erweisbaren Gleichheiten $LM = R'T$ und $L'M = RT$, wo T den Durchschnittspunkt der Sehne RR' mit der Nordsüdlinie bezeichnet.

Für den die acht merkwürdigen Punkte Z, P_n, N, A', F, P_s, S und A umfassenden Vertikalkreis hat uns bisher eine Bezeichnung gefehlt. Dieselbe wird uns jedoch durch den Umstand geliefert, daß dann, wenn die Sonne ihren Kulminationspunkt A erreicht hat, *Mittag* eingetreten ist. Wir nennen deshalb diesen Kreis den *Mittags-*

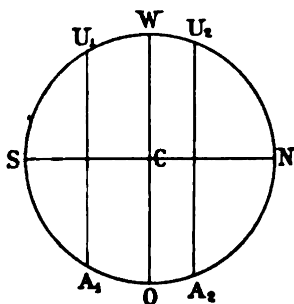
---

[1]) Die Fernrohre sind heutigen Tages zu einem solchen Grade der Vollkommenheit gebracht, daß man Sterne zweiter Größe noch in großer Nähe an der Sonne aufzufinden und zu beobachten imstande ist. Ehedem glaubte man, daß in tiefen Schachten das diffuse atmosphärische Licht hinlänglich abgehalten sei, um aus deren Grunde mit freiem Auge Sterne erkennen zu können. In Wahrheit jedoch ist dieser Glaube ein irriger, wie A. v. Humboldts umfassende Nachforschungen (Kosmos, 3. Band, Stuttgart und Augsburg 1850. S. 71 ff.) außer Zweifel gesetzt haben.

kreis oder *Meridian* (circulus meridianus, κύκλος μεσημβρινός); die Nordsüdlinie führt auch den Namen *Mittagslinie.* Jener Hauptkreis, der auf der Ebene des Meridianes senkrecht steht und den Horizont längs der Ostwestlinie schneidet, ist der *erste Vertikal.* In *Fig. 4* projiziert sich derselbe in der Linie *ZF.*

Morgen- und Abendweite. Der Bogenabstand zwischen dem Aufgangspunkte eines Sternes und dem Ostpunkte nennen wir die *Morgenweite* des ersteren, den Bogenabstand zwischen dem Untergangspunkte und dem Westpunkte die *Abendweite.* Projizieren wir die Himmelskugel orthographisch auf die Ebene des Horizontes, wie es *Fig. 5* zur Anschauung bringt, so stellen sich sämtliche Tageskreise durch die Sehnen dar, welche sie mit dem Horizontalkreise gemein haben. *C* (*Fig. 5*) ist zugleich der Riß des Zenitalpunktes, die Buchstaben *N*, *S* haben ganz dieselbe Bedeutung, wie in *Fig. 4*; *O* ist Ost-, *W* der Westpunkt, $A_1 U_1$ ist eine der erwähnten Sehnen; da $A_1 U_1$ parallel zu OW ist, so ist nach einem bekannten Lehrsatze der Planimetrie auch arc OA_1 = arc WU_1, in Worten: *Die Morgenweite eines Sternes ist seiner Abendweite gleich.* Versehen wir die Morgen- und Abendweiten der näher an *N* auf- und untergehenden Sterne mit dem positiven Vorzeichen, so sind beispielsweise OA_2 und WU_2 mit dem positiven Zeichen in Rechnung zu bringen, den Punkten *O* und *W* kommt die Morgen- und Abendweite Null zu.

Fig. 5.



Damit wären diejenigen geometrischen Elementarbegriffe vollständig erläutert, welche für die sogenannte *Sphärik*, die Lehre von den an der Himmelskugel sich vollziehenden Bewegungen die unerläßliche Grundlage

bilden. Dagegen haben wir jetzt noch darauf Bedacht zu nehmen, wie sich für uns aus diesen Bewegungen ein *Mäss der Zeit* ergibt.

Elementare Zeitbegriffe. Die Bewegungen der Sterne haben sich uns als *gleichförmige* zu erkennen gegeben, und so ist uns das erwähnte Zeitmaß durch die — scheinbare — *Umdrehung der Himmelskugel* ganz von selbst gegeben. Wir nennen diese Zeit die *Sternzeit,* die zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Kulminationen eines und desselben Himmelspunktes [1]) verflossene Zeit den *Sterntag,* und teilen denselben in 24 gleiche Teile, die *Stunden,* jede Stunde wieder in 60 gleiche Teile, die *Minuten,* jede Minute wieder in 60 gleiche Teile, die *Sekunden.* Während die bürgerliche Zeitrechnung nur von 12 Uhr mittags bis 12 Uhr nachts zählt und von da an die Zählung aufs neue beginnen läßt, pflegt man in der Astronomie durch alle 24 Stunden hindurchzuzählen. Wenn man eine in diesem Sinne vorgerichtete künstliche Uhr besitzt und an einem Tage konstatiert hat, daß der Meridiandurchgang eines gewissen Sternes mit der Zeitangabe $21^h\ 8^m\ 34^s$ zusammenfällt, so weiß man, daß regelmäßig die Kulmination — absolut richtigen Gang der Uhr vorausgesetzt — des betreffenden Sternes in dem Momente eintreten wird, wenn der Stundenzeiger zwischen 21 und 22, der Minutenzeiger zwischen 1 und 2 auf 8, der Sekundenzeiger endlich auf dem Teilstriche 34 seines besonderen Kreises angelangt ist. 24 Stunden entsprechen in Zeit den 360 Graden der Kreisperipherie, und es ist mithin ganz leicht, mittelst einer Dreisatzrechnung aus dem Zeitmaße zum Bogenmaße oder umgekehrt den Uebergang zu machen. Näheres hierüber s. u. X.

Allerdings ward im vorstehenden stets vorausgesetzt, daß nur Individuen aus der ungeheuer überwiegenden Anzahl der uns bereits bekannten Sterne ins Auge ge-

---

[1]) Bei den obigen Worten war stillschweigend die Bedingung gemacht, daß der fragliche Stern nicht zu den Cirkumpolarsternen gehöre; wäre letzteres der Fall, so müßte selbstredend zwischen oberem und unterem Meridiandurchgange unterschieden werden.

faßt werden, welche außer der täglichen Umdrehung der Himmelskugel gar keine eigene Bewegung erkennen lassen und deshalb mit Recht als *Fixsterne* bezeichnet werden. Bei einigen wenigen Himmelskörpern gestalten sich die Verhältnisse etwas verwickelter, wie wir demnächst sehen werden.

IV. Erfahrungen über die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten.

Scheinbare Bewegung der Sonne. Wir wählen als den Tag, in welchem wir eine fortlaufende Beobachtung der Sonne beginnen, denjenigen, an welchem ihr Sichtbarkeitsbogen der kleinste, ihre Kulminationshöhe die geringste ist. Für ganz Europa und Nordamerika, für den weitaus größten Teil von Asien und für den größeren von Afrika ist dieser Tag der 21. Dezember. Wenn wir uns den Aufgangspunkt an dem erwähnten Tage genau merken, so nehmen wir wahr, daß sich derselbe in den allernächsten Tagen kaum merklich verschiebt, auch Tagesbogen und Kulminationshöhe erleiden nur eine ganz unwesentliche Veränderung. Allein schon nach fünf bis sechs Tagen ist sowohl der Aufgangs- als auch — naturgemäß — der Untergangspunkt der Sonne vom Südpunkte des Horizontes weiter entfernt, als er es ursprünglich war, der Tagesbogen ist größer geworden und ebenso die Kulminationshöhe. So geht es fort, bis am 21. März die Sonne genau im Ostpunkte sich erhebt, um genau im Westpunkte unterzugehen: *Ihr Tageskreis fällt also mit dem Himmelsäquator zusammen, Tag und Nacht sind gleich lang.* Von jetzt ab liegen Auf- und Untergangspunkt dem Nordpunkte näher als dem Südpunkte, der Tagesbogen der Sonne ist größer als der Nachtbogen, und damit übertrifft also auch der Tag an Länge die Nacht. Am 21. Juni ist wiederum ein Grenzfall eingetreten; mehrere Tage lang scheint die Sonne genau denselben Kreis an der Himmelskugel zu beschreiben, aber allmählich sinkt sie am Himmel wieder herab, die

Mittagshöhe wird mit jedem folgenden Tage eine geringere, und am 23. September bewegt sie sich wieder genau im Aequator, um tags darauf endgültig auf die Südhalbkugel des Himmels überzutreten. Von jetzt ab überwiegt wieder an Größe der Nachtbogen den Tagbogen, die Nacht den Tag, Sichtbarkeitsbogen, Kulminationshöhe und Tageslänge nehmen immerfort ab, bis sie am 21. Dezember wieder — natürlich den gleichen Beobachtungsort angenommen — ihr absolutes Minimum erreichen. Nunmehr ist der Kreislauf der Erscheinungen vollendet, und es beginnen sich dieselben völlig in der gleichen Reihenfolge zu wiederholen, wie wir dies angegeben haben.

Fassen wir diese Angaben in wenigen Worten zusammen, so können wir sagen: *Die Sonne besitzt, abgesehen von der auch für sie massgebenden täglichen Umdrehung der Himmelskugel, auch eine selbständige Bewegung, welche nur um den 21. Dezember und 21. Juni herum erloschen zu sein scheint. Man sagt deshalb, in jener Zeit sei das Solstitium — die Winter- und Sommersonnenwende — eingetreten. Demselben entspricht resp. der kürzeste und längste Tag. Vom Wintersolstitium bis zum Frühlingsäquinoktium — Tag- und Nachtgleiche — und ebenso vom Herbstäquinoktium bis zum Wintersolstitium haben Morgen- und Abendweite das negative, vom Frühlingsäquinoktium bis zum Sommersolstitium und von diesem wieder bis zum Herbstäquinoktium haben Morgen- und Abendweite das positive Vorzeichen. An den Aequinoktialtagen sind diese beiden Bogen gleich Null.*

Unmittelbar einleuchtend ist auch folgende Thatsache: An zwei Terminen, welche gleichweit von den Tagen der Aequinoktien resp. Solstitien abstehen, ergänzen sich der Sichtbarkeits- und Unsichtbarkeitsbogen der Sonne zu einem Vollkreise, die Tageslänge für den einen ist gleich der Dauer der Nacht für den anderen.

So weit reichen unsere aus unmittelbarer Beobachtung abgezogenen Kenntnisse über den Sonnenlauf[1]), und es

---

[1]) Obwohl wir die Lehre von den Beobachtungswerkzeugen erst weiter unten (in V.) im Zusammenhange abhandeln, so wollen

kommt jetzt darauf an, die einzelnen Erfahrungen zu einem theoretischen Bilde zu vereinigen. Das kann nur geschehen, indem wir uns der Wahrheit etappenmäßig nähern, und zwar sind vier verschiedene Stadien der fortschreitenden Erkenntnis zu unterscheiden.

1. *Da die einzelnen Tageskreise der Sonne unter sich parallel sind, so muss der Fortgang von einem dieser Kreise zum nächstfolgenden ein abrupter, unstetiger sein.*

Schon die einfachste Ueberlegung zeigt, daß diese Art der Bewegung eine viel zu unnatürliche ist, um an ihr festhalten zu können. Welche Kraft sollte die Sonne nach Vollendung eines Tageskreises zu dem nächsten empor heben oder herabziehen? Wir können uns nur vorstellen, daß an unserem Beobachtungsresultate eine gewisse Korrektion anzubringen ist, mit deren Berücksichtigung sich folgendes ergeben würde:

2. *Die Sonne bewegt sich in den einzelnen Windungen einer äusserst flachgängigen Schraube, so dass mithin der im Laufe eines Tages zurückgelegte Kurvenbogen nicht genau, sondern nur sehr angenähert mit einer Kreislinie zusammenfallen kann.*

Die Wendekreise. Die beiden Grundflächen des Cylinders, auf dessen — sphärisch gekrümmter — Mantelfläche wir uns diese Schraubenlinie beschrieben zu denken haben, sind wirkliche Kreise, und da, an ihnen angelangt, die Sonne ihren Bewegungssinn verändert, *sich wendet,* so nennen wir diese beiden Kreise die *Wendekreise* (κύκλω τροπικώ). Der nördliche von ihnen ist der *Wendekreis des Krebses,* der südliche der *Wendekreis des Steinbockes.* Messung mit einem geteilten Kreise lehrt, daß der Bogen-

---

wir doch hier gleich darauf hinweisen, daß Böttcher (Die Beobachtung des scheinbaren Sonnenlaufes durch die Schüler, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 16. Band. S. 161 ff.) gewisse Vorrichtungen angegeben hat, welche sehr geeignet sind, den oben geschilderten Vorgang in seinen einzelnen Phasen genauer zu analysieren und einer größeren Anzahl von Zuschauern, einer ganzen Klasse z. B., die Ortsveränderungen des Tagesgestirnes in ihrer Regelmäßigkeit anschaulich zu machen.

abstand eines jeden dieser beiden Kreise vom Himmelsäquator ungefähr 23 ½ ° beträgt[1]). Der Gesamtweg, welchen die Sonne zwischen beiden Solstitien zurücklegt, umfaßt demgemäß 47°.

Die in 2. dargelegte Auffassung der Sonne entspricht an und für sich den Erscheinungen ganz gut, doch hat man sich vergleichsweise doch wohl nur sehr selten bei ihr beruhigt[2]). Man bemerkte vielmehr bald, daß in Wahrheit die Bewegung der Sonne eine natürlichere sein müsse, und schon die älteren Griechen ermittelten den Sachverhalt durch ein Verfahren einfachster Art.

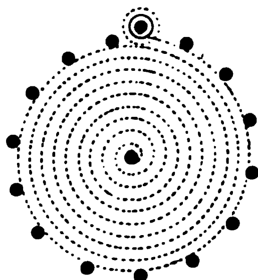
Wer die Route eines Reisenden in die Karte des bereisten Landes eintragen will, stellt fest, welche Orte derselbe immer am Ende eines bestimmten Zeitraumes besucht, an welchen er etwa sein Nachtquartier aufge-

---

[1]) In Wirklichkeit ist, wie sich später herausstellen wird, diese Zahl keine konstante, sondern eine zwischen gewissen Grenzen hin und her schwankende. Indessen liegen diese Grenzen glücklicherweise nicht allzuweit auseinander, und insbesondere kann für das laufende Jahrhundert die obige Zahl ohne Bedenken als der Wahrheit sehr nahe kommend gebraucht werden. Pytheas fand im vierten vorchristlichen Jahrhundert den Bogen = 23° 49′ 20″, der Araber Ibn Junis (um 1000 n. Chr.) = 23° 34′ 26″, Bradley (1750) = 23° 28′ 18″, und seitdem hat er wieder etwa um eine Minute abgenommen.

[2]) Sehr charakteristisch äußert sich über die Sache ein italienischer Kosmograph aus der Zeit vor Dante; seine Erörterung stützt sich auf *Fig. 6*; vgl. La composizione del mondo di Ristoro d'Arezzo, testo italiano del 1282, pubblicato da E. Narducci, Rom 1859. S. 28. „E cercando noi dal primo punto di capricornio, ed infino al primo del cancro, troviamo una via descritta ed avvolta a circonda sopra la terra 365 volte e quarta, la quale fuor tali savi che la chiamaro spira: e troviamola avvolta diutorno alla terra, come un filo avvolto su per uno bastone; e questa è fatta e descritta dal movimento del cielo, egli fa da oriente a occidente, e dal movimento del sole, dal mezzo die a settentrione, ed e contra.“

Fig. 6.



schlagen hat, und verbindet alle diese Orte durch einen Zug der Hand. Aehnlich, wenn es sich um die Festlegung der von einem Wandelstern an der Himmelskugel beschriebenen Bahn handelt; das, was vorhin die bekannten Städte oder Dörfer waren, das sind jetzt die Fixsterne, und indem man auf einem Himmelsglobus alle Fixsterne markiert, an welchen der bewegliche Stern direkt vorübergegangen ist, erhält man die gesuchte Zugstraße mit jeder gewünschten Genauigkeit. Wollen wir nun dieses Verfahren auf die Sonne übertragen, so macht sich allerdings der Uebelstand geltend, daß die Strahlen derselben es unmöglich machen, in ihrer nächsten Umgebung einen Stern, sei es auch mit Hilfe eines Fernrohres, zu erkennen. Dem hilft jedoch eine einfache Betrachtung ab. Wir messen jeden Tag die Kulminationshöhe der Sonne und sehen zu, welcher Fixstern unter denen, die genau um Mitternacht kulminieren, dieselbe Höhe besitzt; dieser Stern ist dann offenbar um 180° entfernt vom augenblicklichen Sonnenorte, und wenn wir alle diese Gegenpunkte im Laufe der Gesamtzeit von einer Sonnenwende bis wieder zu derselben auf dem Globus fixieren, so können wir durch diese eine Kurve hindurchlegen, welche mit der wirklich von der Sonne beschriebenen sich decken muß [1]). Nimmt man diese Prozedur wirklich vor, so stellt sich folgendes heraus:

Die Ekliptik. *3. Die Bahn der Sonne ist ein grösster Kreis der Himmelskugel. Wir nennen diese Bahn die Ekliptik* [2]), *den Winkel von ungefähr* $23^1/_2{}^0$, *welchen*

---

[1]) Wir nahmen dabei an, daß noch keine eigentlichen Instrumente zur Verfügung ständen. Gilt letzteres, so kann man ja den Sonnenort jeweils direkt durch Messung zweier Koordinaten festlegen (Martus, Astr. Geogr., S. 69), so daß also der Umweg, je einen um 180° abstehenden Stern der Sonne zu substituieren, nicht erforderlich wird.

[2]) Das Wort (ἐκλειπτικὸς κύκλος) hat eine eigenartige Entstehungsgeschichte. Später werden wir uns überzeugen, daß Finsternisse nur dann eintreten können, wenn Sonne und Mond gleichzeitig in nächster Nähe eines Knotenpunktes sich befinden. Für eine Finsternis aber hat die griechische Sprache die Bezeichnung

ihre Ebene mit derjenigen des Himmelsäquators einschliesst, die Schiefe der Ekliptik.

Die beiden Wendekreise haben sonach mit der Ekliptik je einen Punkt, die beiden *Solstitialpunkte,* gemein, dagegen durchschneiden sich Aequator und Ekliptik, wie alle Hauptkreise der Kugel, in zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten. Dies sind die *Aequinoktial-* oder *Knotenpunkte;* derjenige, in welchem die Sonne sich über die Ebene des Gleichers erhebt, ist der *aufsteigende,* derjenige, in welchem sie unter diese Ebene hinabsteigt, der *absteigende Knoten.*

Bei dieser Erkenntnis haben wir uns vorläufig zu beruhigen. Allerdings ist, wie wir oben andeuteten, noch ein weiteres Stück Weges zurückzulegen, bis wir zur endgiltigen Wahrheit durchgedrungen sind, allein von diesem Fortschritte kann erst weit später, im dritten Kapitel, ernstlich die Rede sein. Der von uns zunächst erreichte Standpunkt muß uns für das erste sowohl, wie auch für das zweite Kapitel genügen; auf ihm befand sich die doch schon einer recht achtungswerten Ausbildung teilhaftig gewordene mathematische Geographie der Griechen und Araber.

Tierkreis und Tierkreiszeichen. Ehe wir uns nun der Betrachtung der Mondbahn zuwenden, haben wir noch eine Bemerkung über den sogenannten *Tierkreis* zu machen. Die Versetzung desselben an den Himmel verliert sich in altersgraue Zeiten, wir wissen nicht einmal, bei welchem der älteren Kulturvölker er zuerst entstand, und wie er von da aus sich zu den anderen Nationen verbreitete [1]). Jedenfalls war schon den ältesten Griechen

„Ausbleiben des Lichtes“ (ἔκλειψις), und davon hat dann die ganze scheinbare Sonnenbahn ihren Namen erhalten. Uebrigens fehlt dieses Kunstwort noch den älteren Astronomen, deren Terminologie überhaupt — Euklid kennt den Scheitelpunkt nur als „Pol des Horizontes“ — noch eine recht wenig ausgebildete ist, und scheint nach R. Wolf (Gesch. der Astr., S. 112 ff.) erst in des Macrobius „Commentarius in somnium Scipionis“ (um 400 n. Chr.) sich vorzufinden.

[1]) Mit ungeheurem Aufgebote von sprachlicher Gelehrsamkeit hat G. Schlegel (Uranographie Chinoise, Haag 1875) den Nach-

diese Einteilung bekannt, und zwar noch vor der Entdeckung der Ekliptikschiefe [1]). Man teilte die Sonnenbahn in zwölf gleiche Teile oder *Tierkreiszeichen* und identifizierte jeden solchen Teil mit einem aus den umliegenden Fixsternen zusammengesetzten Sternbilde; da diese Bilder großenteils Tieren entsprechen sollten, so hatte auch die Bezeichnung *Zodiakus* (ζωδιακὸς κύκλος) ihren natürlichen Sinn. Damals, als die Griechen zuerst

---

weis zu führen unternommen, daß der Zodiakus und die ganze Einteilung des Firmamentes — nicht bloß des Zodiakalgürtels — in Sternbilder ihre Heimat in China hätten. So viel Richtiges in seinen Ausführungen zweifellos enthalten ist, so mußten doch die Kritiken des Werkes von J. Bertrand und dem Verf. (Journal des Savants, 1875. S. 557 ff.; Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellschaft, 12. Jahrgang. S. 28 ff.) betonen, daß Schlegels schrankenlose Hingebung an die oft sehr bedenkliche chinesische Ueberlieferung ihn vielfach zu unhaltbaren Behauptungen verleitet habe. Zu Anfang dieses Jahrhunderts war man geneigt, dem Tierkreise ein bis in das Jahr 3000 v. Chr. hinaufreichendes Alter zu verleihen; man hatte nämlich im Tempel von Denderah — antik Tentyra — ein die Tierkreisbilder enthaltendes Fries aufgefunden und glaubte die Anordnung der Zeichen nur eben im erwähnten Sinne interpretieren zu können. Allein Letronne zerstörte dieses Phantasiegebäude, indem er darthat, daß der betreffende Tempel verhältnismäßig neuen Datums ist, und neuerdings konnte Riel in einer höchst lesenswerten Monographie (Das Sonnen- und Siriusjahr der Ramessiden, Leipzig 1875) die Ansicht des französischen Forschers durch treffende Belege verifizieren. Danach wäre die Entstehung des Denkmals von Denderah in die hellenistische oder gar erst in die römische Periode zu verlegen. Wenn somit auch dieser Beweis für das hohe Alter des Tierkreises hinfällig geworden ist, so unterliegt es doch keinem Zweifel, daß er mindestens 800—1000 Jahre vor dem Beginne unserer Zeitrechnung bereits den chaldäischen und ägyptischen Astronomen bekannt gewesen sein muß. Welche Bewandtnis es mit den altindischen, aber auch den Arabern der vor Mohammeds Auftreten gelegenen Zeit geläufigen „Mondhäusern" oder „Mondstationen" eigentlich gehabt habe, wie zumal ihr Verhältnis zu den Tierkreiszeichen anzusehen sei, kann trotz A. Webers tiefgehenden Untersuchungen noch nicht mit Sicherheit angegeben werden.

[1]) Als Entdecker dieser Thatsache bezeichnet die griechische Tradition den Oenopides von Chios, doch hält P. Tannery (La tradition touchant Pythagore, Oenopide et Thalès, Bull. des sciences math. et astron., 2. série, vol. X. S. 115 ff.) die nicht näher substantiierte Angabe für wertlos.

in wissenschaftlicher Weise die Tierkreiseinteilung feststellten, fiel der aufsteigende Knoten der Ekliptik, der sogenannte *Widderpunkt* (♈) in das Sternbild des Widders hinein, der absteigende Knoten, der sogenannte *Wagepunkt* (♎), in dasjenige der Wage; heutzutage ist das Verhältnis ein anderes geworden, denn infolge einer gewissen Eigenbewegung des Himmels, die sich allerdings bei schärferer Betrachtung als mit einer gewissen Kreiselbewegung der Erdachse identisch erwiesen hat (vergl. 3. Kapitel, VIII.), fallen heute die *Tierkreiszeichen* mit den zugehörigen Sternbildern nicht mehr zusammen, sondern es ist jedes Zeichen in das zunächst darauf fallende Bild hineingerückt. Man läßt sich jedoch hierdurch nicht beirren, an den Ausdrücken Widderpunkt und Wagepunkt nach wie vor festzuhalten. Die Tierkreiszeichen haben die nachstehend aufgeführten Namen und Symbole[1]): Widder (♈), Stier (♉), Zwillinge (♓), Krebs (♋), Löwe (♌), Jungfrau (♍), Wage (♎), Skorpion (♏), Schütze (♐), Steinbock (♑), Wassermann (♒), Fische (♊). Mit dem Worte *Tierkreisgürtel* bezeichnen wir eine Zone der Himmelskugel, welche sich zu beiden Seiten des Zodiakus derart hinzieht, daß derselbe von den beiden parallelen Begrenzungskreisen des Gürtels jeweils um die Schiefe der Ekliptik absteht. Demnach wird der Tierkreisgürtel vom Himmelsäquator in zwei kongruente Hälften geteilt.

Eigenbewegung und Lichtgestalten des Mondes. Wesentlich ähnliche Erfahrungen, wie bei der Sonne, macht man auch bei der Verfolgung des vom Monde beschriebenen Weges, nur tritt noch der neue Umstand hinzu, daß derselbe nicht immer als eine gleichmäßig beleuchtete Scheibe erscheint, sondern sogenannte *Licht-*

---

[1]) Hierzu der Gedächtnisvers: „Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo; Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.“ Das Distichon kommt nach Wolf (Gesch. d. Astr., S. 188) zuerst in einem 1488 zu Straßburg gedruckten „Computus manualis“ vor.

gestalten oder *Phasen* erkennen läßt [1]). Wir gehen diesmal am besten vom Frühlingsäquinoktium aus; an diesem Tage sehen wir etwa den Mond als vollbeleuchtete Scheibe oder *Vollmond* sich in dem Augenblicke über den Osthorizont erheben, in welchem die Sonne unter den Westhorizont hinabsinkt. Beide Gestirne sind genau um 180° von einander entfernt. Der Vollmond scheint die ganze Nacht hindurch, erreicht eine Meridianhöhe von ungefähr $37\frac{1}{2}°$ und geht im Westpunkte unter, sobald die Sonne im Ostpunkte aufsteigt. Des folgenden Tages geht der Mond etwa eine Stunde später und etwas südlich vom Ostpunkte auf, erreicht nicht mehr die gleiche Kulminationshöhe, wie am Tage zuvor und geht somit auch etwas früher und südlicher unter. Oberflächlichen Beschauern scheint der Mond noch ganz voll zu sein, das schärfer blickende Auge hingegen nimmt wahr, daß auf der rechten Seite, vom Betrachtenden, nicht vom Monde aus gerechnet, die Scheibe eine kleine Einbuße erlitten hat. So geht es fort, Auf- und Untergangspunkt verschieben sich mit jedem Tage mehr nach Süden, die Verspätung resp. Verfrühung beträgt gegen den vorhergehenden Tag immer gegen eine Stunde — genauer 50^m —, der Sichtbarkeitsbogen wird ein immer kleinerer und eben dies gilt für die Höhe im Meridiane. Sieben Tage nach dem ersten Beobachtungstermine steht der Mond im *letzten Viertel*, d. h. die rechte Hälfte der Scheibe ist dem Anscheine nach vollständig verloren gegangen. In diesem Zustande geht der Mond um Mitternacht auf, um 6 Uhr früh, wenn die Sonne aufgeht, hat er seine größte Höhe erreicht, dann verblaßt er und geht mittags um 12 Uhr unter. Der Sichtbarkeitsbogen ist in diesem Falle dem-

---

[1]) Die Beobachtung des Mondlaufes macht ungleich mehr Schwierigkeiten und setzt ein größeres Maß von Aufmerksamkeit voraus, als diejenige des Sonnenlaufes. Wir kennen keine bessere Darstellung des Sachverhaltes als die, welche Diesterweg in seinem auch sonst wegen des ununterbrochenen Hinweises auf Selbstthätigkeit empfehlenswerten Werkchen „Populäre Himmelskunde und astronomische Geographie“ (Berlin 1868. S. 22 ff.) gibt, und diese ist denn auch für uns selbst oben maßgebend gewesen.

jenigen gleich, welcher der Sonne am 21. Dezember zukommt. Nunmehr tritt bezüglich des Auf- und Untergangspunktes ein umgekehrtes Verhalten ein, dieselben nähern sich wieder dem Ost- und Westpunkte, aber die Verspätung des Zeitpunktes des Aufganges dauert fort wie bisher, während auch zugleich die Mondgestalt eine immer sichelförmigere wird. Nachdem zwölf bis dreizehn Tage nach dem Vollmond verflossen sind, geht der Mond, als schmale Sichel, wieder sehr nahe dem Ostpunkte auf, aber unmittelbar vor dem Aufgange der Sonne, in deren Strahlen er sehr bald verschwindet. Hierauf entzieht er sich eine Zeitlang unserem Auge ganz und gar; wir nehmen an, daß er um diese Zeit direkt *mit* der Sonne auf- und untergeht, und wir sagen dann, es sei *Neumond* (νουμηνία) eingetreten [1]). Zwei Tage später erkennen wir den verschwundenen Begleiter wieder am Osthimmel, unmittelbar nach Sonnenuntergang; die Sichel ist ebenso dünn, wie sie es vier bis fünf Tage vorher gewesen war, aber die konkave und konvexe Seite der Sichel haben gegen damals die Plätze getauscht. Von Tag zu Tag zeigt sich jetzt am Abend der Mond höher am Himmel, Morgen- und Abendweite nehmen ebenso wie die Kulminationshöhe zu, die Sichel füllt sich mehr und mehr aus, und sieben Tage nach Neumond erglänzt das wieder erstarkte Gestirn im *ersten Viertel*, als welches es von 6 Uhr abends bis zu seinem um Mitternacht erfolgenden Untergange den Himmel erleuchtet. Von da an nähert sich die Mondgestalt wieder der einer vollen Scheibe, während zugleich der Auf- und Untergangspunkt wieder näher an den Ost- und Westpunkt heranrücken. Nach Verlauf von 28 Tagen ist der Mond wieder ganz voll geworden, doch besteht

---

[1]) Die jüdische Zeitrechnung ist vom Neumond in ganz ungewöhnlichem Grade abhängig, indem der Monatsanfang erst dann rechtmäßig begründet ist, wenn durch Zeugenaussagen das Erscheinen der schmalen Mondsichel am östlichen Horizonte außer Zweifel gesetzt ist. Vgl. hierüber und über die sonderbaren, zur Erlangung derartiger Zeugnisse angewendeten Manipulationen A. Schwarz, Der jüdische Kalender, historisch und astronomisch untersucht, Breslau 1872.

gegen früher der Unterschied, daß er nicht, wie vorhin, genau im Ostpunkte, sondern etwas südlich von diesem seinen Aufgangspunkt hat. Auch der weitere Verlauf ist ein analoger, nur gilt es immer zu beachten, daß die vom Monde an entsprechenden Tagen verschiedener Monate beschriebenen Bogen nicht die gleichen sind. Wenn die Sonne *am höchsten* steht, dann steht der Vollmond *am tiefsten* und umgekehrt. Für die vier merkwürdigsten Tage des Jahres, nämlich diejenigen der Aequinoktien und Solstitien, können wir die Hauptphasen charakterisieren, wie folgt [1]):

a) am 21. März: der Neumond tritt ein, wenn der Mond im Aequator steht, ebenso auch der Vollmond, das erste Viertel gehört dem Wendekreise des Krebses, das letzte Viertel dem Wendekreise des Steinbockes an;

b) am 21. Juni: erstes und letztes Viertel befinden sich im Aequator, der Neumond fällt in den Wendekreis des Krebses, der Vollmond in den des Steinbockes;

c) am 23. September: Neu- und Vollmond fallen wieder in den Aequator, das letzte Viertel ereignet sich im Wendekreise des Krebses, das erste in dem des Steinbockes;

d) am 21. Dezember: erstes und letztes Viertel befinden sich im Aequator; der Neumond fällt in den Wendekreis des Steinbockes, der Vollmond in den des Krebses [2]).

Um die wirkliche Gestalt der — wie bei der Sonne — anscheinend schraubenförmigen Bahn des Mondes zu ermitteln, bedienen wir uns auch eines völlig übereinstimmenden Verfahrens; diesmal können wir unmittelbar die Sterne festhalten, mit welchen ein bestimmter Punkt des

---

[1]) Diesterweg, S. 25 ff.

[2]) Sehr viele treffende Bemerkungen über die Aufgaben des geographischen Elementarunterrichtes, und u. a. auch über die Beobachtung des der ungeheuren Menge der Stadtbewohner nur von Hörensagen bekannten Mondlaufes enthält Geikies neuestes didaktisches Werk: The Teaching of Geography, suggestions regarding principles and methods for the use of teachers, London 1887. Vgl. die Inhaltsanalyse Levins im 6. Jahrgang der „Zeitschr. f. wissensch. Geogr." (S. 220 ff.).

Mondrandes in unmittelbare Berührung trat. So überzeugen wir uns von der Wahrheit folgender Thatsache:

Wahre Gestalt der Mondesbahn. *Die Bahn des Mondes ist ebenfalls ein grösster Kreis der scheinbaren Himmelskugel, und zwar fällt dieser Kreis nicht genau mit der Ekliptik (s. o.) zusammen, sondern bildet mit derselb'n einen Winkel von ungefähr 5°.*

Vorläufiges über Planetenbewegung. Nunmehr also haben wir betreffs der Bahnen, welche die beiden wichtigsten Himmelskörper beschreiben, Klarheit erlangt. Dagegen fehlt uns solche noch hinsichtlich der *Planetenbahnen.* Mit dem Namen *Planet* oder *Wandelstern* (*erro*, πλανήτης, von πλανάω, ich schweife herum) belegen wir einen Stern, der sich dem bloßen Aussehen nach nicht eben erheblich von einem Fixsterne unterscheidet [1]), der aber seinen Ort am Himmel unaufhörlich verändert. Die Planeten haben also eine doppelte Bewegung, einmal nehmen sie an der täglichen Umdrehung des Himmels teil, und außerdem machen sie unter den fixen Sternen Wege, deren scharfe Feststellung mancherlei Schwierigkeiten unterliegt. Bald ist ihre Bewegung eine schnellere, bald eine langsamere, gewöhnlich stimmt ihre Bewegungsrichtung mit derjenigen überein, welche auch dem Eigenlaufe von Sonne und Mond eignet, allein es ereignet sich auch, daß sie plötzlich *stationär* werden, d. h. eine Zeitlang unbeweglich am Firmamente zu stehen scheinen und dann wieder gehen sie aus der *rechtläufigen Bewegung* in die *rückläufige* oder *retrograde* über. Dabei kann es, wenn man mit einem Stifte die Bahn des Planeten auf einem Globus oder auf einer Sternkarte verzeichnet, zu einer vollständigen Schleifenbildung kommen.

[1]) Einen einigermaßen in die Augen fallenden Unterschied — Glitzern und Nichtglitzern — haben wir schon früher angedeutet. Auch erscheinen sehr viele Planeten in guten Fernrohren als Scheibchen von meßbarem Durchmesser, während eine solche Vergrößerung bei den Fixsternen über die unserer optischen Kunst gezogenen Grenzen hinauszugehen scheint.

Das Altertum kannte nur fünf solche Wandelsterne: *Merkur, Venus*[1]), *Mars, Juppiter, Saturn;* 1781 entdeckte dazu W. Herschel den *Uranus*; 1846 Galle den von Leverrier theoretisch an eine bestimmte Stelle der Himmelskugel verlegten *Neptun*, und dazu kommt noch, seitdem 1800 Piazzi mit der Auffindung der *Ceres* den Anfang machte, die große — heute schon bis zu 260 angewachsene, aber noch durchaus nicht abgeschlossene — Zahl der *kleinen Planeten (Planetoiden, Asteroiden)*. Die Erforschung der wahren Bahnverhältnisse bildet das Problem der sogenannten *theoretischen Astronomie*, kommt jedoch für die mathematische Erdkunde, so wie wir diese Disziplin weiter oben zu definieren versucht haben, nur sehr sekundär in Betracht, wie dies Kap. 3 des nähern ausweisen wird. Und noch viel weniger haben wir uns mit den teilweise so verwickelten Bahnverhältnissen der *Kometen* und *Meteorschwärme* zu befassen.

V. Die Prinzipien der astronomischen Beobachtungskunde in ihrer geschichtlichen Entwicklung.

Zweck der Gestirnsbeobachtung. Alle die Wahrnehmungen, welche wir bisher gesammelt haben, wurden ohne Zuhilfenahme irgend eines Instrumentes gemacht; das bloße Auge, nur geschärft durch anhaltende Uebung, mußte ausreichen, um uns in den Besitz aller der fundamentalen Thatsachen zu setzen, auf welchen sich das eigentliche Lehrgebäude der mathematischen Geographie errichten läßt. Um letzteres jedoch zu ermöglichen, ist es erste Vorbedingung, daß wir uns aus dem Stadium bloßen *Beobachtens* der himmlischen Erscheinungen

[1]) Dieser Planet erscheint stets in der Nähe der auf- oder untergehenden Sonne als *Morgenstern* (Phosphorus, Lucifer) oder als *Abendstern* (Hesperus). Ob, wie man früher annahm, bereits Pythagoras die thatsächliche Einerleiheit beider Erscheinungen erkannt hat, ist neuerdings zweifelhaft geworden (Sartorius, a. a. O., S. 49). Noch viel weniger tritt Merkur aus den ihn überglänzenden Strahlen des Tagesgestirnes hervor.

zu demjenigen des *Messens* erheben, und es gilt demgemäß, zu zeigen, welche *Instrumente* zu diesem Zweke gebraucht werden können, und wie man mit denselben zu operieren hat. Nun ist es leicht erklärlich, daß die in älteren Zeiten gebrauchten Beobachtungswerkzeuge einfacher gebaut waren, als die modernen, und somit auch viel leichter sich handhaben ließen, während heutzutage gewisse anscheinend untergeordnete Einzelheiten, die aber gleichwohl im Interesse scharfer Messung unentbehrlich sind, die prinzipielle Einfachheit der Konstruktion nicht recht zur Geltung kommen lassen. Wer also das Wesen der astronomischen Meßinstrumente sich zur vollen Klarheit bringen will, wird gut thun, deren Entwicklung historisch durch die primitiven und durch alle späteren Etappen hindurch zu verfolgen, und ebenso gedenken auch wir in diesem Abschnitte zu handeln.

Der Gnomon. Das älteste diesen Namen wirklich verdienende Beobachtungsinstrument, von welchem wir Kenntnis haben, ist der *Gnomon* oder *Sonnenweiser* (γνώμων). Man versteht darunter eine Vorrichtung zur *Schattenmessung*, indem, wenn die Höhe eines Gegenstandes h und die Länge l des von demselben in der Horizontalebene geworfenen Schattens bekannt sind, daraus die Größe des Bogens, um welchen die Sonne im Momente der Messung vom Horizonte absteht, gefunden werden kann [1]). Daß Aegypter und Babylonier am Gnomon ihre Sonnenhöhen gemessen und so den ersten angenäherten Wert für die Schiefe der Ekliptik ermittelt haben, unterliegt wohl keinem Zweifel [2]), die erste urkundliche Erwähnung der Sache aber begegnet uns in einem chinesischen Werke, dessen Abfassungszeit vielleicht um ein halbes Jahrtausend vor dem Beginne der christlichen Zeitrechnung liegt [3]). Der Gnomon war ferner von Anfang an

---

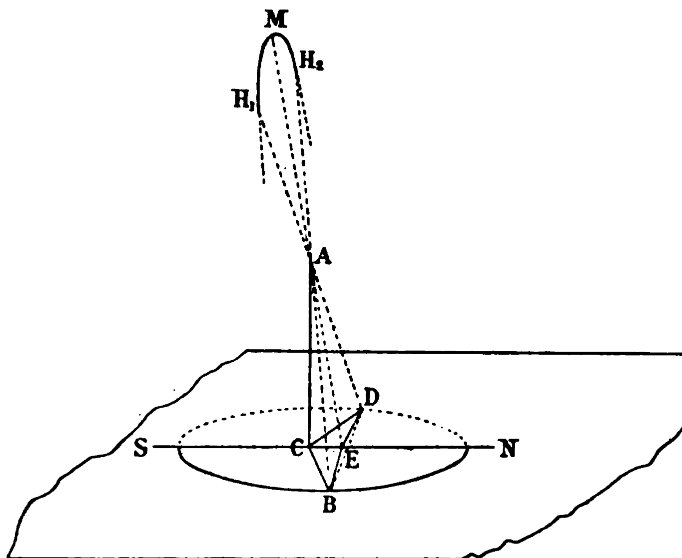
[1]) Bezeichnet man den Höhenwinkel mit φ, so ist offenbar $\operatorname{tg} \varphi = h : l$. Diese einfache Formel ist allerdings erst eine Errungenschaft der Araber.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 4.

[3]) Ibid. S. 122. Der Titel des betreffenden altchinesischen Werkes, auf welches die Aufmerksamkeit der abendländischen Ge-

das bequemste Mittel *zur Ziehung der Mittagslinie*, v
welcher dann wieder die Einteilung des Horizontalkreis

Fig. 7.



in seine vier Kardinalpunkte abhängig ist. In *Fig.*
ist *AC* die Gnomonsäule; um den Fußpunkt *C* als Mitte

lehrten zuerst durch den Jesuiten Gaubil (Histoire abrégée
l'astronomie Chinoise, Paris 1729) hingelenkt ward, ist „Tsche
péy", und die Regel zur Anfertigung eines Gnomons hat dortsel
(Wolf, a. a. O.) nachstehenden Wortlaut: „Man nehme einen Bamb
stab, steche in denselben in einer Höhe von 8 Fuß ein Loch v
1/10 Fuß Durchmesser; diesen Stab stelle man auf vorher geebnet
Boden senkrecht auf; dann suche man den Schatten desselben u
beobachte ihn!" Auch in Indien geht der Gebrauch des Gnomo
ziemlich weit hinauf, wie aus Legentils Erzählungen (Geschich
der Astronomie, 1. Teil, Chemnitz 1792. S. 191) hervorgehen dürf
Was die Babylonier anlangt, so scheinen deren astronomische Ken
nisse nicht erst im Zweistromlande erworben, sondern ihnen v
den Sumeriern übermittelt worden zu sein; vgl. den nach Say
gearbeiteten Aufsatz „Die Sternkunde der Babylonier" im „Siri
(8. Band. S. 241 ff.).

punkt beschreiben wir einen horizontalen Kreis, und auf dessen Peripherie bemerken wir die beiden Punkte B und D, in welchen die Peripherie von dem Ende des Schattens vor- und nachmittags getroffen wird. Wir sahen, daß die Bewegung der Sonne eine gleichförmige ist [1]), und es müssen sonach die Zeiten gleichlang sein, welche zwischen dem Momente des Meridiandurchganges einerseits und den beiden Zeitpunkten anderseits verfließen, in welchen die Sonne am Vor- und Nachmittage die nämliche Höhe über dem Horizonte erreicht. H_1 und H_2 seien diese Punkte der Himmelskugel, M sei der Kulminationspunkt; alsdann ist arc $H_1M =$ arc H_2M, $\sphericalangle H_1AM = \sphericalangle H_2AM$, die Verbindungslinien H_1D und H_2B müssen sich in A begegnen. Der Durchschnitt der Meridianebene, welcher M angehört, mit dem Horizonte liefert die Mittagslinie, welche von der verlängerten MA in E getroffen werden möge. Ziehen wir noch CB und CD, so sind die Dreiecke ACB und ACD, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, einander kongruent, und damit ist auch $AB = AD$. Nunmehr fassen wir die beiden Dreiecke AEB und AED ins Auge; in ihnen sind je zwei Seiten gleich und ebenso die Winkel BAE und DAE als Scheitelwinkel zweier vorher als gleich erkannter Winkel; die Dreiecke sind kongruent, und es ist $BE = DE$. Es stimmen somit die beiden Dreiecke CBE und CDE in den drei Seiten überein, und aus ihrer Kongruenz entfließt die neue Gleichheit: $\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCE$; in Worten [2]):

Verbindet man mit dem Fusspunkte des Gnomons die beiden charakteristischen Punkte der um diesen Fusspunkt als Mittelpunkt beschriebenen horizontalen Kreislinie und

[1]) Ganz strenge richtig ist dies, wie wir vorhin sahen, wohl nicht; die Tagesbahn der Sonne durchschneidet den Meridian nicht ganz genau rechtwinklig, und infolge dessen ist auch die Gleichheit korrespondierender Meridianabstände keine absolute.

[2]) Lediglich der Kürze halber haben wir die beiden Punkte, in welchen die zugleich der Tagesbahnebene der Sonne parallele Sehne BD die Peripherie trifft, als *charakteristische* Punkte bezeichnet.

halbiert den von den Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel, so ist mit dieser Halbierungslinie zugleich die Mittagslinie gegeben.

Ziehung der Mittagslinie. Das Verfahren erfordert, wie man sieht, nur ein Minimum von mechanischen Verrichtungen. Man kann es einigermaßen dadurch verfeinern, daß man eine größere Anzahl von Kreisen konstruiert, für jede einzelne Peripherie die charakteristischen Punkte aufsucht und unter der Vielzahl von Halbierungslinien, welche man dabei erhält, gewissermaßen eine mittlere nimmt. Uebrigens fehlt es auch nicht an anderen Methoden zur Ausmittlung der Nordsüdlinie [1]), denn dieses

[1]) Wie die römischen Feldmesser zu Werke gingen, wenn sie ihre Koordinatenachsen *Cardo* (Nordsüdlinie) und *Decimanus* (Ostwestlinie) im Terrain — etwa zur Anlegung eines Tempels oder einer neuen Stadt — bestimmten, das ist von M. Cantor (Die römischen Agrimensoren, Leipzig 1875. S. 66 ff.) sehr anschaulich auseinandergesetzt worden. Man verfuhr entweder so, wie es eben beschrieben wurde, oder man stellte wohl auch die Diopterröhre des einfachen Meßinstrumentes *(groma)* wagrecht so auf, daß dadurch genau der Auf- resp. Untergangspunkt der Sonne anvisiert werden konnte; freilich gab dieses Verfahren nur an einem Aequinoktialtage ein ganz zutreffendes Resultat. Eine dritte Methode ist diejenige, mit welcher uns der Gromatiker Hyginus (vgl. die große Gesamtausgabe aller auf römische Feldmeßkunst bezüglichen Dokumente von Blume, Lachmann und Rudorff, 1. Band. S. 170 ff.) bekannt gemacht, deren wahren Sinn aber erst in unserem Jahrhundert Mollweide aufgeklärt hat. Von ihr, die gewiß nicht von einem Praktiker, sondern von einem sehr sachkundigen Mathematiker erdacht wurde, sagt Cantor (Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880. S. 453 ff.): „Die dritte Methode machte von drei ungleichen Schattenlängen Gebrauch, welche in kurz aufeinander folgenden Zeitpunkten, aber sämtlich vormittags, auf der Grundebene des Skiotherums verzeichnet worden waren ... Es muß eine griechische Methode aus der Zeit entwickelter Stereometrie sein, wenn es auch nicht möglich gewesen ist, sie bei irgend einem der uns erhaltenen griechischen Astronomen nachzuweisen.“ Später liebte man es, den einfachen Zweck vermittelst mehr oder minder künstlicher Apparate zu erreichen, die jedoch durchaus keine höhere Genauigkeit verbürgen als das richtig gehandhabte Zeichnungsverfahren. Die detaillierte Beschreibung solcher Apparate findet man z. B. bei C. v. Wolf (Anfangsgr. d. math. Wissensch., 3. Teil. S. 189 ff.) und bei Liebknecht (Elem. Geogr., S. 154 ff.).

Geschäft hatte für die ältere Geodäsie und Astronomie eine ungemein große Bedeutung. Vielfach fixierte man die Mittagslinien in ausgezeichneten Gebäuden, Kirchen u. s. w.; im Dache war eine kleine Oeffnung so angebracht, daß gerade um die Mittagszeit ein Strahl auf diese Linie fallen und darauf ein Sonnenbildchen entwerfen konnte [1]; all diese täglich ihren Platz wechselnden Bildchen kamen auf die Mittagslinie zu liegen, deren Richtigkeit auf diese Weise kontrolliert zu werden vermochte. Es darf auch von einer solchen Kontrolle niemals auf die Dauer Abstand genommen werden, da selbst eine für den Augenblick als vollkommen korrekt anzuerkennende Mittagslinie diese ihre Eigenschaft mit der Zeit einbüßen kann [2].

Die Messungen, welche man mit Hilfe des Gnomons vorzunehmen imstande war, konnten der Natur der Sache nach nur auf gewisse Probleme von nicht eben großem

---

[1] Sehr bekannt ist unter diesen stabilen Mittagslinien diejenige, welche Egnatio Danti 1556 in der Kirche des hl. Petronius zu Bologna zog und durch Belegung mit farbigem Marmor fixierte; allerdings erwies sich dieselbe nicht als hinlänglich genau und mußte deshalb 100 Jahre nachher durch Dom. Cassini einer Revision unterzogen werden; vgl. Manfredi, Liber de gnomone meridiano Bononiensi, Bologna 1736. Aehnliche Kirchengnomone findet man in Florenz, Paris (St. Sulpice), Rom; über letzteren und die ihm gewidmete Medaille handelt Bianchini: De numo et gnomone Clementino, Rom 1725. Eine Art Gnomon repräsentiert ferner die bekannte, in St. Petersburg elegant durchgeführte Spielerei, durch das aus dem Kulminationspunkte der Sonne entsendete Strahlenbündel eine kleine Kanone abfeuern zu lassen (Mittagssignal).

[2] Eine sorgfältige Untersuchung der Fehler, welche aus der Abweichung einer Mauer von der Vertikalen und überhaupt aus den — gar nicht so seltenen — spontanen Bodenverschiebungen für Gnomon und Meridianlinie resultieren, besitzt man von Wallot (Commentat. Acad. Theodoro-Palatinae, vol. III. S. 319 ff.). An eine periodische Aenderung in der Richtung der Mittagslinie ist dagegen nicht zu denken; vgl. eine Abhandlung von Wallis (Phil. Transactions, 1699). Man wollte auf dergleichen schließen aus einer Angabe in der „Naturgeschichte" des Plinius (lib. XXXVI, cap. 10), die sich auf den vom Kaiser Augustus auf dem Marsfelde aufgestellten und speziell zum Gnomon bestimmten ägyptischen Obelisken bezieht.

Umfange sich beziehen; für andere Aufgaben mußten auch andere instrumentelle Hilfsmittel verfügbar gemacht werden. Das sah auch bereits das griechische Altertum klar ein, und eine ganze Reihe von Winkelmeßinstrumenten sollte den verschiedenen von der astronomischen Forschung angestrebten Zwecken genügen [1]). Da dieselben ausnahmslos auch für Ortsbestimmungsaufgaben, wie sie die mathematische Geographie stellt, Verwendung gefunden haben, so können wir uns an dieser Stelle ihrer Betrachtung nicht entschlagen, doch werden wir Altertum und Mittelalter nicht scharf trennen, wie denn auch in der Zeit vor Erfindung des Fernrohres die Erzielung prinzipieller Fortschritte ausgeschlossen war.

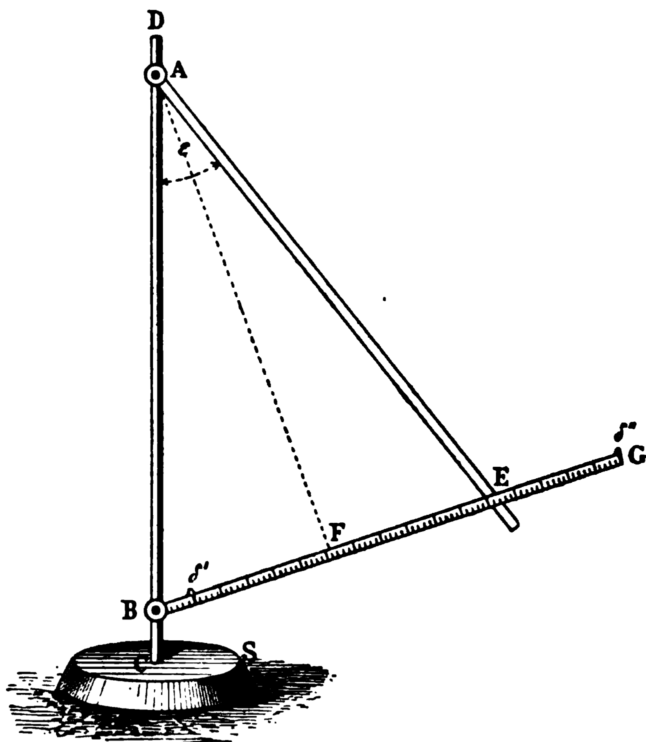
Das Triquetrum. An die Spitze stellen wir die Instrumente *mit geteilten graden Linien.* Das erste derselben ist das von Ptolemäus im fünften Buche seines Almagest näher beschriebene *Triquetrum*, eine Kombination von drei Linealen, mit welcher noch Coppernicus die große Mehrzahl aller der Beobachtungen anstellte, durch welche er seine neue Weltordnung stützen zu müssen glaubte [2]). In *Fig. 8* sehen wir das Triquetrum vor uns; dasselbe gestattet uns, die Größe des Bogens zu ermitteln, um welchen ein Stern vom Zenit entfernt ist. Auf einem Stative S erhebt sich ein vertikaler Stab CD, und auf diesem ist eine bestimmte Länge $AB = c$ abgegrenzt. Um die Punkte A und B als Pivots sind zwei weitere Stäbe drehbar, so zwar, daß der Punkt E, in welchem sich dieselben durchkreuzen, von A stets um eine Länge $AE = AB = c$ entfernt sein muß. Der Stab BG trägt

[1]) Neben dem Wolfschen Werke, welches auch der Geschichte der Instrumentenkunde ausgiebigst gerecht wird, gewährt über diesen Gegenstand erwünschte Belehrung eine Monographie von Junghans: Ueber Methode und Genauigkeit astronomischer Beobachtungen bei den Alten, Stettin 1870.

[2]) Vgl. Nikolaus Coppernicus aus Thorn über die Bewegungen der Himmelskörper, deutsch von Menzzer, Thorn 1879. S. 226 ff. Coppernic bezeichnet das ptolemäische Triquetrum als *parallaktisches Instrument*; das Verhältnis $AE : BG$ war bei ihm $= 1000 : 1414 = 500 : 707$.

zwei auf seiner Achsenrichtung senkrecht stehende Diopter δ', δ''; das Auge des Beobachters wird vor δ' gebracht, und alsdann wird das Instrument so lange verschoben, resp. der Arm BE so lange gedreht, bis der betreffende

Fig. 8.



Stern durch δ'' erblickt wird. Jetzt ist $\sphericalangle ABE = \zeta$ die gesuchte Zenitdistanz. Der Stab BG ist seiner ganzen Länge nach in gleiche Teile von der Größe a geteilt, der Punkt E befinde sich beim $n$ten Teilstriche, so daß $BE = an$ wird. Wir denken uns aus A auf BG

das Lot AF gefällt; dadurch wird $\sphericalangle BAF = \frac{\varepsilon}{2}$, und das rechtwinklige Dreieck ABF liefert uns diese Relation: $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \cos\zeta = \frac{an}{2c}$. Damit war, da man schon zu Ptolemäus' Zeit trigonometrische Tabellen besaß, die oben angedeutete Aufgabe gelöst.

Das geometrische Quadrat. Ziemlich auf demselben Grundsatze beruhte das *geometrische Quadrat*, eine

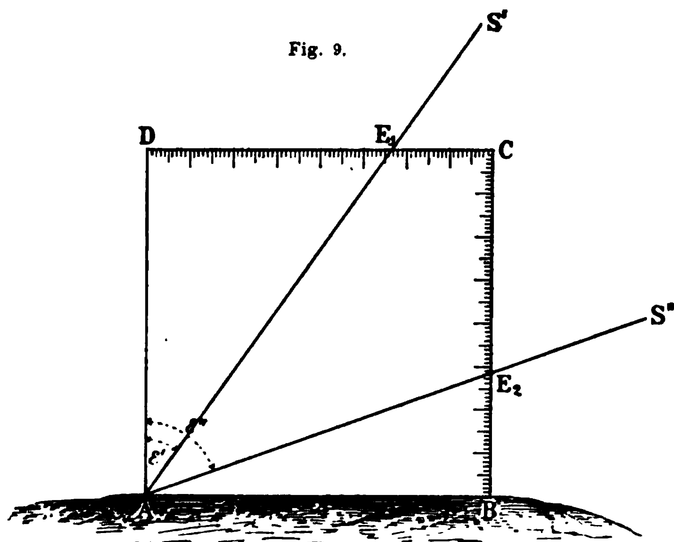


Fig. 9.

Erfindung des deutschen Mathematikers Peurbach[1]) (1429—1461). Wir haben uns darunter nichts als ein

[1]) Die kleine Schrift, welche das neue Instrument in die Wissenschaft einzuführen bestimmt war, kam erst posthum heraus: Quadratum geometricum praeclarissimi mathematici Georgii Burbachii, Nürnberg 1516. Deren ins einzelne gehende bibliographische Beschreibung s. bei Kästner (Geschichte der Mathematik, 1. Band, Göttingen 1796. S. 529 ff.).

massives Viereck mit gleichen Seiten und Winkeln zu denken, um dessen einen Eckpunkt ein mit Sehlöchern versehenes Drehlineal beweglich ist. *A (Fig. 9)* sei dieser Eckpunkt des Quadrates $ABCD$, welches etwa mit seiner Seite AB den horizontalen Boden berührt. Das Auge in A sieht nach dem Sterne hin; dabei können aber zwei Fälle eintreten; entweder nämlich schneidet der Gesichtsstrahl AS' die horizontale Seite[1]) CD (in E_1) oder aber die vertikale Seite BC (in E_2). Die Quadratseiten, welche in Frage kommen können, sind je in n gleiche Teile von der Einzellänge a geteilt; die Beobachtung ergibt, daß die Durchschnittspunkte E_1 und E_2 resp. mit dem n'ten und n''ten Teilstriche (von D und B aus gezählt) zusammenstimmen, so daß $DE_1 = an'$, $BE_2 = an''$ sein würde. Bezeichnen wir somit die Zenitdistanzen von S' und S'', $\sphericalangle DAS'$ und $\sphericalangle DAS''$ mit ζ' und ζ'', so ist[2])

$$\operatorname{tg} \zeta' = \frac{DE_1}{DA} = \frac{an'}{an} = \frac{n'}{n}; \quad \operatorname{tg} \zeta'' = \frac{BA}{BE_2} = \frac{an}{an''} = \frac{n}{n''}.$$

Wiederum sind hiernach die gesuchten Bogengrößen leicht zu berechnen[3]).

Der Jakobsstab. Die bisher gekennzeichneten Winkelmeßinstrumente sind von vornherein nur dann recht brauchbar, wenn es gilt, Winkel in einer Vertikalebene zu messen. Die weit allgemeinere und namentlich für die geographische Ortsbestimmung, wie sich weiter unten zeigen wird, geradezu fundamentale Aufgabe jedoch, die Bogen-

---

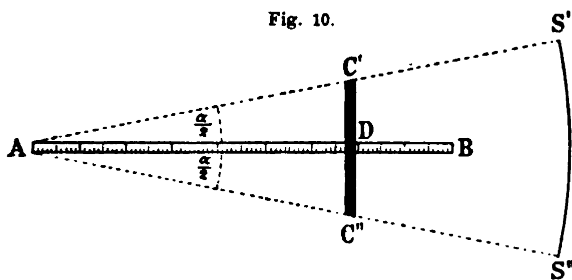
[1]) Diese Seite führt bei Peurbach den Namen „latus versum“, die senkrecht stehende, vom Drehlineale geschnittene, heißt dort „latus rectum“.

[2]) Zu Peurbachs Zeit wußte man mit der trigonometrischen Tangente noch nicht recht Bescheid; man half sich also dadurch, daß man die Sinus berechnete.

[3]) Das Quadrat hat namentlich auch in der Feldmeßkunst vielfache Verwendung gefunden. Nach v. Bauernfeind (Elemente der Vermessungskunde, 1. Band, Stuttgart 1879. S. 391) kann man in diesem Instrumente den ersten Distanzmesser erblicken, mittels dessen die Entfernung irgend eines Objektes von dem seinen Stand unverrückt beibehaltenden Beobachter auszumitteln ist.

größe zwischen zwei *beliebig an der Himmelskugel gelegenen Objekten* zu ermitteln, erfordert entschieden andere Methoden als Triquetrum und Peurbachsches Quadrat, die nur dann, wenn der Standort ein ganz fester und unbeweglicher ist, ihre Leistungsfähigkeit bewähren. Sobald der Beobachter auf dem schwankenden Schiff sich befindet, werden ihm diese Werkzeuge unnütz. Anders dagegen verhält es sich mit dem sogenannten *Jakobsstabe* (Baculus sive Radius astronomicus), der in jedem Falle verwendbar

Fig. 10.



bleibt und auch gerade den Seeleuten ausgezeichnete Dienste geleistet hat [1]). Auf einem in gleiche Teile geteilten Längsstabe *AB (Fig. 10)* ist lotrecht ein kleiner Querstab von der Länge $C'C'' = 2b$ verschiebbar, so daß

[1]) Daß der Jakobsstab das geistige Eigentum des Regiomontanus (1436—1476) sei, ist von Breusing zu wiederholten Malen, insbesondere aber in seinem auf dem Frankfurter Geographentage (1883) gehaltenen Vortrage behauptet worden. In der That begegnet man im Drucke der Erwähnung des Bakulus erst in der um 1472 niedergeschriebenen, aber erst viel später (Nürnberg 1531) zum Drucke beförderten Schrift Joh. Müllers, „De cometae magnitudine longitudineque ac de loco ejus vero problemata XVI", allein trotzdem scheint deren Autor lediglich das immer noch sehr große Verdienst zuerkannt werden zu müssen, den Jakosstab erstmalig gegen den Himmel gerichtet zu haben. Zu rein feldmesserischem Gebrauche diente derselbe schon vorher, wie ein um die Mitte des 15. Säkulums entstandenes Manuskript der Münchener Hof- und Staatsbibliothek ausweist. In die seemännische Praxis eingeführt wurde das neue Meßwerkzeug durch Martin Behaim aus Nürnberg.

der Punkt D, in welchem er auf AB gleitet, von C' und C'' gleichweit entfernt ist. Das Auge des Beobachters muß sich möglichst nahe am Punkte A befinden, dessen eine Hand ergreift den Längsstab, und die andere schiebt das Querholz, sich selbst parallel, so lange hin und her, bis das Auge die beiden Punkte S' und S'', um deren Angulardistanz es sich handelt, gerade über C' resp. C'' wahrnimmt. Bezeichnet man Bogen $S'S''$ oder, was dasselbe, $\sphericalangle S'AS''$ mit α, und ist $C'C''$ gerade bei dem $n$ten Teilstriche angelangt, so ist, unter a wieder die Entfernung zweier konsekutiver Teilstriche verstanden, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{C'D}{AD} = \frac{b}{na}$. Eben um nach dieser Formel mit größerer Bequemlichkeit sphärische Distanzen rechnen zu können, fügte Regiomontanus den in der abendländischen Litteratur bis dahin allein vorhandenen Sinustafeln seine neue Tangententafel (Tabula foecunda) hinzu.

Geteilte Kreise und Kreisteile. Hiermit wollen wir das Kapitel von den Instrumenten mit Linearteilung beschließen und uns denjenigen Instrumenten zuwenden, welche eine Kreisteilung besitzen, deren Konstruktion mithin das an und für sich weit naturgemäßere Prinzip zu Grunde liegt, *den gesuchten Winkel direkt zu messen, nicht erst auf dem Umwege einer Zwischenrechnung zu erhalten.* Selbstredend hat auch diese einfache Idee eine lange Geschichte.

Die erste sichere Nachricht, mit welcher wir zu rechnen haben, ist die von den an der Sternwarte des alexandrinischen Museums viel gebrauchten *Armillarsphären*; daß dieselben schon um 300 v. Chr. dem Aristyll und Timocharis und im folgenden Jahrhundert dem Eratosthenes anläßlich seiner Bestimmung der Ekliptikschiefe — richtiger gesagt, des Bogenabstandes der beiden Wendekreise — dienten, kann als feststehend gelten.[1]).

[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 183. Eratosthenes, der sonst mit der Sexagesimalteilung vollkommen vertraut war, setzt in etwas auffallender Weise die Schiefe der Ekliptik $= \frac{11}{166}$ der ganzen Kreisperipherie.

So viel uns die unvollständigen Nachrichten zu beurteilen erlauben, bestand die Armillarsphäre aus zwei metallenen, an ihrem Rande oder *Limbus* mit einer Teilung versehenen Kreisen, deren einer stabil in der Ebene des Himmelsäquators sich befand, während der zweite sich um die Weltachse frei drehen konnte, und um einen mit festen Endpunkten versehenen Durchmesser dieses zweiten Kreises war ein dritter beweglich. Der *Quadrant* kommt zuerst bei Ptolemäus vor, und zwar scheint derselbe so aufgestellt gewesen zu sein, daß seine Ebene in diejenige des Meridianes fiel; der bewegliche Viertelskreis, der auf einem Stative angebracht war, und in die durch das Auge und die beiden auf ihren Winkelabstand zu prüfenden Punkte bestimmte Ebene gebracht werden konnte, taucht erst bei den Arabern auf [1]), welche auch zuerst mit dem in die Mittagsebene gebrachten Vollkreise, dem Vorläufer des eigentlichen *Meridiankreises*, operiert haben dürften [2]). Alle diese Instrumente waren jedoch nur zu ganz bestimmten Zwecken vorgerichtet und erst in der spät-arabischen Zeit sehen wir das Bedürfnis nach Apparaten hervortreten, welche ihrer Idee nach die Anstellung *beliebiger astronomischer Beobachtungen* möglich machen und deshalb der Klasse der sogenannten *Universalinstrumente* zugerechnet zu werden verdienen.

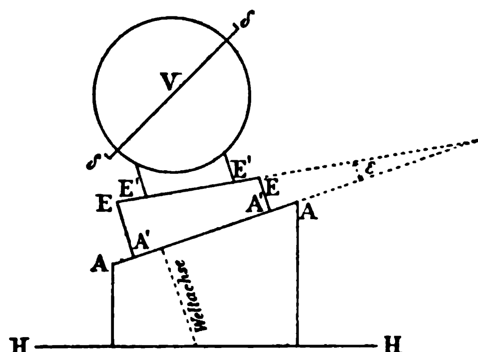
---

[1]) Die beste Auskunft über die praktische Astronomie des Morgenlandes gewährt die Schrift des als Orientalist und Mathematiker gleich tüchtigen älteren Sédillot: Traité des instruments astronomiques des Arabes, Paris 1834—35.

[2]) Abul Wafâ, wohl der hervorragendste Beobachter unter den östlichen Arabern, charakterisiert sein Verfahren wie folgt (Wolf, S. 132): „Man befestigt in der Ebene des Meridianes einen ganzen Kreis, der in 360 gleiche Teile und jeder derselben in möglichst viele Unterabteilungen geteilt ist, und bringt in zwei diametral entgegengesetzten Punkten zwei bewegliche Absehen an, sei es auf einem um das Zentrum beweglichen Radius, sei es auf einem zweiten Kreise, der in den ersten eingelassen ist und sich um dessen Zentrum dreht; bewegt man sodann die beiden Absehen am Limbus des Kreises, bis der Sonnenstrahl gleichzeitig durch die Oeffnungen beider geht, so gibt die Anzahl der Grade, welche zwischen dem Index des oberen Absehens und dem horizontalen Durchmesser des Kreises enthalten ist, die Meridianhöhe der Sonne."

Das Torquetum. Nasr-Eddin scheint der erste gewesen zu sein, der in diesem Sinne zwei Kreise, resp. Kreisquadranten so miteinander in Verbindung brachte, daß deren Ebenen bezüglich mit denen zweier lotrecht zu einander gelegener größter Kreise der Himmelskugel zur Deckung gebracht werden konnten. Weiter ging Regiomontanus mit seinem *Torquetum* [1]), dessen schematische Ansicht uns *Fig. 11* vermittelt. *HH* ist der Horizont; mit ihm steht in fester Verbindung der ebenfalls feste Kreis *AA*, welcher den Himmelsäquator darstellt und demgemäß senkrecht auf der Weltachse stehen

Fig. 11.



muß; wiederum mit *AA* ist verbunden der Kreis *EE*, welcher dann als Repräsentant der scheinbaren Sonnenbahn angesehen werden darf, wenn der Winkel ε, um den die beiden Ebenen *AA* und *EE* voneinander abstehen, der Schiefe der Ekliptik gleich gemacht ist. Innerhalb eines jeden dieser beiden festen Kreise *AA* und *EE* ist ein zweiter konzentrischer Kreis *A'A'* und

---

[1]) Die Ansichten Regiomontans über die der astronomischen Praxis seiner Zeit gesteckten Ziele lernt man am besten kennen durch sein Schriftchen „Epistola ad Bessarionem Cardinalem de compositione meteoroscopii“ (ed. Schoener, Ingolstadt 1533).

$E'E'$, frei drehbar und über $E'E'$ endlich erhebt sich ein Vertikalkreis V, um dessen Zentrum ein Diopterlineal $\delta\delta$ sich drehen kann. Es leuchtet ein, daß und wie man mit Hilfe dieser Kombination fester und drehbarer Kreise willkürliche Einstellungen und Winkelablesungen zu bewerkstelligen vermag. Auch andere Astronomen des Uebergangszeitalters suchten im bezeichneten Sinne den Bedürfnissen der Beobachtungstechnik entgegenzukommen, und insonderheit hat sich Peter Apian (um 1540) nach dieser Seite hin manches Verdienst erworben [1]).

Tycho Brahes und Römers Reformen. Einen bedeutenden Schritt nach vorwärts that die Beobachtungskunst seit dem Auftreten des Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen-Kassel und des großen dänischen Astronomen Tycho Brahe, zweier Männer, deren Genialität nicht, wie sonst so oft, durch unabweisbare Rücksicht auf die materiellen Mittel sich Schranken auferlegt sah. Ersterer war es z. B., der zuerst ein heute als unentbehrlich anerkanntes Requisit jeder größeren Sternwarte, den *Drehturm* mit Klappenöffnungen, anwandte [2]); seine beiden Gehilfen, Rothmann und Bürgi, zählten ebenfalls zu den bedeutendsten Männern ihrer Zeit. Die von Brahe eingeführten Verbesserungen sind sehr zahlreich. So konstruierte er eine das antike Vorbild in sehr vervollkommneter Form nachahmende Armillarsphäre („Armilla zodiacalis“), welche jeden einem der wichtigsten Himmelskreise angehörigen Bogen direkt zu messen erlaubte und nach der in *Fig. 12* gegebenen Abbildung wohl ohne weiteres verständlich ist [3]). Die große Wichtigkeit der im Meridiane angestellten Beobachtungen konnte einem

---

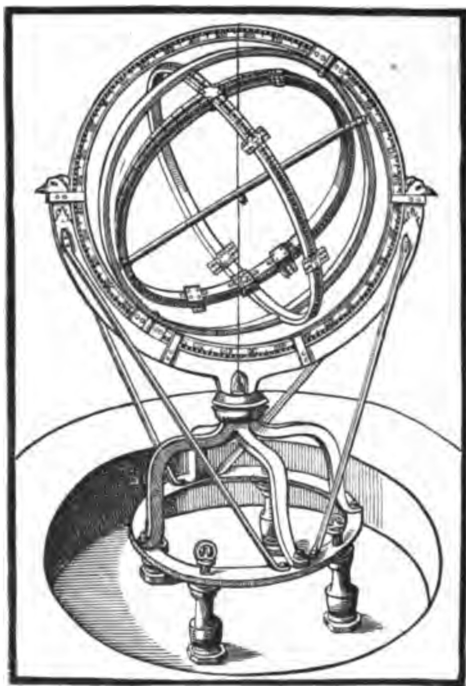
[1]) Ueber die mannigfachen Instrumente Apians ist dessen „Instrumentbuch“ (Ingolstadt 1532) zu vergleichen.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 268.

[3]) Tycho Brahe hat die Geschichte seines der Beobachtungsthätigkeit und deren Reform gewidmeten reichen Lebens selbst geschrieben in seinen „Astronomiae instaurata progymnasmata“ (posthum herausgegeben, Prag 1603).

Brahe nicht entgehen, wie er denn der eigentliche Erfinder des *Mauerquadranten* genannt werden muß, mag auch die von ihm diesem Instrumente gegebene Einrichtung von

Fig. 12.



der später herrschend gewordenen ziemlich weit abweichen. Der Erfinder hat uns selbst eine Abbildung seines Quadranten hinterlassen [1]), mit welchem also eruiert werden

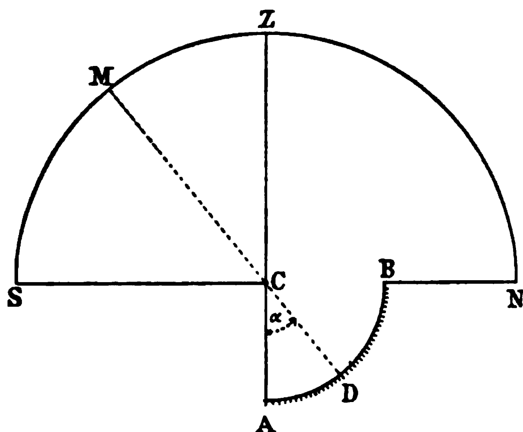
[1]) Wem das Originalwerk nicht zugänglich ist, der findet eine gelungene Reproduktion des tychonischen Bildes bei Lockyer (Die Beobachtung der Sterne sonst und jetzt, deutsch von Siebert, Braunschweig 1880. S. 258). Das Verständnis der ganzen Prozedur vermittelt die schematische Zeichnung in *Fig. 13.* *SZN* ist ein Vertikaldurchschnitt der scheinbaren Himmelskugel, *SN* die Mittags-

konnte, welche Höhe irgend ein Stern im Augenblicke seiner Kulmination besaß und welches der Zeitmoment des Kulminierens war; freilich litt das — bei der Anfertigung des tychonischen Sternkataloges von dem besten Erfolge gekrönte — Verfahren an dem unter anderen Verhältnissen minder leicht zu überwindenden Uebelstande, daß drei Menschen für jede Einzelbeobachtung erforderlich waren: einer, der durch das am Limbus des Quadranten eingelassene Diopter den Meridiandurchgang beobachtete und sodann den Winkel ablas, einer, der gleichzeitig die Uhr ablas, und ein dritter, der die von seinen Kollegen ihm zugerufenen Daten im Beobachtungsbuche vermerkte. Daneben mußte auch stets an dem

---

linie, CZ die Scheitellinie. C ist zugleich das Zentrum eines in der Mauer ausgehöhlten Quadranten AB, an dessen Rande der Diopter D sich verschieben läßt. Auch AC ist eine (vertikale)

Fig. 13.



Mauer, bei C ist in ihr eine Oeffnung angebracht, so daß das hinter D befindliche Auge des Beobachters durch D und C den kulminierenden Stern M anzuvisieren vermag. Der Bogen $\alpha = \sphericalangle ACD$ wird abgelesen, und es ergänzt dieser Winkel, wie ein Blick auf die Figur lehrt, den $\sphericalangle SCM$, die gesuchte Kulminationshöhe, zu einem rechten.

zur Messung von Sternabständen dienenden Sextanten („sextans astronomicus trigonicus pro distantiis rimandis") beobachtet werden, und für die der mathematischen Geographie zunächst am Herzen liegenden Aufgaben war der *Azimutalquadrant* bestimmt, ein Messingquadrant von ziemlich großem Radius, der sich um seinen vertikal stehenden Halbmesser als Achse herumdrehen ließ, während zugleich die Horizontalstellung, welche der andere der beiden Halbmesser erhalten sollte, auf einem horizontal liegenden geteilten Kreise abgelesen werden konnte [1]). Das ganze 17. Jahrhundert fast ist man nicht über Tychos Prinzipien und Methoden hinausgegangen, und erst gegen Ende desselben gingen von dem unter Picards [2]) Leitung herangebildeten Landsmanne Brahes, Olaus Römer, neue fruchtbringende Anregungen aus [3]). Er brachte es dahin, sich bei der Beobachtung im Meridian von der Mitwirkung eines oder gar mehrerer Gehilfen zu emanzipieren und zwar gelang ihm dies, indem er den Quadranten durch das — später erst mit diesem Namen

---

[1]) Ein solcher Quadrant befindet sich noch zur Zeit in Kassel und hat eine einläßliche Beschreibung erfahren durch E. Gerland (Bericht über den historischen Teil der internationalen Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London im Jahre 1876, Braunschweig 1878. S. 115 ff.).

[2]) Dieser oft zu wenig gewürdigte Mann verdient um deswillen an diesem Orte mit Auszeichnung genannt zu werden, weil er, in Gemeinschaft mit seinem Freunde Auzout (um 1670), zuerst das bis dahin ausschließlich zu Studien über topographische Astronomie verwendete Fernrohr mit den Winkelmeßinstrumenten in feste Verbindung brachte und auf die Ausmerzung der — allerdings schon von Brahe erkannten — Instrumentalfehler Bedacht nahm (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 448).

[3]) Vgl. Wolf, S. 576 ff. Die ganze Bedeutung der Römerschen Reform erhellt nicht sowohl aus dessen eigenen, wenig zahlreichen Schriften, sondern aus einer von seinem Schüler und Nachfolger (in der Direktion der Kopenhagener Sternwarte) Horrebow verfaßten „Basis astronomiae" (Kopenhagen 1735), in welcher ein Kapitel mit dem nachstehenden Titel enthalten ist: Olai Roemeri triduum observationum astronomicarum. Die Bedeutung dieses Abschnittes, selbst noch für die neuere Sternkunde, ist von Galle in einer besonderen, die gleiche Aufschrift führenden Abhandlung (Berlin 1845) eingehend gewürdigt worden.

belegte — *Passageninstrument* ersetzte. Wir geben, nach Wolfs deutscher Uebertragung[1]), Römers Originalbeschreibung hier wieder. „Das Instrument besteht aus einer 6 Fuß langen, zum Meridian senkrechten Achse, drehbar um zwei Pole, welche auf festen Pfeilern ruhen. Die Achse trägt in der Mitte einen fest angebrachten Meridiankreis von 4 bis 5 Fuß Durchmesser mit einem 6 bis 8 Fuß langen Tubus, der bei Drehung um die Achse den ganzen Meridian bis zu den Horizontalpunkten oder wenigstens bis auf 4 bis 5 Grad Höhe durchläuft." Neben dem soeben gekennzeichneten Instrumente, welches sehr lange nur eine untergeordnete Rolle spielte, blieb auf der großen Mehrzahl der Sternwarten das ganze 18. Jahrhundert hindurch der Mauerquadrant für Meridianbeobachtungen das Hauptinstrument; doch ging man von Tychos Anordnung ab und brachte an einer ein für allemal im Mittagskreis angeführten Wand den Quadranten so an, wie es *Fig. 14* zu vergegenwärtigen sucht. Um den Mittelpunkt C ist ein beweglicher Radius, eine sogenannte *Alhidade*[2]), drehbar, in dessen Längsrichtung AB ist ein Fernrohr so angebracht, daß das bei B befindliche Auge einen Stern in dem Zeitpunkte erblickt, in welchem er seine größte Höhe über dem Horizonte erreicht. Schneidet der Gesichtsstrahl BAS den geteilten Rand des Viertelkreises in α, so ist der Bogen zwischen o und α der gesuchte. Verhältnismäßig selten, und erst in neuerer Zeit, ist an die Stelle des Mauerquadranten der *Mauerkreis* getreten[3]),

---

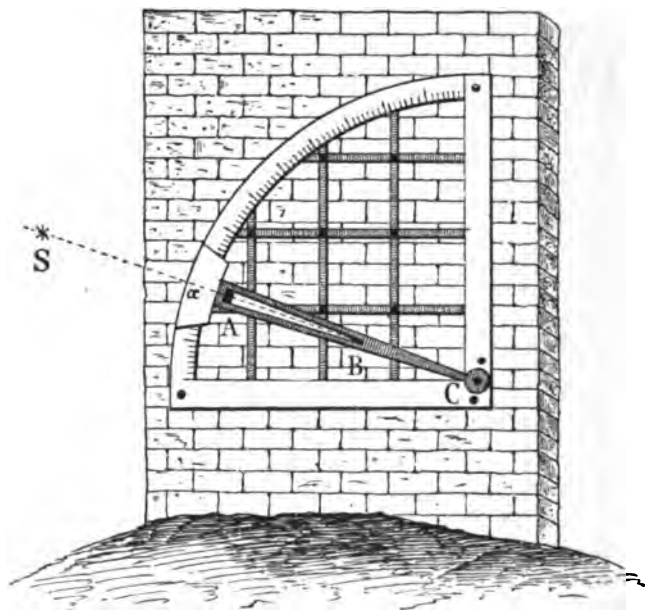
[1]) Wolf, S. 577. Der Brief an Leibniz, in welchem Römer die obige Erklärung gibt, steht im 3. Bande der „Miscellanea Berolinensia" (S. 276 ff.).

[2]) Das Wort *Alhidade* ist arabischen Ursprunges und soll (H. J. Klein, Populäre astronomische Encyklopädie, Berlin 1871. S. 12) so viel bedeuten als „Zähler".

[3]) Solche Mauerkreise befinden sich z. B. auf den Observatorien von Greenwich, Madras, Armagh in Irland; s. für den letzteren: Robinson, Description of the Mural Circle of the Armagh Observatory and Examination of its Divisions, Mem. of the R. Astron. Society, vol. IX. Aus England drang auch erst die Propaganda für die Anwendung ganzer Kreise nach dem Kontinente vor; sehr belehrend ist in dieser Hinsicht des Grafen Brühl, kursächsischen Gesandten am Londoner Hofe, Abhandlung „Ueber die Untersuchung

der in England und Frankreich viel mehr Anklang fand als in Deutschland. Für spezielle Durchgangsbeobachtungen, wenn nämlich der in Frage kommende Stern sehr weit vom Horizonte entfernt war, bediente man sich eines

Fig. 14.



Kreisbogens von sehr geringer Bogengröße, aber großem Radius, dessen Symmetrielinie man genau in die Scheitelrichtung zu bringen vermochte. An einem solchen *Zenitsektor* von 25′ Oeffnung und 24 Fuß Halbmesser machten Bradley und Molyneux jene bekannten Ortsbestimmungen des Sternes γ *Draconis*, welche eigentlich die

---

astronomischer Kreise" (Hindenburgs Archiv der reinen und angew. Mathematik, 1. Band, S. 258 ff.), zu welcher v. Zach (a. a. O., S. 272 ff., S. 450 ff.) mehrere, auch das Reflexionsprinzip berücksichtigende Nachträge geliefert hat.

Ermittlung einer Parallaxe bezweckten und statt dessen das mindestens gleich wertvolle Resultat der Lichtabirrung lieferten [1]). Schließlich sei noch erwähnt, daß Bessel das Passageninstrument, indem er ihm eine Drehung um 90° erteilte, für eine Beobachtung der Durchgänge von Sternen durch *den ersten Vertikalkreis* adaptiert hat [2]).

Die Epoche G. v. Reichenbachs. Ein sehr einschneidender Fortschritt für die Beobachtungstechnik ward in unserem Jahrhundert dadurch erzielt, daß sich je ein Optiker und ein Mechaniker ersten Ranges, Fraunhofer und Reichenbach, zu gemeinsamer Arbeit aneinander schlossen [3]). Gewöhnlich wird direkt der Meridiankreis, das *Hauptinstrument einer modernen Sternwarte*, für eine Erfindung Reichenbachs ausgegeben, was allerdings, wie wir uns oben überzeugten, nur sehr bedingt richtig ist. *Fig. 15* gibt ein Bild des Meridiankreises, P und Q sind die beiden Pfeiler, auf denen die horizontale Achse AB ruht, und um diese ist das Fernrohr CD in der Meridianebene drehbar. Statt der durch die drehbare Alhidade bewerkstelligten Ablesung wird selbe diesmal durch zwei konzentrische, ebenfalls in die Meridianebene fallende Kreise besorgt; der äußere dieser Kreise, n, ist mit der Rotationsachse, der innere, m, ist mit dem Pfeiler P fest verbunden, so daß also durch dieses Hingleiten der äußeren Kreisperipherie an der inneren die genaue Einstellung verbürgt ist. Man nennt deshalb auch mit Fug den kleinen Kreis den *Alhidadenkreis*; um sich seiner stabilen Verbindung mit P zu versichern, setzt man in diesen ein Metallstück a fest ein,

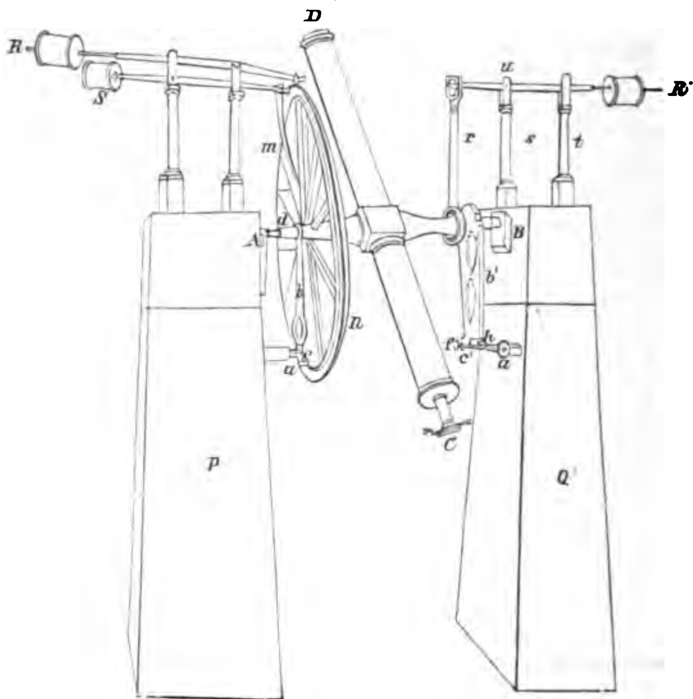
[1]) Wolf, S. 484 ff. Das Instrument selbst war von dem berühmten Mechaniker Graham geliefert worden.

[2]) Näheres hierüber und über die mit dieser Gattung von Durchgangsfernröhren sich beschäftigende Litteratur bei: Carl, Die Prinzipien der astronomischen Instrumentenkunde, Leipzig 1863. S. 145 ff.

[3]) Die Leistungen Fraunhofers gehen uns, insofern Verschärfung der optischen Hilfsmittel mehr nur für die Stellarastronomie wichtig ist, nicht näher an; diejenigen seines Kollegen sind gut charakterisiert in Wackers Programmabhandlung „Ueber Georg v. Reichenbach“ (Durlach 1883).

das durch eine Schraube c senkrecht in die ihrerseits an dem horizontalen Durchmesser des inneren Kreises befestigte Metallplatte eingreift. Eine Wasserwage (s. u.) bei d läßt die Horizontalität der Achse kontrollieren. Auf der anderen Seite des Fernrohres haben a', b', c' eine ganz

Fig. 15.



entsprechende Bedeutung, die Schraube fh gestattet die Fixierung des Fernrohres in dem Augenblicke, in welchem ein bestimmter Stern sich gerade im Mittelpunkte des Fernrohrgesichtsfeldes befindet. Das auf beiden Pfeilern angebrachte Hebelwerk — links sehen wir die Gewichte R und S, rechts, von den Säulen r, s, t getragen, das Gewicht R' — hat lediglich die Bestimmung, Verbiegungen

und Gestaltsänderungen der Achsen und Achsenlager möglichst zu verhindern [1]).

Parallatische Montierung. Nach dieser Beschreibung desjenigen Instrumentes, welches für scharfe Ort- und Zeitbestimmung zuallererst in Betracht kommt, können wir uns mit den übrigen Bestandteilen eines vollständigen Instrumentenparkes verhältnismäßig kurz fassen. Wichtig für solche Beobachtungen, die statt vom Horizonte vielmehr vom Aequator ausgehen, ist das von letzterem seinen Namen tragende *Aequatoreal*. Der eine der beiden Ablesungskreise gehört der Ebene des Himmelsäquators, der andere derjenigen des Meridians an, und mit letzterem ist wieder das Fernrohr selbst verbunden. Auch dieses Instrument ist der Idee nach auf Römer zurückzuführen, während allerdings die praktische Ausführung sich erst später in befriedigender Weise vollzog. Ein Fernrohr, dessen Achse stets senkrecht zur Weltachse bleibt und somit, wenn es durch ein Uhrwerk eine mit der scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel genau übereinstimmende Bewegung erhält, den einmal eingestellten Stern dauernd an der nämlichen Stelle festhält, heißt *parallatisch montiert*; die Erfindung solcher Instrumente, welche sonach für das genauere Studium der Oberflächenbeschaffenheit eines Himmelskörpers so gut wie unentbehrlich sind, verdankt man einem gewissen *Passement* [2]). Gewissermaßen gehört freilich schon das Torquetum (s. o.) hierher.

---

[1]) Vollständig sind jene Deformationsfehler durch die Kunst des Mechanikers niemals zu beseitigen, es verbleibt vielmehr dem Astronomen die nicht leichte Pflicht, diesen Fehlern, wie auch den durch die ungleiche Ausdehnung der einzelnen Bestandteile durch die Wärme entstehenden, rechnerisch nachzuspüren. Hierüber handeln sehr gründlich die nachstehend verzeichneten Schriften: Leitzmann, Von dem Einflusse der Wärmeverteilung auf die Teilung des Meridiankreises, Magdeburg 1885; Bauschinger, Ueber die Biegung von Meridianfernrohren, München 1888. An letzterem Orte sind auch die bisher zur Ermittlung der Biegungsfehler angewendeten Methoden der Besprechung unterzogen.

[2]) Description et usage des téléscopes, microscopes, ouvrages et inventions de Passement, Paris 1763. Der Mechaniker Passe-

Der Theodolit. Wir wenden uns jetzt dem Instrumente zu, welches für die mathematische Erdkunde dasselbe darstellt, wie der Meridiankreis für die eigentliche Sternkunde, und dies ist der aus dem Grundgedanken des tychonischen Azimutalquadranten herausgewachsene *Theodolit*[1]). Ob wirklich, wie behauptet wird, dieser Name bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts zurückgeht, das müssen wir hier unentschieden lassen[2]). Seit 1815, in welchem Jahre Reichenbach dem Theodoliten das „gebrochene" Fernrohr beigab[3]), hat der Theodolit all-

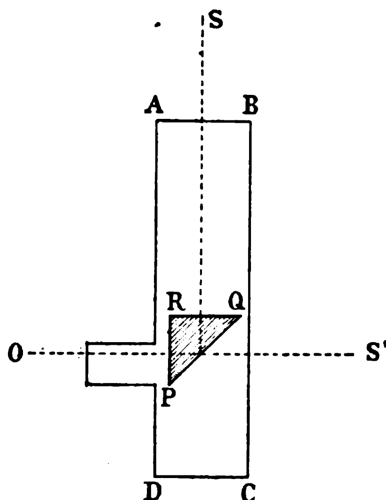
ment überreichte (Wolf, S. 589) dem Könige Ludwig XV. ein in der bezeichneten Weise justiertes Fernrohr, mit dessen Hilfe man, ohne vom Beobachtungsstuhl sich zu erheben oder irgend eine weitere Manipulation vorzunehmen, einen Stern von seinem Aufgange bis zu seinem Untergange zu verfolgen imstande war.

[1]) Die Etymologie dieses Wortes ist eine äußerst umstrittene, richtiger gesagt, ganz und gar ungewisse. Jedenfalls aber hat dasselbe mit λίϑος, der Stein, nichts zu schaffen, und es empfiehlt sich aus diesem Grunde auch, mit Zöppritz (s. o.) das meistenteils in den Büchern dem t am Ende angehängte h wegzulassen.

[2]) S. d. entsprechenden Beweismaterialien bei Wolf, S. 574 ff.

[3]) Um die oft lästige Kopfhaltung beim Beobachten zu vereinfachen, brachte Reichenbach im Inneren des Fernrohres ein Prisma so an, wie es *Fig. 16* verdeutlicht. *ABCD* ist ein Durchschnitt des Fernrohrgehäuses, in der Ebene *AB* liegt das Objektiv, in der Ebene *CD* würde sich von rechtswegen das Okular befinden. *PQR* ist der Durchschnitt des erwähnten Prismas, ∢ *R* ist = 90°, jeder der beiden anderen Winkel = 45°. Der vom Sterne *S* kommende Lichtstrahl fällt parallel der Achse ein, trifft die Ebene *RQ* senkrecht und tritt folglich, ohne

Fig. 16.



mählich die Bedeutung des Universalinstrumentes im eigentlichsten Wortsinne erlangt; für den Feldmesser, Forstmann, Markscheider ist er ebensosehr zum notwendigen Inventarstücke geworden, wie für den reisenden Geographen, der mit seiner Unterstützung die noch unbekannte Lage irgend eines Punktes der Erdoberfläche zu bestimmen unternimmt [1]).

Der Theodolit ist in der Hauptsache eine Verbindung zweier Kreise, von denen der eine eine horizontale, der andere eine vertikale Stellung hat. Zur Darlegung des Wesens dieser Verbindung beziehen wir uns auf die schematische Zeichnung in *Fig. 17.* Wir sehen in *h* den Vertikaldurchschnitt eines Kreises vor uns, dessen Oberfläche den geteilten Limbus — meist aus einem Silberstreifen bestehend — trägt, und dieser Kreis ist fest verbunden mit einem festen Untergestelle *t*. Letzteres ist ein Dreifuß, der auf Stellschrauben *w* ruht, dieselben gewähren die Möglichkeit, *h* genau horizontal zu stellen. Der Kreis *m*, dessen Fläche mit derjenigen von *h* in der nämlichen Ebene *ak* liegt, ist zu *h* konzentrisch und kann sich, während *h* in absoluter Ruhe bleibt, um eine vertikale Achse *cz* drehen; er repräsentiert also den Alhidadenkreis (s. o.), und zwar besorgen die genaue Einstellung die beiden Nonien *nn*, über deren Beschaffenheit weiter unten zu sprechen sein wird. Mit dem inneren Kreise ist stabil verbunden der Träger *g*, in welchem sich zugleich die Lager *v* für die horizontale Achse *ef*

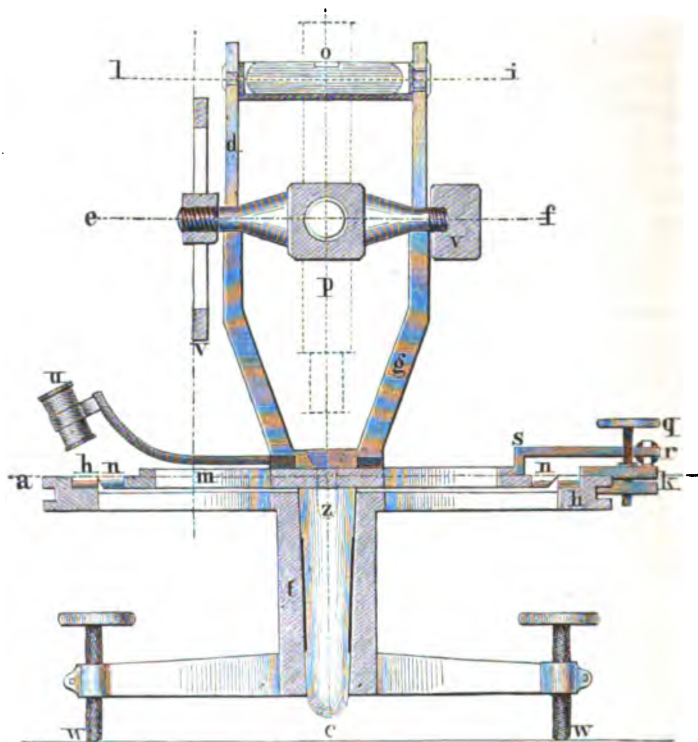
---

eine Richtungsänderung erfahren zu haben, in das Innere des Prismas ein; an der Fläche *PQ* erleidet er eine totale Reflexion, kraft deren er jetzt senkrecht auf die Fläche *RP* trifft. Auch durch diese geht er ungebrochen hindurch, und es sieht mithin das Auge bei *O* den Stern *S* in der Richtung *OS'*; der Lichtpunkt ist um 90° von seinem ursprünglichen Orte abgelenkt.

[1]) Die eingehendsten Erörterungen über den geodätischen und geographischen Gebrauch des Theodoliten enthalten naturgemäß die Lehr- und Handbücher der praktischen Geometrie. Wir empfehlen besonders: Hunäus, Lehrbuch der praktischen Geometrie (2. Auflage), Hannover 1868. S. 91 ff.; v. Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde (6. Auflage), 1. Band, Stuttgart 1879. S. 269 ff.; Jordan, Handbuch der Vermessungskunde (3. Auflage), 2. Band, Stuttgart 1888. S. 134 ff.

befinden, um die ein Fernrohr p drehbar ist; v' stellt ein Gegengewicht vor. Das Rohr dreht sich sonach immer in einer vertikalen Ebene; das in unserer Figur dargestellte

Fig. 17.



ist zum *Durchschlagen* eingerichtet, so daß man durch Beobachtung in zwei verschiedenen Lagen von vornherein gewisse Fehler eliminieren kann. Will man die große Höhe des Fernrohrträgers vermeiden, so muß man es so einrichten, daß das Fernrohr beim Durchschlagen neben dem Horizontalkreise vorübergeht; dies ist dann der *exzentrische* Theo-

dolit. Diese Anordnung hat indeß ihre bedenklichen Seiten, indem, wenn der zu bestimmende Punkt nicht eine sehr große Entfernung besitzt, eine einzige Messung mit einem derartigen Theodoliten kein zuverlässiges Ergebnis liefert. Die horizontale Stellung des Kreises *m* verbürgt die Wasserwage *o* (s. u.), deren Medianebene durch *li* angedeutet ist. Als weiteres Hauptstück des Ganzen erscheint der Vertikalkreis *r*, dessen Achsialdurchbohrung durch eine Schraube mit der horizontalen Fernrohrachse derart verbunden ist, daß er an jeder Bewegung des Fernrohres teilnimmt. Man könnte an und für sich ebenso einen festen und einen Alhidadenkreis in die Vertikalebene bringen, wie es bei *h* und *m* der Fall war, doch besorgt man die Ablesung der Höhenwinkel gemeiniglich durch zwei feststehende Nonien, welche an den Enden eines zu dem Horizontalkreise parallelen Durchmessers angebracht sind. Endlich ist noch ein Mikroskop *u* angebracht, um die feine Teilung genauer erkennen zu können [1]).

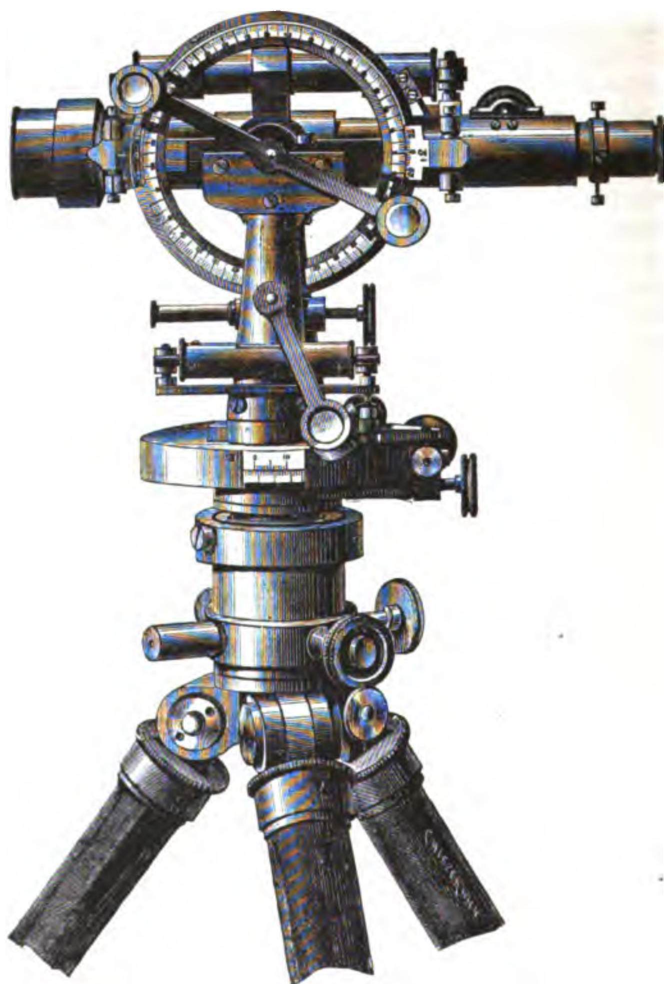
Nunmehr ist es auch ersichtlich, in welcher Weise wir mit dem Theodoliten, den uns *Fig. 18* in perspektivischer Darstellung vorführt, eine wirkliche Ortsbestimmung vornehmen können [2]). Wir denken uns den Punkt *A* (*Fig. 19*) bestimmt durch seine kürzeste Entfernung vom Horizonte und durch den Horizontalbogen, der zwischen einem festen Punkte *P* des Horizontes und jenem Punkte *Q*

---

[1]) Das *Ablesemikroskop*, welches in seiner jetzigen Gestalt zuerst von Ramsden, dem berühmten englischen Instrumentenverfertiger des vorigen Jahrhunderts, ausgeführt ward, hat nicht nur die Bestimmung, je zwei aufeinanderfolgende Teilstriche des Limbus in eine dem menschlichen Auge übersehbare Weite auseinanderzurücken, sondern es dient auch direkt als Meßvorrichtung (s. u.). Vgl. R. Wolf, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, 2. Band, Zürich 1872. S. 15 und unten Abschnitt V.

[2]) Das abgebildete Instrument aus der erprobten Werkstätte von M. Ott in Kempten ist ein sogenannter *Taschentheodolit* (Nr. 15). Daß auch mit solchen kleinen Werkzeugen der Forschungsreisende seine Zwecke erreichen kann, beweisen die von Clauß auf seiner Reise mit den Gebrüdern Von den Steinen in Zentralbrasilien gemachten und neuerdings von P. Vogel revidierten Orts- und Wegaufnahmen (Petermanns Geogr. Mitteilungen. 1886. S. 162 ff.).

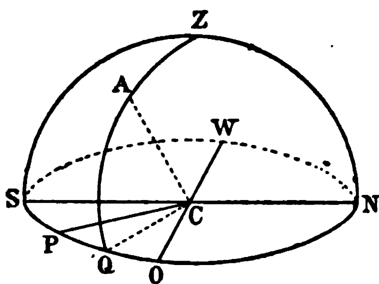
Fig. 18.



liegt, in welchem ein durch das Zenit Z und den Punkt A gelegter Hauptkreis den Horizont $S\,W\,N\,O$ durchschneidet.

Für gewöhnlich nimmt man *P* als mit dem Südpunkte *S* zusammenfallend an, doch verbleiben wir hier bei unserer etwas allgemeineren Annahme, wonach *P* beliebig bestimmt sein kann, etwa durch eine *Horizontalmire* [1]). Der Beobachter in *C* sucht nun mit dem Fernrohre den Punkt *A* auf, zieht in dem Augenblicke, in welchem er die Einstellung vollendet sieht [2]), die Schraube *q* (*Fig. 17*) an und erreicht dadurch, daß die Hemmungsvorrichtung *rs* die freie Beweglichkeit des Alhidadenkreises aufhebt. Zunächst sieht er alsdann nach dem Vertikalkreise und liest an ihm direkt die Größe des Bogens *AQ* (*Fig. 19*) ab, womit das eine der beiden Bestimmungsstücke bekannt ist. Nicht ebenso direkt wird *PQ* gefunden; fürs erste sieht der Beobachter zu, welche Zahl von Graden, Minuten, Sekunden dem *Index* des Alhidadenkreises an dem Limbus des anderen Kreises entspricht; diese Zahl sei *α*. Hierauf visiert der Beobachter den Punkt *P* an und macht für ihn die analoge Ablesung am Horizontalkreise, welche

Fig. 19.



---

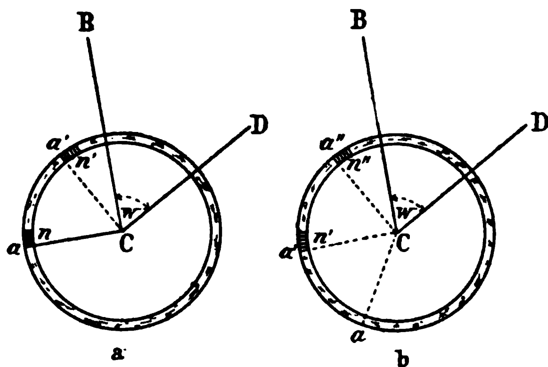
[1]) Unter einer Mire, die in den meisten Fällen als *Meridianzeichen* zu fungieren hat, versteht man entweder einen in beträchtlicher Entfernung aufgestellten Pfeiler (*Tagmire*) oder ein beleuchtetes Fadenkreuz (*Nachtmire*); s. Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 25.

[2]) Im Brennpunkte des Beobachtungsfernrohres befindet sich ein Horizontalfaden nebst einer Anzahl von Vertikalfäden, die zusammen das *Fadennetz* resp. *Fadenkreuz* bilden. Der Stern muß da sich befinden, wo sich der horizontale und der größte vertikale Faden durchkreuzen. Fontana schlug als Material für diese Fäden 1755 *Spinnweben* vor (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 364); wie man dieselben zuzurichten hat, ist zu ersehen bei Carl (a. a. O., S. 53 ff.). In England sind für diesen Zweck dünn ausgewalzte (Wollastonsche) Platindrähte sehr beliebt.

die Zahl β liefern möge. Nun besteht offenbar die Relation: arc $PQ = \alpha - \beta$ resp. $= \beta - \alpha$ oder einheitlich $= \pm (\alpha - \beta)$, wo das obere und untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem sich $\alpha \gtrless \beta$ herausstellt. Hiermit ist die Aufgabe der Ortsbestimmung auf der Sphäre *eindeutig* gelöst, sobald wir annehmen, daß von der unsichtbaren Halbkugel zunächst abgesehen und für den Winkel PCQ ein Spielraum von 0° bis 360° eingeräumt werde.

Unter den mancherlei Abänderungen und Vervollkommnungen des Prinzipes, auf welchem das moderne

Fig. 20.



Universalinstrument beruht, interessiert uns an diesem Orte hauptsächlich jene, welche zur Konstruktion des *Repetitionstheodoliten* geführt hat. Das Verfahren, einen Bogen durch *Repetition* oder, wie man wohl auch sagt, durch *Multiplikation* zu messen, ist eine Erfindung des älteren Tobias Mayer[1]). Zur Erläuterung verweisen wir[2]) auf *Fig. 20 a* und *b*. Es seien B und D die beiden — der Kürze halber als in der Horizontalebene

---

[1]) T. Mayer, Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum goniometricum, Göttingen 1752.

[2]) Wir halten uns hier an die lichtvolle Darstellung v. Bauernfeinds (S. 273).

liegend vorausgesetzten — Punkte, deren Angulardistanz $w = \sphericalangle BCD$ gemessen werden soll. Der Mittelpunkt des Horizontalkreises eines Theodoliten befindet sich genau über C; wenn das Fernrohr jeweils nach B und D gerichtet ist, liest man vermittelst der beiden Indices n und n' resp. einen Winkel α und β ab und es wäre sohin $w = \alpha - \beta$, freilich aber mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern. Um nun mehr Genauigkeit zu erzielen, macht man die Ablesung β gar nicht, sondern klemmt den Alhidadenkreis an den Limbuskreis fest und dreht beide zusammen so lange in einem bestimmten Sinne, bis das Fernrohr wiederum genau auf den Punkt B einspielt. Nun ist a' an die Stelle von a gekommen *(Fig. 20b)*. Jetzt läßt man den äußeren Kreis feststehen, löst die Klemme und dreht den Alhidadenkreis in entgegengesetztem Sinne so lange, bis D in den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes tritt. Der Index n'' entspricht jetzt der Ablesung a''. Demgemäß wäre $w = \frac{1}{2}(a'' - a)$. Je öfter man im gleichen Sinne die Drehungen und Ablesungen vornimmt, auf ein desto höheres Maß von Genauigkeit kann die schließliche Bestimmung durch das arithmetische Mittel Anspruch machen. Wenn aber w ziemlich groß ist, so wird man bei der Multiplikation die Kreisperipherie ziemlich bald überschritten haben, und wenn im ganzen der Index p mal über den Nullpunkt der Teilung hervorgegangen ist, wird man, unter $a^{(n)}$ die letzte Ablesung verstanden, $w = \frac{1}{n}(360\,p + a^{(n)} - a)$ setzen müssen. Nach dem Gesagten besteht der wesentliche Unterschied zwischen dem gewöhnlichen und dem repetierenden Theodoliten darin, daß beim ersteren der Horizontalkreis unbeweglich, beim letzteren dagegen um eine vertikale Achse drehbar ist.

Bestimmung der Fehler eines Theodoliten. Derjenige, der mit dem Theodoliten praktisch zu arbeiten genötigt ist, hat auch die aus der Konstruktion des Instrumentes entfließenden und auch bei der größten Sorg-

falt des ausführenden Mechanikers nicht gänzlich zu vermeidenden *Fehler* desselben zu berücksichtigen. Vor allem natürlich ist es erforderlich, daß die Teilungen durchaus korrekt ausgeführt, die Abstände konsekutiver Teilstriche einander genau gleich seien [1]), sowie daß die sämtlichen Kreise den Ebenen, in welche sie fallen sollen, auch wirklich angehören. Einflußreich kann unter Umständen der sogenannte *Kollimationsfehler* werden, der darin besteht, daß die Visierlinie oder *Kollimationsachse* unrichtig steht, d. h. mit der Alhidadenachse einen von einem rechten abweichenden Winkel bildet [2]). Wie man den Einfluß des Kollimationsfehlers auf eine wirklich vorgenommene Messung rechnerisch abzuschätzen vermag, das soll nachstehend, im Anschlusse an *Jordan* [3]), erörtert werden. AB *(Fig. 21)* sei die Horizontalachse, JZ die Vertikalachse; die Kollimationslinie soll, wenn alles in vollständiger Ordnung ist, nach und nach in die Stellungen JZ, JQ, JC gebracht werden können, allein die Instrumentalfehler bewirken, daß dafür jene Linie in die Lagen JZ', JP, JD' gelangt. Die Winkel, welche jeweils eine richtige Position mit der falschen macht, sind der Natur der Sache nach unter sich gleich; es ist $\sphericalangle ZJZ' = \sphericalangle QJP = \sphericalangle CJD' = \psi$. Durch die drei Endpunkte Z', P, D' wird sich ein Kreis legen lassen, dessen Ebene zur Ebene CZJ

---

[1]) Die relative Zuverlässigkeit der Kreisteilungen ist heute verbürgt durch den Gebrauch jener trefflichen *Kreisteilungsmaschinen*, deren Einführung in die Instrumentaltechnik eines der vielen Verdienste Reichenbachs ist (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 569 ff.). Den von diesem glücklichen Erfinder realisierten Grundgedanken findet man allerdings bereits ausgesprochen in einer Schrift des Herzogs von Chaulnes: Nouvelle méthode pour diviser les instruments de mathématique et d'astronomie, Paris 1768. Ueber die Ermittlung der Teilungsfehler durch Repetition verbreitet sich einläßlich Jordan (a. a. O., 2. Band. S. 177 ff.). Sehr wohl zu unterscheiden sind die *unregelmässigen*, von einem Zufall herbeigeführten Fehler von den *systematischen* Fehlern, welche an gewissen Stellen der Peripherie durchaus positiv, an anderen ebenso regelmäßig negativ auftreten und somit auf das Vorhandensein einer ganz bestimmten Fehlerquelle hinweisen.

[2]) v. Bauernfeind, a. a. O., 1. Band. S. 285.

[3]) Jordan, a. a. O., 2. Band. S. 162.

parallel ist. Der anvisierte Punkt sei P; legt man durch P und Z eine Hauptkreisebene, so liegt in dieser der Bogen PD, welcher die gesuchte, eben mit Hilfe des Theodoliten zu bestimmende Entferung des Punktes P vom Horizonte angibt. Der Fehler ψ aber ist schuld daran, daß der falsche Projektionspunkt D' an die Stelle

Fig. 21.

des richtigen Projektionspunktes D tritt. PQ ist parallel zum Horizontalkreise; strenge genommen ist PQ, als Bogen eines kleinen Kugelkreises, nicht gleich ψ, doch kann, da man die Instrumentalfehler grundsätzlich als *Differentiale* behandelt, die erwähnte Identität unbedenklich angenommen werden. Wenn wir auf das unendlich schmale sphärische Dreieck PQZ den Sinussatz anwenden, den Winkel am Scheitelpunkte kurzweg $= Z$ setzen und bedenken, daß der Winkel bei Q ein rechter ist, so haben wir, den Bogen $PD = h$ setzend, diese Proportion: $\sin 90^0 : \sin Z = \sin (90^0 - h) : \sin \psi$, woraus $\sin \psi = \sin Z \sin (90^0 - h)$ folgt. Die Bogen ψ und Z sind so klein, daß sich die Sinus durch die Argumente selbst ersetzen lassen, es wird also $\psi = Z \cos h$. Die Figur lehrt,

daß $DC - D'C = Z - \psi = \psi'$ ist; sonach ist der veränderliche Teil des Projektionsfehlers

$$\psi' = \frac{\psi}{\cos h} - \psi = \frac{2\psi \sin^2 \frac{1}{2} h}{\cos h}.$$

Solange h klein bleibt, kann man angenähert

$$\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2} \text{ und } 1 : \left(1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}\right) = 1 + 2 \sin^2 \frac{h}{2}$$

setzen, so dass also $\psi' = 2\psi \left(\sin^2 \frac{1}{2} h + 4 \sin^4 \frac{1}{2} h\right)$ und, bei erlaubter Vernachlässigung des letzten Summanden,

$$\psi' = 2\psi \sin^2 \frac{1}{2} h$$

wird. Hieraus läßt sich eine Tabelle ableiten, welche den Einfluß des Kollimationsfehlers im Einzelfalle sofort zu überblicken gestattet [1]).

Wieder andere Fehler entspringen aus der *Exzentrizität* des Fernrohres und des Alhidadenkreises [2]). In eine meritorische Diskussion all dieser in sehr vielen Fällen einflußreichen Störungen einer mit dem Theodoliten gemachten Messung kann hier natürlich nicht eingegangen werden [3]).

---

[1]) Vgl. auch O. v. Struve, Neue Methode, die Kollimation des Fernrohres eines Meridiankreises zu bestimmen, Vierteljahrsschr. d. deutschen astron. Gesellschaft, 12. Jahrgang. S. 302 ff.

[2]) Jordan, a. a. O., 2. Band. S. 177 ff.

[3]) Von gewissen Vorrichtungen, die zur Erzielung größtmöglichster Genauigkeit bei astronomischen Messungen unerläßlich sind, soll in dieser Note nur ganz kurz gesprochen werden, da ein längeres Verweilen bei denselben in einem Handbuche der mathematischen Geographie den zur Verfügung stehenden Raum zu sehr zum Nachteile anderer und — in unserem Falle — wichtigerer Dinge beanspruchen würde. Wir denken hier zunächst an die Mittel, durch welche eine schärfere Ablesung der Kreisteilung gewährleistet wird, als dies durch die Arbeit der Teilmaschine (s. o.) an sich erreicht werden kann. Vom Nonius wird im nächsten Ab-

VI. Die Spiegel- und Prismeninstrumente.

Aeltere Instrumente zum nautischen Gebrauche. Die Winkelmeßinstrumente, deren das vorige Kapitel zu gedenken hatte, verbürgen nur dann diejenige Genauigkeit der Ablesung, welche überhaupt aus der Art ihrer Konstruktion sich ergibt, wenn die Unterlage, auf

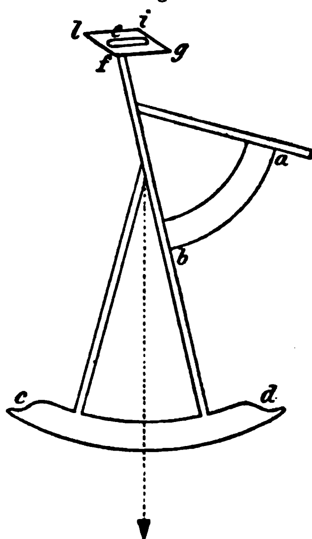
---

schnitte, bei den Spiegelinstrumenten, ohnehin die Rede sein müssen; bis zu einem gewissen Grade kann dieser ersetzt werden durch das *Ablesemikroskop* (Wolf, Handb. etc., 2. Band. S. 15; Gesch. d. Astron., S. 570). Dieses Mikroskop ist versehen mit einem Faden, der sich selbst parallel verschoben werden kann; die Fortbewegung geschieht mittels einer Mikrometerschraube, deren Umdrehung stets einem aliquoten Teile der zwischen zwei Teilstrichen des Limbus gelegenen Entfernung entspricht. Wenn also der Rand der Schraube fein genug abgeteilt ist, um etwa noch $^1/_{60}$ einer vollen Umdrehung deutlich erkennen zu können, so ist leicht abzusehen, daß die Genauigkeit der Ermittlung des Ortes, an welchem sich der Index gerade befindet, sehr erheblich gesteigert zu werden vermag. Ebenso dienen diese Ablesemikroskope zur Ermittlung etwaiger Unrichtigkeiten der Teilung. — Bei den Durchgangsbeobachtungen, die auch in der Lehre von der geographischen Ortsbestimmung ihre Rolle spielen, macht sich häufig der Umstand geltend, daß für zwei verschiedene Beobachter, ja selbst für ein und denselben Beobachter zu verschiedenen Zeiten, die Zeit eine verschiedene ist, welche die Fortleitung eines gewissen sinnlichen Eindruckes im Nervensysteme in Anspruch nimmt, und es entsteht daraus die sogenannte *persönliche Gleichung*, die eine sehr interessante Geschichte hat (R. Wolf, Handb. etc., 2. Band. S. 41; Gesch. d. Astr., S. 611; C. Wolf, Recherches sur l'équation personnelle dans les observations de passages, Mém. de l'observat. de Paris, VIII). Um diesem Individualfehler möglichst zu begegnen, dient auf den modernen Sternwarten vielfach der *Chronograph*, die Registrierung der astronomischen Ereignisse durch den galvanischen Strom; darauf wird uns die Bestimmung der geographischen Längen wieder zurückführen. — Auch die verschiedenen mikrometrischen Systeme, unter denen das *Kreis-* und *Positionsmikrometer* jedenfalls am meisten leisten, haben für die astronomische Geographie vergleichsweise nur eine untergeordnete Bedeutung (vgl. darüber Wolf, Handb. etc., 2. Bd. S. 65 ff.; Carl, S. 100 ff.; Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin 1862. S. 551 ff.). Ein Gleiches möchte für die wesentlich zu Bestimmungen der Planetendurchmesser angewandten *Heliometer* (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 593 ff.) gelten. — Wohl vertraut muß dagegen der beobachtende Geograph sein mit der *Achsenlibelle*, die

welcher Beobachter und Instrument sich befinden, eine absolut feste, stabile ist. Gerade da jedoch, wo auf Schärfe der Bestimmungen am meisten ankommt, auf dem schwankenden Schiffe, fehlt jene Voraussetzung, das Ablesen geteilter Kreise wird nahezu zur Unmöglichkeit, und höchstens das an sich rohe und für präzise Messungen unzureichende Beobachten am Jakobsstabe (s. o.) mochte auf hoher See anscheinend mit gleicher Leichtigkeit wie auf dem Festlande sich ermöglichen lassen. Die Nautiker fühlten selbstredend diesen Umstand sehr wohl und bemühten sich an ihrem Teile, demselben abzuhelfen; der 1594 von dem Engländer Davis (1550—1605) in die seemännische Praxis eingeführte *Sonnenquadrant* legt u. a. für das Vorhandensein solcher Bestrebungen Zeugnis ab [1]).

1660 von Thévenot erfunden wurde (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 572). Die Handhabung der Wasserwage, deren meist zwei an jedem Theodoliten zu genau wagrechter Einstellung seiner Horizontalkreisebene angebracht sein werden, wird praktisch leicht erlernt; die gleichfalls nicht schwierige geometrische Theorie des Instrumentes, das auch für die Auffindung von Ungleichheiten in der Zapfendicke vorteilhaft verwendet wird, entwickeln viele Werke (Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 23 ff.; Brünnow, S. 418 ff.; v. Bauernfeind, 1. Band. S. 457 ff.).

Fig. 22.



[1]) Das obige Instrument kennzeichnet Gelcich (Studien über die Entwicklungsgeschichte der Schiffahrt mit besonderer Berücksichtigung der nautischen Wissenschaften, Laibach 1882. S. 72 ff.), wie folgt *(Fig. 22)*: „Die zwei Bogen *ab* und *cd* waren konzentrisch und ergänzten sich zu 90°. Der zum kleineren Radius gehörende Bogen *ab* betrug gewöhnlich 60°, der zum größeren Radius gehörende *cd* 30°. Im Zentrum dieser Bogen war in einem Querschnitte *ilfg* eine Spalte *e* und auf jedem Bogen ein Diopter angebracht. Durch das untere

Doch konnte dem Bedürfnis nachhaltig nur abgeholfen werden durch die Erfindung der *Spiegelinstrumente*, welche in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts erfolgte; dabei ließ sich auch in ungleich einschneidenderer Weise ein an und für sich durchaus richtiges Verschärfungsprinzip zur Geltung bringen, welches bereits früher zur Konstruktion der sogenannten *Seeringe* [1]) die Veranlassung gegeben hatte.

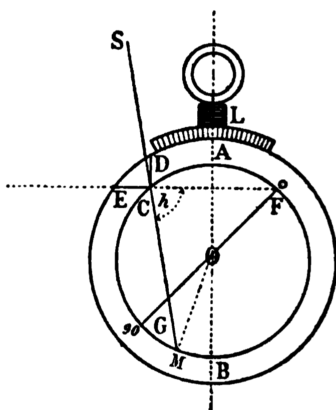
Geschichte der Spiegelinstrumente. Die älteste Nachricht über ein Spiegelinstrument kommt nach

---

Diopter wurde gegen den Meereshorizont, durch das obere und die Spalte gegen das Gestirn visiert. Bei Sonnenbeobachtungen war das Visieren nach der Sonne nicht nötig, da die Visur durch den Sonnenstrahl gegeben war, welcher durch die Spalte ging. Die Höhe ergab sich bei diesen Instrumenten als Summe der Ablesungen an beiden Bogen, von ihrer Verbindungslinie an gezählt."

[1]) Vgl. Gelcich, Geschichtliche Entwicklung der nautischen Winkelmeßinstrumente, Lussin piccolo 1885. S. 3. Mit dem Seering Fourniers, abgebildet in *Fig. 23*, hat es die folgende Bewandtnis. Ein aus Metall oder Holz gefertigter Kreisring trägt bei L eine Handhabe; wird an ihr der Ring aufgehängt, so ist der Durchmesser AOB vertikal. Bei C, dessen Bogenabstand von A 45° beträgt, befindet sich eine kleine Oeffnung, und es ist auch an dieser Stelle die Ringumfassung dergestalt ausgeschnitten, daß durch den dreieckigen Ausschnitt ECD sowohl horizontale als auch vertikale Strahlen eintreten können. Auch Bogen AF ist $= 45°$, und bei F ist der Nullpunkt der Kreisteilung angebracht. Der F gegenüberliegende Punkt G erhielt nicht die Zahl 180, sondern die Zahl 90, und in 90 gleiche Teile war demgemäß der Halbkreis FBG eingeteilt. Denken wir uns nun eine Beobachtung angestellt, so repräsentiert uns die Grade CF den Horizont, und wenn die Sonne

Fig. 23.



Gelcich[1]) in der von Birch herausgegebenen Geschichte der Londoner „Royal Society“ vor; in dem Protokolle der am 22. August 1666 abgehaltenen Sitzung ist bemerkt, daß der bekannte Hooke, einer der ausgezeichnetsten Experimentatoren jener Periode, ein neues astronomisches Beobachtungswerkzeug vorgelegt habe, dessen ausgesprochener Zweck darin bestand, Bogendistanzen mittelst Reflexion zu messen. Hooke kam zwar noch mehrere Male auf den Gegenstand zurück, gelangte aber nicht dazu, seiner Erfindung eine wirkliche Verwendbarkeit zu sichern, und so gingen wieder mehrere Jahrzehnte hin, bis am 13. Mai 1731 John Hadley, Vizepräsident der erwähnten gelehrten Gesellschaft, dieser letzteren seinen neuen Sextanten unterbreitete. Halley erhob zwar Einsprache gegen Hadleys Priorität, indem er sich entsinnen wollte, daß in den von Newton nachgelassenen Papieren bereits ähnliche Gedanken enthalten seien, allein man lehnte die nähere Untersuchung ab mit dem Hinweise, daß es Newton lediglich um die Verbesserung des Davis-Quadranten zu thun gewesen sei. Später freilich kam es an den Tag, daß der große Mathematiker um 1700 oder 1701 die wirkliche Beschreibung eines Reflexionsinstrumentes verfaßt hatte[2]), ohne dieselbe freilich in Druck zu geben. Auch andere Konkurrenten erhoben sich gegen Hadley, und es ist keineswegs unwahrscheinlich, daß Thomas Godfrey, ein Glaser in Philadelphia, die Erfindung auch von sich aus gemacht und durch seinen Bruder Hadley bekanntgegeben habe[3]).

---

in S steht, so ist $\sphericalangle ECS = \sphericalangle FCM =$ der Sonnenhöhe h; welche wir suchen. Nach dem Satze, daß jeder Zentriwinkel dem Doppelten des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Peripheriewinkels gleich ist, haben wir $h = \frac{1}{2} \sphericalangle FOM$, und da bei der Teilung schon auf diesen Umstand Rücksicht genommen ist, so können wir am Limbus h unmittelbar ablesen. Etwaige Fehler werden bei dieser Anordnung nur halb so groß ausfallen können, als bei der direkten Ablesung.

[1]) Gelcich, a. a. O., S. 9.

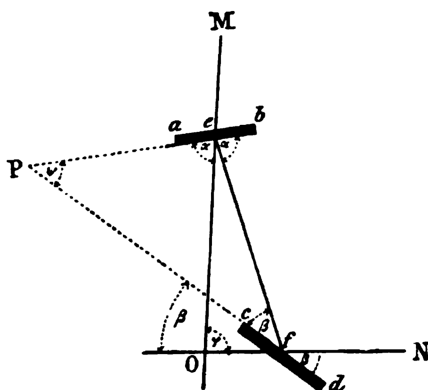
[2]) Philosophical Transactions, 1742. Nr. 465.

[3]) Vgl. hierzu Gelcich, a. a. O., S. 10 und Poggendorff,

Jedenfalls kommt dem letzteren das doch nicht ganz geringe Verdienst zu, den eigentlichen *Spiegeloktanten* in der jetzt noch üblichen Form hergestellt und in umfassenderer Weise dessen Verwendbarkeit für nautische Zwecke dargethan zu haben [1]).

Die geometrischen Fundamentalwahrheiten. Das optisch-geometrische Prinzip, auf welchem die Kon-

Fig. 24.



struktion der Spiegelinstrumente beruht, macht uns *Fig. 24* klar [2]). *ab* und *cd* sind die horizontalen Durchschnitte

Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, 1. Band, Leipzig 1863. Sp. 919. Sicher ist, daß die königliche Gesellschaft in London eine Belohnung von 200 Pfund Sterling für Godfreys Erfindung aussetzte, welche durch einen gewissen Logan zur Kenntnis jener Korporation gebracht worden war; minder sicher hingegen ist, was von den Beziehungen Godfreys zu einem Schiffskapitän G. Hadley, dem Bruder des oben genannten J. Hadley, da und dort behauptet wurde.

[1]) Gelcich, a. a. O., S. 12 ff.; Hadley, New Instrument for taking angles, Philos. Transact. 1731.

[2]) Unter den zahllosen, selbstredend nicht materiell, sondern nur formal untereinander abweichenden Begründungen der Lehre

zweier Vertikalspiegel-Ebenen mit der Papierebene; M und N sind zwei entfernte Punkte, und man will wissen, wie groß der Winkel φ ist, welchen die Gesichtslinien OM und ON am Auge O miteinander einschließen. OM ist eine direkte Gesichtslinie; damit der von M kommende Strahl das Auge ungehindert erreiche, denken wir uns von dem Spiegel ab die obere Hälfte unbelegt (oder auch das Glas dieser Hälfte ganz weggenommen), so dass also zwischen O und M kein Hindernis sich befindet. Der Weg des von N ausgegangenen Strahles ist dagegen ein weit minder einfacher. In f trifft der Strahl auf den Spiegel cd und wird von diesem zurückgeworfen; der reflektierte Strahl trifft den Spiegel ab und erleidet an diesem eine abermalige Reflexion in e, so dass der nunmehrige Weg eO des doppelt gespiegelten Strahles mit MO völlig zusammenfällt. Dem Grundsatze der Katoptrik zufolge ist $\sphericalangle Nfd = \sphericalangle efc = \sphericalangle Ofc = \beta$, $\sphericalangle feb = \sphericalangle Oea = \alpha$; den Winkel bPd, unter welchem sich die Spiegelebenen durchschneiden, wollen wir ψ nennen. Dann haben wir, je nachdem wir im Dreieck Pef oder im Dreieck Oef die Winkelsumme bilden, diese beiden Gleichungen:

$$\beta + \psi + \alpha + 180^0 - 2\alpha = 180^0;\ \psi = \alpha - \beta,$$
$$\varphi + 2\beta + 180^0 - 2\alpha = 180^0;\ \varphi = 2\alpha - 2\beta,$$

resp. $\varphi = 2\psi$. In Worten läßt sich dieses Ergebnis so zusammenfassen:

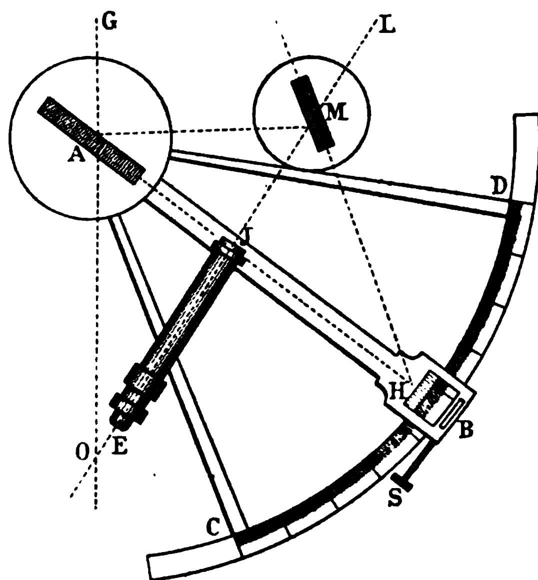
Kann man es dahin bringen, dass zwei entfernte Objekte mittelst zweier Planpiegel, deren einer beweglich, deren anderer fest und oben durchbrochen ist, an demselben Orte des Raumes gesehen, also zur Deckung gebracht werden können, so ist die Bogendistanz der beiden Objekte doppelt so gross als der Winkel der beiden (vertikalen) Spiegelebenen.

---

von den Spiegelinstrumenten, die es in der Unterrichtslitteratur gibt, sagte uns am meisten die von Eisenlohr (Lehrbuch der Physik, Stuttgart 1870. S. 265 ff.) zu; an diese schließt sich unsere Darstellung am nächsten an, doch wurde von einer beschränkenden dort gemachten Voraussetzung abgesehen.

Der Hadleysche Sextant. Diese Tatsache gilt es also im Instrumente zu reproduzieren, und hierzu verhilft uns eben der Hadleysche Oktant, an dessen Stelle jedoch gewöhnlich der *Spiegelsextant* tritt, wie wir ihn in *Fig. 25* vor uns sehen. *A* ist das geometrische Zentrum des Sechstelskreises *CD* und zugleich der Drehpunkt der

Fig. 25.



Alhidade *AB*, welch letztere beliebig um *A* gedreht und in der gerade erreichten Lage durch die Schraube *S* fixiert werden kann. Die Mittellinie dieser Alhidade ist zugleich parallel zur Ebene eines in *A* auf der Sextantenebene senkrecht angebrachten Spiegels, welcher sonach an jeder Drehung der Alhidade sich beteiligt. Auf dem Sektor ist ein Fernrohr mit dem Okular *E* und dem Objektiv *J* befestigt, und diesem steht bei *M* ein fester Spiegel gegenüber, der nur in seiner unteren Hälfte metallisch belegt,

in seiner oberen aber durchsichtig ist. Die Achse des Fernrohres, die Linie JE, trifft den Spiegel bei M gerade in der Linie, in welcher belegter und unbelegter Teil aneinander grenzen. Das Objekt L erkennt mithin das bei O befindliche Auge direkt, das vom Objekte G kommende Licht gelangt nach O aber erst durch zweimalige Reflexion, indem es den Weg $(GA + AM + MJ + JE + EO)$ zurückgelegt hat. Der Winkel GOL (oder φ) ist demnach zweimal so gross als der Winkel AHM (oder ψ); damit aber letzterer unmittelbar an der Teilung abgelesen werden könne, braucht nur dafür gesorgt zu sein, daß dann, wenn die Alhidade auf Null steht, die Ebenen der beiden Spiegel genau parallel zu einander stehen, denn es ist unter dieser Voraussetzung $\sphericalangle AHM$ als Wechselwinkel gleich $\sphericalangle CAH$. Aus dieser Beschreibung erhellt nun auch der Gebrauch des Instrumentes zur Messung des Winkelabstandes irgend zweier beliebiger, am Himmel oder auf der Erde gelegener Punkte G und L. Der Beobachter löst zunächst die Schraube S, ergreift dann den Sextanten mit der einen Hand an der lotrecht zu dessen Ebene angebrachten Handhabe und visiert den Punkt L durch den oberen Teil des Spiegels M unmittelbar an, nachdem er zuvor noch die Ebene des Instrumentes mit der durch L, M und das eigene Auge bestimmten Ebene zur Deckung gebracht hat. Nunmehr schiebt er die Alhidade so lange hin und her, bis das unverrückt in seiner Anfangsstellung verharrende Auge das Objekt G im belegten Teile des Spiegels M erkennen kann; G liegt hart unter L, so wie es *Fig. 26* deutlich zu machen sucht. In dem Augenblicke, in welchem dies erreicht ist, stellt er die Schraube S fest, setzt das Instrument ab und kann nun in aller Ruhe ablesen, welcher Teil des Limbus zwischen dem Nullpunkte und dem Index des Nonius (s. u.) enthalten ist. Um jede Umrechnung überflüssig zu machen, verfährt der das Instrument fertigende Mechaniker bei der Einteilung des Kreisrandes gleich ebenso, wie es (s. o.) beim Seering gehalten

Fig. 26.



wurde; jede Zahl n wird durch $2n$ ersetzt, so daß also, wenn die Ablesung etwa 68° ergibt, der Winkel CAH in Wahrheit nur eine Größe von 34° besitzen würde. Einem Winkel $CAH = 45°$ entspricht ein Winkel $GOL = 90°$ [1]).

Spiegelkreise. Dieses Spiegelinstrument also, welches in der Form eines Sextanten oder Oktanten, seltener eines Quadranten, dem Seemanne ebenso unentbehrlich ist wie dem wissenschaftlichen Reisenden, bedarf zu seiner Handhabung keines stabilen Bodens, sondern es kommt alles auf die freilich nur durch andauernde Uebung zu erlangende Geschicklichkeit an, beide Visierpunkte — also beispielsweise den Mondrand und einen Stern — im Sinne von *Fig. 26* zur Koinzidenz zu bringen. Der *Spiegelkreis*, welchen Tob. Mayer 1754 der englischen Admiralität als noch geeigneter für Winkelbestimmungen in Vorlage brachte [2]), den dann Borda, ohne von Mayers Vorgang Kenntnis zu haben, in einer besonderen Schrift [3]) angelegentlich empfahl, und den von deutschen Künstlern Pistor mit großem Geschicke ausführte, hat sich auf die Dauer nicht behaupten können, dagegen machen die seitdem zu hoher Vollkommenheit gebrachten Prismeninstrumente den älteren Spiegelsextanten,

---

[1]) Auf diesem Korollare der allgemeinen Wahrheit beruht das von Berlin (Ueber ein Spiegelinstrument zum Einrichten grader Linien auf dem Felde, Arch. d. Math. u. Phys., 4. Teil, S. 126 ff.) angegebene *Spiegelkreuz*, welches zu zwei auf einer Graden gegebenen Punkten beliebig viele andere hinzuzufinden gestattet, oder auch der *Winkelspiegel*, mit dessen Hilfe man im Terrain rechte Winkel abstecken kann. Vgl. für die Theorie dieser in der Feldmeßkunst viel gebrauchten Instrumente, die man in freier Hand halten oder auch, größerer Bequemlichkeit halber, auf einem Stocke befestigen kann, die Ausführungen der Fachwerke (v. Bauernfeind, 1. Band. S. 170 ff.; Jordan, 2. Band. S. 6 ff.).

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 582. Mayer kam es hauptsächlich darauf an, sein uns schon bekanntes Multiplikationsprinzip auch für die Reflexionsinstrumente nutzbar zu machen, und das konnte nur am Vollkreise geschehen.

[3]) Borda, Description et usage du cercle de réflexion, Paris 1787.

durch welche die darstellende Erdkunde zu Anfang dieses Jahrhunderts die größte Förderung erfuhr [1]), neuerdings empfindliche Konkurrenz. Die Litteratur über die Spiegelsektoren ist eine sehr ausgedehnte, und abgesehen von dem Umstande, daß ihrer in allen Lehrbüchern der Geodäsie und praktischen Astronomie mehr oder minder ausführlich gedacht wird, gibt es auch schon aus früherer Zeit sehr verdienstliche Monographien über diese Beobachtungswerkzeuge und deren Anwendung zur Ortsbestimmung [2]).

Fehler der Spiegelinstrumente. Die genaue Ablesung am Rande wird durch den Nonius, den man allenfalls auch mit einem Ablesemikroskope in Verbindung bringen kann, bewerkstelligt [3]). Doch ist damit noch nicht

---

[1]) Das Verdienst, den Spiegelsextanten in den Dienst geographischer Forschung gestellt zu haben, kommt in erster Linie dem Freiherrn F. X. v. Zach zu, der in den beiden folgeweise von ihm redigierten astronomisch-geographischen Zeitschriften unermüdlich für die Verfeinerung der Längen- und Breitenbestimmungen eintrat. Ganz besonders empfänglich für die Belehrung v. Zachs erwies sich A. v. Humboldt, der durch seine fast zahllosen Arbeiten mit dem Sextanten — man vergleiche ihre Aufzählung im dritten Bande der Bruhnsschen Humboldt-Biographie (S. 36) — zuerst unser topisches Wissen von Süd- und Mittelamerika auf eine sichere Basis stellte.

[2]) Ein noch immer sehr brauchbares und dem angehenden Praktiker anzuempfehlendes Werk ist Bohnenbergers „Anleitung zu geographischen Ortsbestimmungen, besonders mit dem Spiegelsextanten" (Göttingen 1795). Kürzer, aber für seinen nächsten Zweck ebenfalls sehr geeignet ist die für die russischen Generalstabsoffiziere verfaßte „Anleitung zu der astronomischen Bestimmung der Länge und Breite" von Th. Schubert (St. Petersburg 1803). Der Praktiker, vorab der Seemann, findet eine auf gründlicher Lehrerfahrung beruhende Darstellung alles Wissenswerten bei Eylert (Der Spiegelsextant; aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 1881). In dieser Abhandlung sind die Ergebnisse der Prüfung mitgeteilt, welche seitens der Seewarte im Laufe der Jahre an nicht weniger denn 700 Reflexionsinstrumenten vorgenommen ward.

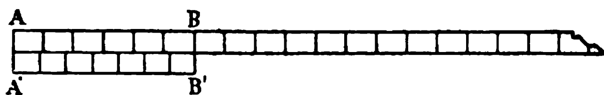
[3]) Obwohl der Nonius in jedem Lehrbuche der Physik beschrieben ist, darf doch eine Erläuterung dieses wichtigen Bestandteiles eines jeden neueren Messungsinstrumentes auch hier nicht

alles gethan, es sind vielmehr, ähnlich wie beim Theodoliten, vor dem Gebrauche erst die verschiedenen *Fehler* des Instrumentes zu ermitteln und unschädlich zu machen; eingehende mathematische Erörterungen über diese Fehler

---

fehlen. Tycho Brahe fühlte auf das schmerzlichste den Nachteil des Umstandes, daß selbst bei riesigen Kreisen die Entfernung zweier nächst benachbarter Teilstriche nicht unter ein gewisses Maß hinabgedrückt werden kann, ohne die Erkennbarkeit der einzelnen Striche völlig aufzuheben. Durch den Görlitzer Mathematiker Scultetus, der bei Hommel in Leipzig dessen *verjüngten Massstab* kennen gelernt hatte, erfuhr er, daß sich dieses Prinzip auch auf Kreisteilungen übertragen lasse, und brachte demzufolge auf seinen Quadranten die nach ihm so benannte *Transversalteilung* an (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 365 ff.). Ungleich besser war ein anderes Verfahren, das nach Breusings Ermittlungen (Astron. Nachr., Nr. 2289) ursprünglich von Clavius herrührte, das aber erst durch Verniers Schrift „La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques“ (Brüssel 1631) bekannter wurde. Man würde die hier geschilderte Vorrichtung richtiger einen Vernier nennen, wie es ja wohl auch mancherorts geschieht, allein da schon in dem 1542 herausgekommenen Buche „De crepusculis“ des portugiesischen Geometers Nunez (latinisiert Nonius) ein verwandter Gedanke ausgesprochen wird, so ist der Ausdruck „*Nonius*“ der herrschende geworden. Wenn wir uns in *Fig. 27*

Fig. 27.



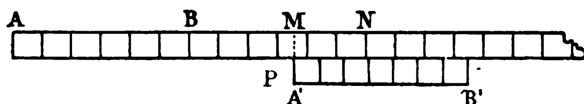
zur Erläuterung eines gradlinigen Maßstabes bedienen, so ändert dies an der Sache selbst natürlich nicht das Geringste. AB ist ein Stück des Maßstabes (resp. Limbus), welches in n gleiche Teile geteilt ist, das an dem Stabe frei verschiebbare Stück $A'B'$ ist gleich AB, jedoch entweder in $(n+1)$ oder $(n-1)$ Teile geteilt; in unserer Zeichnung ist $n = 6$. Im ersteren Falle sagt man, der Nonius sei ein „vortragender“, im zweiten sagt man, er sei ein „schleppender“. Nennt man l die Distanz zweier Teilstriche des Maßstabes, l' die entsprechende Größe beim Nonius, so ist $(n \pm 1) l' = n l$, $l' = \frac{n}{n \pm 1} l$. Nun stehe der Index, dessen Entfernung vom Nullpunkte abgelesen werden soll, so, daß er mit keinem Teilpunkte ganz genau zusammenfällt; alsdann sucht man denjenigen Teilstrich der Originalteilung auf, welcher mit einem Striche des

sind u. a. von Lemoch [1]), Andres [2]) und Schell [3]) angestellt worden. Mit v. Bauernfeind [4]) sind vom Beobachter an das Instrument folgende sieben Fragen zu stellen: 1. Sind Limbus und Nonius richtig geteilt gewesen? 2. War von Anfang an jeder Spiegel planparallel, wie er es sein muß? 3. Stehen beide Spiegel senkrecht auf der Ebene des Sextanten? 4. Läuft dieser Ebene auch die Fernrohrachse parallel? 5. Existiert ein Kollimationsfehler und wie groß ist derselbe? 6. Gilt Gleiches, wie für 2., auch für die behufs Sonnenbeobachtungen ein-

---

Nonius ganz oder doch fast genau koinzidiert. In *Fig. 28*, welche durch Verschiebung des Nonius aus *Fig. 27* entstanden gedacht ist,

Fig. 28.



steht der Nullpunkt des Nonius bei M; die Koinzidenz tritt ein bei N; sonach ist

$$MN = \frac{3nl}{n+1} \left(= \frac{18}{7} l\right),$$

und PM, welches noch zu AP hinzuaddiert werden muß, ist

$$3l - \frac{3nl}{n+1} = \frac{3l}{n+1} \left(= \frac{3}{7} l\right),$$

so daß also der Ort von M genau bestimmt ist. Und ähnlich verhält es sich, wenn l eine Bogeneinheit, einen Grad oder eine Minute, bedeutet.

[1]) Lemoch, Untersuchung des Fehlers, wenn bei einem Spiegelinstrumente die Spiegel auf dem Limbus nicht senkrecht stehen, Archiv d. Math. u. Phys., 25. Teil. S. 167 ff.

[2]) Andres, Ueber die Bestimmung jener drei Gleichungen, welche dazu dienen, die Exzentrizität eines Winkelmeßinstrumentes zu berechnen, ibid. 33. Teil. S. 95 ff.

[3]) A. Schell, Ueber den Einfluß der Fehler des Spiegelsextanten auf die Winkelmessung, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 17. Band. S. 465 ff.

[4]) v. Bauernfeind, 1. Band. S. 338.

geschobenen Gläser [1])? 7. Geht die Achse der Alhidade durch den Mittelpunkt der Teilung? Daß alle diese Momente fehlererzeugend wirken können, ist wohl an und für sich klar; nur der fünfte Punkt erheischt einen kleinen Kommentar, der ihm denn auch zu teil werden soll, während wir für die übrigen Fragen auf die Fachschriften, insbesondere auf das bereits citierte Werk v. Bauernfeinds verweisen.

Während nämlich die übrigen Fehler meist vom Konstrukteur selbst vermieden werden können, erfordert der *Kollimationsfehler* ein aktives Eingreifen des Beobachtenden heraus, da diese Unrichtigkeit, einmal korrigiert, doch bei etwas unsanfter Behandlung des Instrumentes — und welcher Reisende wäre in der Lage, seinen Sextanten dauernd vor solcher Behandlung zu schützen? — immer wieder hervortritt. Dieser Fehler besteht darin, daß dann, wenn alle vier Spiegelebenen genau parallel sind, der als Index dienende Nullpunkt des Nonius nicht genau auf den Nullpunkt der Limbusteilung zu liegen kommt. Die Prüfung wird in der Weise vorgenommen, daß man die Alhidade genau auf Null befestigt und nun einen hellen Stern anvisiert, damit man das direkte und reflektierte Bild dieses Sternes zugleich ins Fernrohr bekommt. Wenn sich dann beide Bilder decken, so ist ein Kollimationsfehler nicht

---

[1]) Diese Gläser sind sogenannte *Blendgläser*, welche man einschaltet, um den Glanz der Sonnenstrahlen abzuschwächen. Die Notwendigkeit, bei Sonnenbeobachtungen sich eines solchen Mediums zu bedienen, hatte sich schon vor Erfindung des Fernrohres fühlbar gemacht, denn die ersten Andeutungen über farbige Zwischengläser kommen bereits in dem „Homocentricorum seu de stellis liber unus" des Fracastor (Venedig 1538) und in dem „Astronomicon Caesareum" des Peter Apian (Ingolstadt 1540) vor. Galilei freilich wußte noch nichts von diesem unserem Gefühle nach so nahe liegenden Auskunftsmittel und büßte deshalb bei seinen Beobachtungen der Sonnenflecke nach und nach das Gesicht ein, bald nachher aber widmete F. Fontana den Blendgläsern bereits einen Abschnitt in seinen „Novae coelestium terrestriumque rerum observationes" (Neapel 1646). Ueber neuere Vorschläge, denselben Zweck auf andere Art (durch Versilberung des Objektivs, durch mehrfache Reflexion und teilweise Auslöschung des Sonnenlichtes u. s. w.) zu erreichen, orientiert R. Wolfs Handbuch (2. Band. S. 290 ff.).

vorhanden; tritt aber die Deckung nicht ein, so schraubt man am Nonius so lange, bis die Deckung eingetreten ist, und dann zeigt der Index unmittelbar den Kollimationsfehler an. Da letzterer gleich wahrscheinlich ein positiver oder negativer sein kann, so ist es gut, wenn der Limbus des Sextanten auch auf der anderen Seite des Nullpunktes noch mit einer Teilung von einigen Graden versehen ist.

Künstliche Horizonte. Vorgreifend dürfen wir schon jetzt bemerken, daß eine der wesentlichsten Aufgaben des Spiegelsextanten die ist, die größte Höhe eines Gestirnes über dem Horizont zu ermitteln. Man wartet zu dem Ende ab, bis der Stern den Meridian erreicht hat, und mißt in diesem Augenblicke den Winkel, welchen er im Fernrohre des Sextanten mit seinem Spiegelbilde einschließt; denn da bekanntlich in einem Planspiegel das Bild ebensoweit jenseits liegt wie das Objekt selbst diesseits des Spiegels, so braucht man nur jenen Winkel zu halbieren, um die gesuchte Höhe zu erhalten. Damit jedoch überhaupt ein Bild entstehe, muß zuvor eine spiegelnde Ebene beschafft sein, und diese bildet denn auch unter dem Namen *künstlicher Horizont* ein hervorragend wichtiges Requisit zumal des Reisenden. Man bedient sich hierzu eines mit Oel oder Quecksilber gefüllten niedrig-cylindrischen Gefässes; Bessel hat auch mit dunkel gefärbtem Wasser als Füllflüssigkeit gute Erfolge erzielt [1]). Der *Glashorizont* ist von Sawitsch [2]) empfohlen worden; er besteht aus zwei parallelen Platten von gewöhnlichem (oder besser Marien-) Glase und wird zum Schutze gegen Luftströmungen mit einem Dache versehen.

---

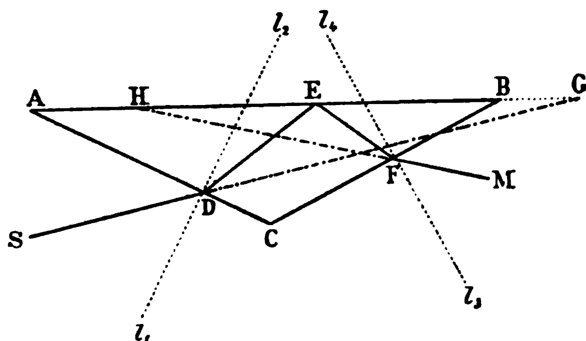
[1]) Carl, a. a. O., S. 137 ff. Demselben Gewährsmanne zufolge kam Lamont ganz gut zurecht mit einer im Quecksilber angequickten und in einen Ring gefaßten Messingplatte. Das Zittern des Quecksilberhorizontes zu beseitigen, haben Mauvais und Séguin ein einfaches Verfahren angegeben (Magazin für die Litteratur des Auslandes, 1853. Nr. 27).

[2]) Sawitsch, Praktische Astronomie, vorzüglich in Anwendung auf geographische Ortsbestimmung, deutsch von Götze, 2. Band, Hamburg 1850. S. 346.

Ja nach v. Bauernfeind[1]) kann man sogar ganz gut auch mit einer gewöhnlichen Glasplatte ausreichen, welche auf der Rückseite geschwärzt oder mattgeschliffen, im Bedarfsfalle aber mittelst Stellschrauben und Wasserwage in die horizontale Lage versetzt wird.

Ersetzung der Spiegel durch Prismen. Schon im vorigen Abschnitte haben wir davon Kenntnis genommen, daß die Zurückwerfung eines Strahles statt durch einen Spiegel sehr wohl auch durch die total re-

Fig. 29.



flektierende Seitenfläche eines Prismas bewirkt werden könne. An jener Stelle handelte es sich allerdings nur um solche Strahlen, welche ungebrochen in das Innere des Prismas eintreten, aber auch wenn dies nicht mehr zutrifft, verhält sich das Prisma doch genau ebenso wie ein ebener Spiegel. In *Fig. 29* können wir den Beweis für diese Behauptung verfolgen[2]). ABC ist der Querschnitt eines dreieckigen Prismas, und zwar soll dieser Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck sein. Es gilt bloß, darzuthun, daß der in das Prisma einfallende Strahl SD nachher, wenn er als zweimal gebrochener und einmal

[1]) v. Bauernfeind, 1. Band. S. 336.
[2]) Carl, S. 150 ff.

zurückgeworfener Strahl FM das Prisma wieder verläßt, mit der Fläche AB den gleichen Winkel wie vorhin bildet. Um den Weg des Strahles im Inneren des Glaskörpers zu eruieren, errichten wir in D ein Einfallslot $l_1 l_2$, konstruieren den $\sphericalangle EDl_2$ gemäß des bekannten Brechungsgesetzes und bezeichnen mit E den Punkt, in welchem der abgelenkte Strahl die Hinterfläche AB trifft. Hier tritt totale Reflexion ein, sobald der brechende Winkel bei C die bezügliche Größe hat — gewöhnlich ist $\sphericalangle C \geq 90^0$ —, EF ist der zurückgeworfene Strahl, und wenn $l_3 l_4$ das Ausfallslot bedeutet, so wird der Strahl von diesem abgelenkt und in die Richtung FM gebracht. In den beiden Dreiecken ADE und BFE ist nun $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, $\sphericalangle AED = BEF$ nach dem Spiegelungsgesetze, somit auch $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BFE$. Zieht man von jedem dieser Winkel einen rechten ab, so bleibt $\sphericalangle EDl_2 = \sphericalangle EFl_4$, und da, unter n den Brechungsindex verstanden,

$$n = \frac{\sin(\sphericalangle SDl_1)}{\sin(\sphericalangle EDl_2)} = \frac{\sin(\sphericalangle MFl_3)}{\sin(\sphericalangle EFl_4)}$$

sein muß, so ist auch, bei der Gleichheit der Nenner, $\sphericalangle SDl_1 = MFl_3$, und ebenso sind die um 90^0 vermehrten Winkel ADG und BFH einander gleich. Wieder mit Zuziehung des Umstandes, daß $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, ergibt sich zum Schlusse aus den Dreiecken ADG und BFH die Gleichheit: $\sphericalangle AGS = \sphericalangle BHM$. Damit aber ist die vorgelegte Behauptung erwiesen.

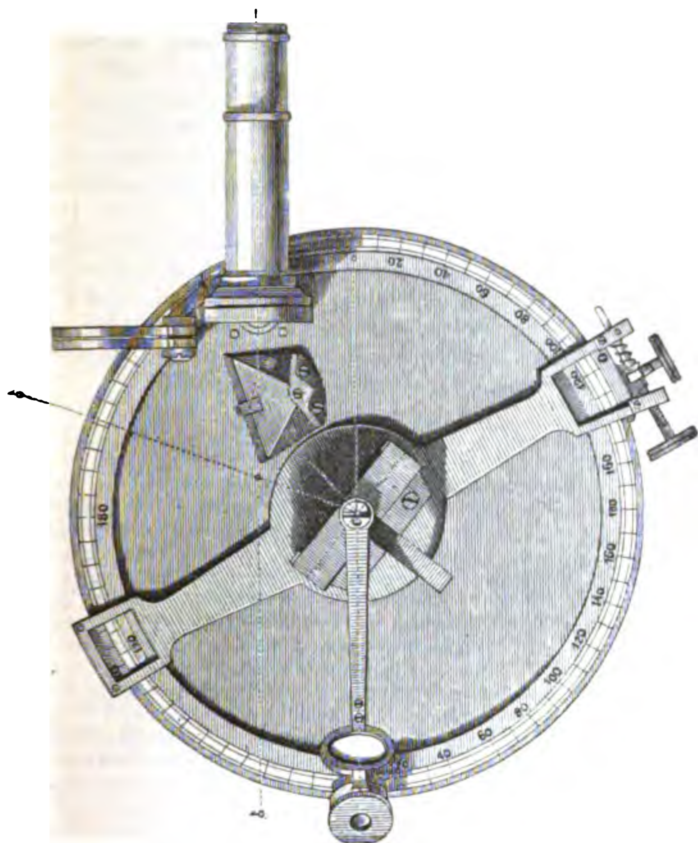
Gestützt auf die soeben erhärtete Thatsache, hat K. A. v. Steinheil 1834 den Bordaschen Spiegelkreis in einen *Prismenkreis* umgewandelt[1]), und Bessel hat die Theorie dieses Instrumentes mit der ihm eigenen Meisterschaft entwickelt[2]). Am bekanntesten und von

[1]) Steinheil, Neuer Reflexionskreis mit Prismen statt Glasspiegeln, Astron. Nachr., Nr. 243.

[2]) Bessel, Ueber die Theorie der Steinheilschen Prismenkreise, ibid. Nr. 259; der Aufsatz ist auch wieder abgedruckt in der von R. Engelmann veranstalteten Sammlung „Abhandlungen von F. W. Bessel“ (2. Band. S. 166 ff.).

Praktikern am meisten gebraucht ist der Prismenkreis von Pistor und Martins, zu welchem eine ausführliche,

Fig. 30.



alle theoretischen Fragen mit berücksichtigende Gebrauchsanweisung durch v. Bauernfeind [1]) ausgearbeitet worden ist. Eben nach derselben Vorlage stellt *Fig. 30* eine

---

[1]) v. Bauernfeind, 1. Band. S. 352 ff.

Oberansicht des Prismenkreises dar. Ein solches Instrument insonderheit für die feinen Längenbestimmungen durch Monddistanzen mit sich zu führen, empfiehlt Jordan, einer der gewiegtesten Kenner, dem Reisenden [1]), der daneben allerdings auch noch eines gröber gearbeiteten Kompaß - Theodoliten für topographische Aufnahmen schlechtweg nicht werde entbehren können. Daß die am Prismenkreise anzubringenden Korrektionen dem Wesen nach von denjenigen des Spiegelsextanten nicht sehr verschieden sind, daß insbesondere auch auf die Bestimmung des Kollimationsfehlers Gewicht zu legen ist, bedarf wohl kaum besonderer Hervorhebung.

Mit diesen allerdings nur das Wesen der ganzen Instrumentgattung kennzeichnenden Worten müssen wir hier die Erörterungen über die Prismeninstrumente [2]) und überhaupt über die in der mathematischen Geographie zur Anwendung kommenden Beobachtungs- und Messungsmethoden [3]) für abgeschlossen erklären.

---

[1]) Vgl. Jordans Beitrag „Topographische und geographische Aufnahmen" zur zweiten Auflage der von Neumayer in Verbindung mit hervorragenden Gelehrten aller Disziplinen herausgegebenen „Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen" (1. Band, Berlin 1888. S. 69). Ebendort wird auch daran erinnert, daß ein kleiner „Dosensextant" während des Marsches selbst dem Reisenden zur Anstellung von Winkelmessungen aus freier Hand, mit einer Genauigkeit von nahe 1', verhelfen könne.

[2]) Eine andere Gattung von Prismeninstrumenten wollen wir nicht ganz mit Schweigen übergehen, aber doch nur in einer Note berühren, da sie — hochwichtig für den Geodäten — für den Geographen nur von untergeordneter Bedeutung sind. Wir meinen die von v. Bauernfeind erfundenen *Winkelprismen* und *Prismenkreuze*, s. d. Erfinders Schrift „Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes" (München 1851). Hier ist gezeigt, daß durch zweimalige innere Reflexion und zweimalige Brechung an der Aus- und Eintrittsfläche dann ein *unveränderlicher* Winkel von der Größe des ersten brechenden Winkels zustande kommt, wenn dieser doppelt so groß als der zweite brechende Winkel ist.

[3]) Die auf dem eben erwähnten v. Bauernfeindschen Lehrsatze beruhenden Prismenapparate können auch gleich als *Distanzprisma* zur Messung von Entfernungen aus festem Stande verwendet werden. Die mathematische Geographie nimmt an dem zuletzt genannten, altberühmten Probleme der Geodäsie nicht in gleicher Weise Anteil, wie z. B. die Kriegswissenschaft (Ballistik), doch ist

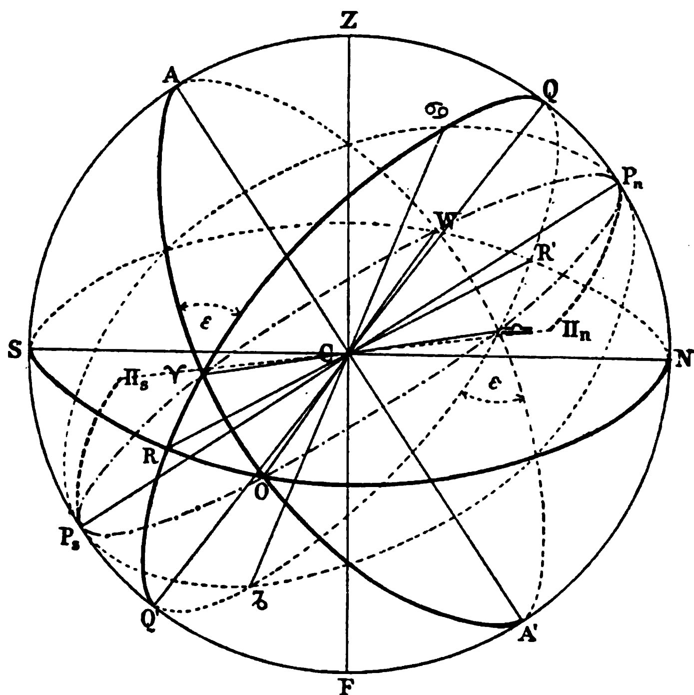
VII. Merkwürdige Kreise und Punkte der Himmelskugel; die drei sphärischen Koordinatensysteme.

Die drei himmlischen Fundamentalkreise. Nachdem wir uns im vorstehenden darüber vergewissert haben, in welcher Weise ein Punkt der Himmelskugel mit Meßinstrumenten auf seine Lage geprüft werden kann, kehren wir zu den in den Abschnitten III und IV niedergelegten sphärischen Betrachtungen zurück. Wenn wir von der Mondbahn als einer zunächst minder wichtigen absehen, sind uns bisher *vier Hauptkreise der Himmelskugel* als Kreise von fundamentaler Bedeutung entgegengetreten: *Horizont, Aequator, Ekliptik, Meridian.* Was wir von denselben kennen gelernt haben, versinnlicht *Fig. 31.* C ist der Mittelpunkt der scheinbaren Himmelskugel und zugleich Standpunkt des — noch immer unbeweglich daselbst vorausgesetzten — Beobachters, Z das Zenit, F der Fußpunkt, S der Südpunkt des Horizontes, N dessen Nordpunkt, O dessen Ostpunkt, W dessen Westpunkt. Die Drehungsachse des Himmels ist durch den Nordpol P_n und durch den Südpol P_s bestimmt. Der in der Figur die Sphäre begrenzende größte Kreis ZP_nNFP_sS ist der Meridian; ihm gehören auch die beiden Punkte A und A' an, in denen der außerdem noch durch O und W

für den wissenschaftlichen Reisenden die Möglichkeit, Distanzen ohne vorgängige Basismessung ermitteln zu können, immerhin eine sehr erwünschte, und aus diesem Grunde gedenken wir sowohl des Distanzprismas (v. Bauernfeind, Elem. d. Verm., 1. Band. S. 38) als auch der in neuerer Zeit viel empfohlenen *Tachymeter*. Die tachymetrischen Theodolite, wie sie zumal von Tichy und Starke in Wien geliefert werden, führen außer den uns längst bekannten Bestandteilen noch einen Kompaß und ein Diastimeter. Sehr eingehend behandelt diese von ihm als teilweise sehr brauchbar erkannten Instrumente das Werk von Jordan (2. Band. S. 590 ff.), wo u. a. auch die gesamte Litteratur über Tachymetrie eine sorgfältige Verzeichnung gefunden hat. Nachzutragen wäre vielleicht noch die manches Belehrende enthaltende Polemik zwischen Bohn und A. Schell (Zeitschr. f. Math. u. Phys., histor.-litterar. Abteilung, 27. Band. S. 15 ff. S. 114 ff.).

hindurchgehende Aequator kulminiert. Endlich ist noch ein größter Kreis vorhanden, der mit dem Aequator die beiden Punkte ♈ und ♎ (Widder- und Wagepunkt), mit dem Horizont die beiden Punkte R und R', mit dem

Fig. 31.



Meridian die beiden Punkte Q und Q' gemein hat und mit dem Gleicher den $\sphericalangle A ♈ Q = \sphericalangle A' ♎ Q' = \varepsilon$ einschließt, unter ε die Schiefe der Ekliptik verstanden. Wie jeder Hauptkreis der Kugel, so besitzt auch die Ekliptik zwei Pole, die um 90° von jedem Punkte der Sonnenbahn abstehen; der uns sichtbare unter diesen zwei

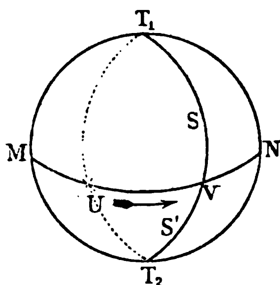
Punkten ist der *Nordpol der Ekliptik*, der uns unsichtbare ist der *Südpol der Ekliptik*. In *Fig. 31* sind Π_n und Π_s bezüglich diese Pole; verbindet man jeden derselben mit dem ihm zunächst gelegenen Himmelspole, so ist arc $P_n \Pi_n$ = arc $P_s \Pi_s = \varepsilon = 23\frac{1}{2}^0$. Endlich ziehen noch zwei neue Hauptkreise unsere Aufmerksamkeit auf sich, die in der Figur durch besondere Darstellung ihrer Peripherien ausdrücklich charakterisiert worden sind. Zu ♈ und ♎ suchen wir die zwei anderen Kardinalpunkte der Ekliptik dadurch auf, daß wir ♈♎ ziehen und auf dieser Linie in der ekliptischen Ebene eine zweite Grade senkrecht errichten, welche den Kreis der Sonnenbahn in ♋ und ♑ (Punkt des Krebses und des Steinbockes) durchschneidet. Die beiden Hauptkreise, welche sich einerseits durch P_n, P_s, ♈ und ♎, andererseits durch P_n, P_s, ♋ und ♑ hindurch legen lassen, führen den Namen *Koluren* [1]), und zwar ist der erste von beiden der *Kolur der Aequinoktien*, der zweite der *Kolur der Solstitien*.

Sphärische Koordinaten. Auf Grund unserer Konstruktion gewisser Kreise und Punkte an der Himmels-

[1]) Das Wort κόλουρος kommt nach Ideler erstmalig bei Eudoxus vor (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 113); die Etymologie des Wortes blieb lange Zeit völlig unaufgeklärt, so daß im 14. Jahrhundert Konrad v. Megenberg in seiner deutschen Bearbeitung der Sphärik Sacroboscos sogar die sonderbare Verdeutschung „Waldochsenkreise" zu Markte bringen durfte. Einiges Licht möchte auf die Entstehung des Wortes fallen durch einen Meinungsaustausch zwischen v. Berg und Heis, welcher sich in der „Wochenschrift f. Astr., Meteor. u. Geogr." abspielte (17. Jahrgang. S. 348 ff., 18. Jahrgang. S. 44 ff.), und in welchem auch das Vorkommen des Terminus bei Achilles Tatius, Ptolemäus, Macrobius u. a. nachgewiesen ist. Die von Heis aufgestellte Hypothese erscheint höchst plausibel. Zeichnet man auf eine Himmelskugel sowohl die beiden Koluren als auch die Gestalten der Himmelskörper, so sieht man, daß der Kolur der Solstitien den Schweif des großen Bären, der Kolur der Aequinoktien den Schweif des kleinen Bären vom Körper dieser Tiere abschneidet. Die Idee Keplers, daß die Bestandteile des Wortes κολούω (verstümmle) und οὐρά (Schwanz) seien, war also ganz berechtigt, nur irrte dieser große Astronom darin, daß er die Koluren deshalb „Stutzschwanzkreise" nennen

kugel, welche nicht von unserem Belieben, sondern von der Natur der Sache sich abhängig erwies, können wir jetzt dazu übergehen, *den Ort eines beliebigen Punktes der Sphäre eindeutig festzulegen.* Dies geschieht durch sogenannte *Koordinaten*, und zwar bedürfen wir, obgleich wir uns im Raume befinden, nur *zweier* derartiger Bestimmungsstücke, da ja sämtlichen in Betracht kommenden Punkten ein unveränderlicher Abstand vom Standpunkte des Beobachters zukommt. In *Fig. 32* wird das Wesen einer sphärischen Koordinatenbestimmung allgemein begründet.

Fig. 32.



MN ist ein fester Hauptkreis der Kugel, T_1 und T_2 sind seine Pole. Auf MN wird zum Anfangspunkte der Zählung ein fester Punkt U genommen, der zunächst allerdings willkürlich auszuwählen ist, während in den von der Astronomie acceptierten Systemen dieser Punkt durch die Natur selbst vorgezeichnet erscheint. Sobald wir dann noch über den Sinn eine Bestimmung getroffen haben, in welchem wir von U aus zu zählen beabsichtigen (vgl. den beigesetzten Pfeil), so sind alle Vorbereitungen zur Lösung unserer Aufgabe gegeben. Wenn nämlich S der zu fixierende Punkt ist, so legen wir einfach durch S, T_1 und T_2 einen größten Kreis und markieren unter den zwei Schnittpunkten desselben mit MN denjenigen, der S näher gelegen ist. Dieser Schnittpunkt sei V. Den Bogen UV nennt man *sphärische Abszisse*, den Bogen SV *sphärische Ordinate*, und es ist einleuchtend, daß, sobald UV und SV gegeben sind, ein gleiches auch für den von diesen Größen bestimmten Punkt S zu gelten hat.

---

wollte, weil ein Teil derselben nicht sichtbar sei, denn dies gilt ja. den Horizont etwa ausgenommen, für jeden Hauptkreis der Himmelskugel.

Die Abszissen werden, im Sinne des beigesetzten Pfeiles, von 0^0 bis 360^0 durchgezählt, so daß also für sie eine Zweideutigkeit überhaupt nicht eintreten kann. Für S dagegen bedarf es noch einer Zusatzbestimmung, da, wenn wir diesen Punkt auf der Halbkugel T_1MN voraussetzen, auf der anderen Halbkugel T_2MN ein zweiter Punkt S' sich befindet, dessen Abszisse und Ordinate die gleichen Absolutwerte haben. Um hier eine Verwechslung auszuschließen, genügt es, die eine Halbkugel als positiv, die andere als negativ aufzufassen und der Ordinate jeweils das betreffende Zeichen beizusetzen. Wollen wir an einigen nahe liegenden Beispielen den Zweck unserer Koordinatenbestimmung verdeutlichen, so kann das geschehen, wie folgt:

$$U \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad V \begin{cases} x = UV \\ y = 0 \end{cases} \quad N \begin{cases} x = UN \\ y = 0 \end{cases} \quad M \begin{cases} x = 360^0 - MU \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} x = UV \\ y = +k \end{cases} \quad S' \begin{cases} x = UV \\ y = -k \end{cases} \quad \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \begin{cases} x = UV \\ y = \pm 90^0. \end{cases}$$

Mit x bezeichneten wir hier, wie es auch sonst regelmäßig geschieht, die Abszisse, mit y die Ordinate, mit k den Absolutwert des Bogens SV.

Man erkennt auch unverzüglich die Wahrheit nachstehenden Zusatzes: Alle Punkte, die auf ein und demselben, durch die Pole des Abszissenkreises gelegenen Hauptkreise gelegen sind, haben gleiche oder um 180^0 abweichende Abszissen; alle auf einem zum Abszissenkreise parallel gezogenen kleinen Kugelkreise gelegenen Punkte haben gleiche Ordinaten.

In der Astronomie und mathematischen Geographie wird von *drei Koordinatensystemen* Gebrauch gemacht, nämlich von demjenigen des Aequators, von demjenigen der *Ekliptik* und von demjenigen des *Horizontes.* Man gibt dem betreffenden Koordinatensysteme seinen Namen, je nachdem der Abszissenkreis einer der genannten drei Kreise ist. Natürlich erhalten in jedem der drei Fälle die zusammengehörigen Koordinaten auch besondere Namen.

Im Systeme des Aequators heisst die Abszisse Rektaszension, die Ordinate Deklination. Die den nördlichen Himmelspol in sich schließende der beiden vom Aequator gebildeten Halbkugeln ist die positive.

Im Systeme der Ekliptik heisst die Abszisse astronomische Länge, die Ordinate astronomische Breite[1]). Die den nördlichen Ekliptikpol in sich schließende der beiden von der Ekliptik gebildeten Halbkugeln ist die positive.

Im Systeme des Horizontes heisst die Abszisse Azimut[2]), *die Ordinate Höhe.* Die das Zenit in sich schliessende, d. h. die sichtbare Halbkugel ist die positive.

Da über die Art und Weise, wie sämtliche Koordinaten in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückt werden, nichts weiter zu bemerken ist[3]), so bleibt nur noch der

---

[1]) Man hat sich wohl zu hüten, die „astronomische" Breite und Länge nicht mit der erst später einzuführenden „geographischen" zu verwechseln.

[2]) Das Wort „Azimut", welches früher ohne alle Ursache am Schlusse mit einem h geschrieben wurde, soll nach Montucla (Histoire des mathématiques, vol. I, Paris 1799. S. 371) im Arabischen so viel wie „Himmelsgegend" bedeuten.

[3]) In Anbetracht des Umstandes, daß die stets in Kreisen parallel zum Aequator umlaufende Sonne in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, kann man das Gradmaß auch in Zeitmaß übersetzen. Es sind 360° äquivalent 24^h, 1° also $\frac{24^h}{360} = \frac{1^h}{15}$, und damit ist die Möglichkeit zum Anschreiben der betreffenden Proportion gegeben. Es sei z. B. die Rektaszension zu $11^\circ\, 54'\, 45''$ angegeben; was macht dieser Betrag in Zeit aus? Wir bringen alles auf die Benennung der Sekunde und erhalten so $42885''$; da die Untereinteilung des Grades dieselbe ist wie die der Stunde, so ist auch $1'' = \frac{1^s}{15}$, und weiter hat man

$$42885'' = \frac{42885^s}{15} = 2839^s = E\left(\frac{2839}{60}\right)^m + R\left(\frac{2839}{60}\right)^s = 47^m\, 19^s.$$

Hier bedeutet, wie in der Mathematik üblich, $E\left(\frac{a}{b}\right)$ die größte bei der Division von a durch b sich ergebende ganze Zahl, $R\left(\frac{a}{b}\right)$ den dabei herauskommenden Rest.

Sinn festzustellen, in welchem jeweils die Zählung der Abszissen zu erfolgen hat, sowie die Wahl der Anfangspunkte, denen die Abszisse 0° oder — was damit gleichbedeutend — 360° beizulegen ist. Für Aequator und Ekliptik wählt man als Anfangspunkt den einen ihrer beiden Durchschnittspunkte, und zwar den *Widderpunkt*, die Zählung selbst wird beim Aequator in dem *dem Drehsinn des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne* ausgeführt, bei der Ekliptik *im Sinne des Fortschreitens der Sonne* (links herum). Im letzteren Systeme haben sohin die vier Kardinalpunkte nachstehende Abszissenwerte: ♈ hat 0°, ♋ hat 90°, ♎ hat 180° und ♑ hat 270°. Beim Horizonte endlich wird, allgemein anerkannter Abmachung zufolge, der *Südpunkt* zum Nullpunkte gemacht, und von da wird über West nach Nord und Ost herumgezählt; in *Fig. 31* hat *S* das Azimut 0° oder 360°, *W* das Azimut 90°, *N* das Azimut 180°, *O* das Azimut 270°.

Die Begriffe *Poldistanz, Ekliptikpoldistanz, Zenitdistanz* sind jetzt wohl auch ohne weiteres klar. Sie bedeuten nämlich die Komplemente resp. zu Deklination, Breite und Höhe.

Der Stundenwinkel. Neben der Bestimmung durch Deklination und Rektaszension gibt es für einen auf den Aequator als Grundkreis bezogenen Stern noch eine zweite, in der Praxis mindestens gleich häufig vorkommende, nämlich die durch Deklination und *Stundenwinkel*. Letzterer ist der Winkel, welchen der durch den momentanen Ort des zu bestimmenden Punktes gehende Deklinationskreis [1]) mit dem Meridiane einschließt; er kann ebenso wie die Rektaszension in Bogenmaß ebensowohl wie in Zeitmaß angegeben werden. Man pflegt den Stundenwinkel vom Meridiane aus nach beiden Seiten hin zu zählen, und 15°

---

[1]) Den größten Kreis, auf welchem die Deklinationen und Poldistanzen abgemessen werden, kann man *Deklinationskreis*, oder auch, mit Bezug auf die gleich nachher folgende Definition, *Stundenkreis* nennen. Ebenso kann im Ekliptiksysteme von einem *Breitenkreis*, im Horizontalsysteme von einem *Höhenkreis* gesprochen werden.

entsprechen immer einer Zeitstunde. Sagt man also, der Stundenwinkel eines Sternes betrage $+52^0\,30'$, so heißt dies, es sind $\frac{52\frac{1}{2}^h}{15} = \frac{105^h}{30} = 3^h\,30^m$ seit seiner oberen Kulmination verflossen, und sagt man, der Stundenwinkel sei $= -75^0$, so will man damit ausdrücken, daß noch $\frac{75^h}{15} = 5^h$ bis zur Kulmination verfließen werden[1]). Ein besonderes viertes Koordinatensystem des Stundenwinkels halber zu konstruieren, wie dies z. B. Martus[2]) thut, konnten wir uns nicht entschließen; es erschien uns nicht logisch richtig, da ja doch der fundamentale Abszissenkreis in beiden Fällen derselbe und nur der Anfangspunkt der Zählung ein verschiedener ist. Rektaszension und Stundenwinkel des nämlichen Sternes liefern addiert eine ganz bestimmte Größe, über deren Bedeutung allerdings erst der nächste Abschnitt aufklären wird; aber erhellt doch aus dieser Thatsache die weitere: *Für den nämlichen Stern ist die Rektaszensionsdifferenz gleich der Differenz der zu diesen beiden Rektaszensionen gehörigen Stundenwinkel, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen.* Damit fällt aber die Berechtigung weg, zwischen zwei verschiedenen Koordinatensystemen des Aequators einen grundsätzlichen Unterschied zu machen.

Koordinatenbestimmung am Instrumente. Man ermißt nun, nachdem die einzelnen Methoden der sphärischen Koordinatenbestimmung ihre Erläuterung gefunden haben, auch weiter, wie mittelst der im Abschnitt V beschrie-

---

[1]) Sehr viele astronomische Tafelwerke enthalten Tabellen, mittelst deren man die zeitraubenden Multiplikationen und Divisionen ersparen und zur Zeit sofort den Bogenwert — und umgekehrt — aufschlagen kann. So finden wir, um nur ein Beispiel anzuführen, in der „Connaissance des Temps ... pour l'an 1889", herausgegeben vom französischen „Längenbureau", S. 680 und S. 682 eine Tafel für „Conversion en temps des parties de l'équateur ou des degrés de longitude terrestre" und eine zweite für „Conversion de temps en parties de l'équateur ou en degrés de longitude terrestre."

[2]) Martus, a. a. O., S. 43.

benen Instrumente diese Aufgabe in der Praxis zu lösen ist. Man führt die Vornahme dahin zielender Operationen auf die beiden alexandrinischen Astronomen Aristyllus und Timocharis (um 300 v. Chr.) zurück, und zwar sollen Deklinationen und Rektaszensionen die von ihnen bestimmten Koordinaten gewesen sein [1]); letzteres erscheint allerdings insofern fraglich, als andererseits die Einführung des Widderpunktes als Nullpunkt dem Hipparch zugeschrieben zu werden pflegt. Jedenfalls gingen die späteren Alexandriner in dieser Weise vor, indem sie sich der uns schon bekannten Armillen bedienten. Die Rektaszensionen zuerst im Zeitmaße direkt bestimmt zu haben, scheint das Verdienst des Nürnberger Patriziers Walther, eines Freundes und Schülers von Regiomontan, gewesen zu sein [2]). Was die ekliptischen Koordinaten anlangt, so scheinen sie erst etwa vom 16. Jahrhundert ab am Torquetum und an anderen Universalinstrumenten direkt beobachtet worden zu sein, wogegen Ptolemäus in seinem Sternverzeichnisse [3]) zwar Länge und Breite angibt, allein kaum auf Grund unmittelbarer Messung hin; vielmehr dürfte er auf dem Sternglobus graphisch jene Umwandlung der Koordinaten vorgenommen haben, deren moderne Gestalt wir im nächsten Abschnitte kennen lernen werden. Auch die Verwendung des Horizontalsystemes ist viel neueren Datums; die ersten Azimutbestimmungen machte Regiomontanus, dem darin Rothmann in Kassel nachfolgte [4]), und die Schule Tycho Brahes brachte mittelst des wesentlich zur Ablesung der Horizontalbeobachtungen

---

[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 157.

[2]) Wenigstens ist Walther als derjenige Astronom bekannt, der zuerst die damals (1490) noch wenig verbreitete Räderuhr in den Dienst der beobachtenden Sternkunde stellte (Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 25), und es wäre bei dem damaligen Stande der Beobachtungspraxis — die Beobachtung der Meridiandurchgänge empfahl erst Tycho — nicht wohl abzusehen, was Walther anders als die Bestimmung von Rektaszensionsdifferenzen angestrebt haben sollte.

[3]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 194.

[4]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 373 ff.

dienenden Azimutalquadranten dies bis dahin am meisten vernachlässigte Koordinatensystem zu hohen Ehren. Spricht sich dies doch deutlich genug aus in dem Worte *Altazimut*, welches in früherer Zeit für das wahre Universalinstrument der Gegenwart, den Theodoliten, im Gebrauche war und schon etymologisch seinen Zweck andeutete.

VIII. Die Transformation der Koordinaten.

Das allgemeine Transformationsproblem. Sehr häufig ist es bei astronomischen Rechnungen wünschenswert, *von dem einen Koordinatensysteme zu einem anderen überzugehen*, d. h. es sind die Koordinaten für eines der drei Systeme direkt gemessen, und man wünscht zu wissen, welches die Koordinaten des fraglichen Punktes in einem anderen Systeme seien. Vielleicht ist es ersprießlich, den betreffenden Prozeß an dem denkbar einfachsten Falle, nämlich an zwei Koordinatensystemen in der Ebene zu erläutern, weil hier die Rechnungsoperationen fortdauernd durch die Anschauung kontrolliert werden können.

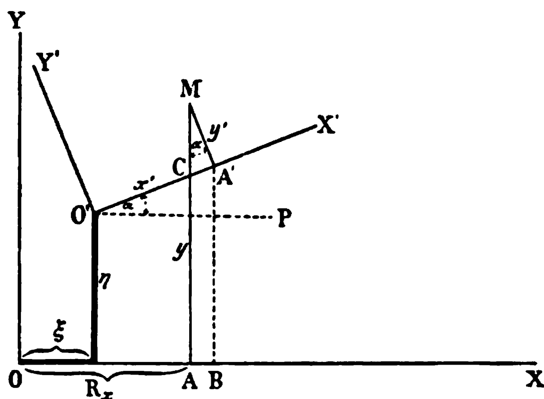
Koordinatentransformation in der Ebene. In *Fig. 33* ist OX die positive Abszissen-, OY die positive Ordinatenachse eines rechtwinkligen Systems; außer ihm ist noch ein zweites vorhanden, dessen entsprechende Achsen $O'X'$ und $O'Y'$ sind; damit letzteres in bezug auf das erstere völlig bestimmt sei, muß man die Koordinaten $OR = \xi$ und $O'R = \eta$ des neuen Anfangspunktes, wie auch den Winkel α kennen, welchen die durch O' parallel zu OX gezogene Grade $O'P$ mit $O'X'$ einschließt. Der Punkt M ist im ursprünglichen Systeme durch seine Abszisse $OA = x$ und Ordinate $MA = y$, im neuen Systeme durch seine Abszisse $O'A' = x'$ und Ordinate $MA' = y'$ gegeben; die Forderung ist, x' und y' durch x und y auszudrücken, wobei in den Schlußformeln sonst nur noch ξ, η und α auftreten dürfen. Wir fällen von A' auf OX die Senkrechte $A'B$, auf MA die Senkrechte $A'C$ und

haben dann, da $\sphericalangle A'MC = \alpha$ ist, sofort diese beiden Gleichungen $(A'B = CA)$:

$$x = \xi + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = \eta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Hierin sind x' und y' die beiden unbekannten Größen;

Fig. 33.



löst man nach ihnen in bekannter Weise auf und erinnert sich, daß $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ist, so erhält man

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x-\xi & -\sin\alpha \\ y-\eta & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}} = (x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\sin\alpha,$$

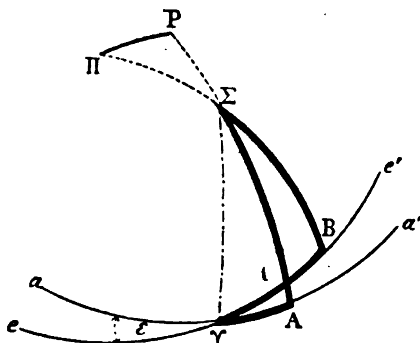
$$y' = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & x-\xi \\ \sin\alpha & y-\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}} = -(x-\xi)\sin\alpha + (y-\eta)\cos\alpha.$$

Damit ist also die gestellte Aufgabe vollständig gelöst, x' und y' sind als Funktionen der fünf Größen x, y, ξ, η, α dargestellt, wie es verlangt war.

Etwas minder einfach gestaltet sich die Sache natürlich auf der Kugelfläche, auf welcher bekanntlich *ähnliche* Figuren, welche nicht auch *gleich* wären, nicht existieren können. Von den verschiedenen Möglichkeiten werden wir hier nur die beiden in Wirklichkeit am häufigsten vorkommenden ausführlicher behandeln.

Ekliptik und Aequator. *I. Uebergang vom Ekliptikzum Aequatorsystem und umgekehrt.* aa' *(Fig. 34)* sei der Aequator, ee' die Ekliptik, $\sphericalangle\, a \Upsilon e = \sphericalangle\, a' \Upsilon e'$, also gleich der Ekliptikschiefe ε. Von dem zu bestimmenden Punkte Σ seien auf aa' und ee' resp. die beiden sphärischen Lote ΣA und ΣB gefällt; alsdann ist ΥA die Rektaszension α,

Fig. 34.



ΥB die Länge l, ΣA die Deklination δ, ΣB die Breite b [1]). Wir verlängern die beiden sphärischen Lote nach rückwärts, bis resp. der Himmelspol P und der Ekliptikpol Π erreicht werden, und fassen das so entstandene Kugeldreieck $P\Pi\Sigma$ ins Auge. In diesem ist $P\Pi = \varepsilon$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$, $\Pi\Sigma = 90^0 - b$, $\sphericalangle\, \Pi P \Sigma = 90^0 + \alpha$, $\sphericalangle\, P \Pi \Sigma =$

[1]) Diese Buchstabenbezeichnung soll auch in der Folge beibehalten werden, und ein Gleiches soll auch für die beim Horizontalsysteme vorkommenden Größen gelten.

$90^\circ - l$[1]). Wir haben dann alle die Beziehungen zwischen den Stücken eines sphärischen Dreieckes anzuschreiben, in denen der an Σ liegende Winkel nicht vorkommt; je zwei Gleichungen zusammengenommen werden ausreichen, um b und l durch α und δ oder umgekehrt α und δ durch b und l auszudrücken. Von den vielen möglichen Gleichungen[2]) sind drei unbedingt nötig, nämlich die folgenden, aus dem Sinus- und Kosinussatze[3]) hervorgehenden:

$$1.\ \cos b \cos l = \cos \alpha \cos \delta,$$
$$2.\ \sin b = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha,$$
$$3.\ \sin \delta = \cos \varepsilon \sin b + \sin \varepsilon \cos b \sin l.$$

Im erstgenannten Fall, wenn α und δ gegeben sind, berechnet man aus 2. die Größe b, setzt ihren Wert in 1. ein und findet l; im anderen Falle, wenn b und l gegeben sind, berechnet man aus 3. die Größe δ, setzt ihren Wert in 1. ein und findet α. Die Berechnung mit Zahlen fällt, wenn man so verfährt, viel einfacher aus, als wenn man die beiden gesuchten Bogen, jeden für sich, algebraisch direkt ermitteln und in diese Formeln erst die Zahlwerte einsetzen wollte, um so mehr, da sich den Gleichungen 2. und 3. ohne Mühe eine für die Logarithmierung geeignete Form erteilen läßt. Es wird genügen, dies für die eine derselben, etwa für 3. nachzuweisen. Man hat die Auswahl unter zwei verschiedenen Verfahrungsweisen, welche wir, damit das doch immer subjektiv ge-

---

[1]) Der Winkel $P\Sigma\Pi$ spielt in der Astronomie so selten eine Rolle, daß wir von seiner Berücksichtigung gänzlich absehen zu dürfen glauben. Bezeichnet wird derselbe übrigens gewöhnlich als *Positionswinkel.*

[2]) Wer einen Ueberblick über die Gesamtheit der allenfalls in Frage kommenden Gleichungen haben will, gewinnt denselben bei Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 85 ff.).

[3]) Statt durch den Sinussatz kann man Gleichung 1. auch dadurch erhalten, daß man resp. auf die durch Ziehung von $\Sigma\Upsilon$ erhaltenen beiden Dreiecke $\Sigma\Upsilon A$ und $\Sigma\Upsilon B$ den Kosinussatz anwendet. Es ist dann nämlich, da $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$ ist,

$$\cos \Sigma\Upsilon = \cos \alpha \cos \delta,\ \cos \Sigma\Upsilon = \cos b \cos l,$$

und daraus folgt durch Komparation die erwähnte Gleichung.

färbte Urteil über den Vorrang der einen oder anderen leichter geschöpft werde, nachfolgend zusammenstellen wollen.

A.

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l,$$
$$\sin b = r \sin\varphi,$$
$$\cos b \sin l = r \cos\varphi,$$
$$\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg} b \sin l,$$
$$r = \frac{\sin b}{\sin\varphi},$$
$$r(\sin\varphi \cos\varepsilon + \cos\varphi \sin\varepsilon) = \sin\delta,$$
$$r \sin(\varphi + \varepsilon) = \sin\delta.$$

B.

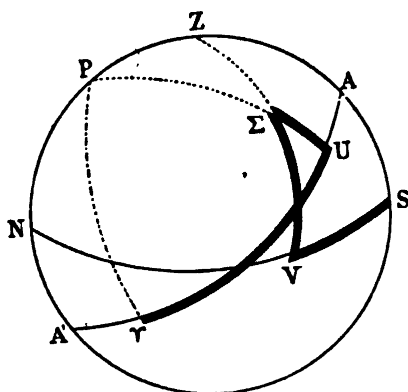
$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \cos b \sin l,$$
$$\sin\delta = \frac{\sin b \cos(\varepsilon - x)}{\cos x},$$
$$\sin\delta = \sin b \cos\varepsilon + \frac{\sin b \sin\varepsilon \sin x}{\cos x},$$
$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \sin b \operatorname{tg} x,$$
$$\sin\varepsilon \sin b \operatorname{tg} x = \sin\varepsilon \cos b \sin l,$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} b \sin l.$$

Damit wäre der erste der uns interessierenden beiden Fälle vollständig erledigt und wir gehen zu dem anderen über.

Aequator und Horizont. *II. Uebergang vom Horizont- zum Aequatorsystem und umgekehrt.* Es wird angenommen, daß die äquatorialen Abszissen vom Meridian an gezählt, also Stundenwinkel seien; sollte es sich anders verhalten, so würde ja, wie wir wissen, eine ganz einfache Umrechnung die Rektaszensionen in Stundenwinkel überführen. Der Kreis $PZSN$ *(Fig. 35)* stelle den Meridian vor, P, Z, S, N sollen die uns schon bekannte Bedeutung beibehalten, und AA' sei der Aequator, der also bei unserer Auffassung in A seine obere, in A' seine

untere Kulmination hat. Von dem zu bestimmenden Punkte Σ aus sind wieder auf die Fundamentalkreise die sphärischen Lote $\Sigma U = \delta$ und $\Sigma V =$ der Höhe h gefällt, durch deren Rückwärtsverlängerung das Kugeldreieck $PZ\Sigma$, das in der mathematischen Geographie sehr häufig uns

Fig. 35.



begegnende Dreieck *Zenit-Pol-Stern* entsteht. Darin ist PZ das Komplement der Polhöhe φ, also selbst $= 90^0 - \varphi$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$, $Z\Sigma = 90^0 - h$. Da die Azimute w vom Süden gegen Westen gezählt werden, so ist arc $SV = w = \sphericalangle SZV$ das Azimut von Σ und folglich $\sphericalangle PZ\Sigma = 180^0 - w$. Der Stundenwinkel s aber ist unserer Erklärung gemäß kein anderer als $\sphericalangle ZP\Sigma$. Sonach stehen uns fünf Stücke des sphärischen Dreieckes wieder zur Verfügung [1]).

Wenn wir von der Menge der überhaupt möglichen Gleichungen [2]) wiederum nur die drei auslesen, welche

---

[1]) Der am Stern befindliche Winkel, diesmal *Variation* genannt, wird, ebenso wie vorhin, nur ausnahmsweise in Betracht gezogen. Wir nennen denselben (s. u.) v.

[2]) Vgl. wegen derselben Wolfs „Handbuch" (2. Band. S. 31 ff.).

für unseren Zweck unbedingt erforderlich sind, so erhalten wir das nachfolgende System[1]):

1. $\cos h \sin w = \cos \delta \sin s$,
2. $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$,
3. $\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos w$.

Auch die weitere Behandlung dieser Gleichungen gestaltet sich so durchaus konform der Auflösung des oben behandelten Systemes, daß wir weiter bei derselben zu verweilen nicht veranlaßt sind. —

Differentialausdrücke. Erwähnt sei noch, daß eben diese Gleichungen, sowohl von I wie von II, uns einen wertvollen Dienst leisten, wenn es darauf ankommt, zu erkennen, welchen Einfluß die Veränderung einer bestimmten Koordinate auf die übrigen ausübt. Natürlich kann es sich da nur um sehr kleine Größen handeln, und für diese setzt man Differentiale, die freilich in aller Strenge unendlich kleine Größen sein sollten. Man wird also die beiden dreigliedrigen Systeme in I und II in der Weise differentiieren, daß man sämtliche darin vorkommende Größen, auch ε und φ mit eingeschlossen, als Variable behandelt. Da es nicht angezeigt erscheint, für sämtliche Relationen diese Arbeit vorzunehmen[2]), so wollen wir uns auf die Gleichung 2. in System II beschränken. Indem wir differentiieren, erhalten wir fürs erste:

$$\cos h\, dh = d\varphi\,(\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos s)$$
$$+ d\delta\,(\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos s) - \cos \varphi \cos \delta \sin s\, ds.$$

[1]) Was früher über die Ableitung der einzelnen Gleichungen gesagt ward, bleibt auch hier noch gültig.

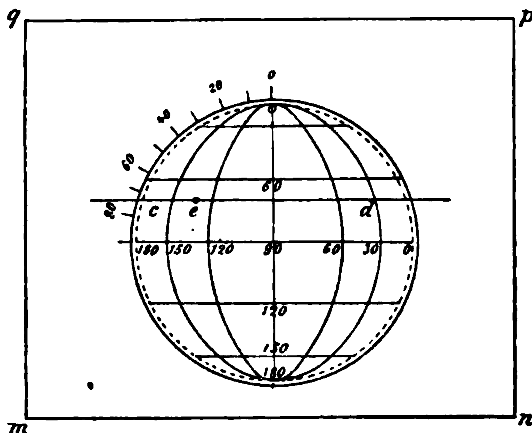
[2]) Wir verweisen auf die umfassende Entwicklung, welche Brünnow (a. a. O., S. 13 ff.) für die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie gegeben hat. In dem oben näher betrachteten Fall ist das, was Brünnow a, b, c, A nennt, resp. $90^0 - h$, $90^0 - \varphi$, $90^0 - \delta$ und s; man kann somit durch Substituierung dieser Werte aus seiner Formel ohne weiteres diejenige ableiten, um welche es uns zu thun ist.

Die beiden in Klammern stehenden Aggregate gestatten nun aber eine Vereinfachung; der Faktor von $d\varphi$ ist gleich $\cos h \cos (180^0 - w) = -\cos h \cos w$. Aehnliches gilt von der zweiten Klammer; statt $\cos \delta \sin s$ kann man laut Gleichung 1. vom System II auch $\cos h \sin w$ setzen, und wenn man dies durchführt, zugleich aber mit $\cos h$ auf beiden Seiten hebt, so bleibt folgendes übrig:

$$dh = -\cos w d\varphi + \cos v d\delta - \cos \delta \sin v ds.$$

Graphische Koordinatenverwandlung. Auch auf graphisch-mechanischem Wege kann man, wie wir

Fig. 36.



noch bemerken wollen, den Uebergang vom Systeme des Aequators zu dem des Horizontes bequem bewerkstelligen, sobald man von dem *Triedometer* [1]) Zescevichs Gebrauch macht. Auf der rechteckigen Platte *mnpq* (*Fig. 36*) sind zwei konzentrische Kreise beschrieben; der größere

[1]) Das Wort rührt her von τριέδρα (dreiseitige Ecke, sphärisches Dreieck). Vgl. darüber Wolfs „Handbuch" (2. Band. S. 33) und die von Moigno herausgegebene Zeitschrift „Cosmos" (1860, IX, 7).

hat in unserer Zeichnung eine ganz ausgezogene, der kleinere eine gestrichelte Peripherie; letzterer ist um den gemeinsamen Mittelpunkt in der Papierebene drehbar. Die zu *mn* parallele Leiste *cd* läßt sich hin und her schieben und trägt bei *e* einen Läufer. Der innere Kreis ist nach orthographischer Aequatorialprojektion [1]) mit einem Netze von Meridianen und Parallelen versehen, wie es unser Diagramm zur Anschauung bringt. Mittelst dieses Netzes stellt man, sobald Höhe und Azimut eines Sternes gegeben sind, den Läufer *e* ein, dreht dann, was durch die Teilung eines Quadranten des äußeren Kreises ermöglicht wird, den inneren Kreis um einen Winkel, der dem Komplemente der Polhöhe ($90^0 - \varphi$) gleich ist, und liest sodann abermals die Stellung von *e* ab; was vorhin *h* und *d* waren, das sind jetzt δ und *s*. — Es leuchtet ein, daß sich dieses Instrumentchen auch für jede beliebige Transformationsaufgabe aptieren ließe.

IX. Sphärisch-astronomische Einzelprobleme.

In diesem Abschnitte soll eine Reihe wichtiger Fragen, zu deren Behandlung uns jetzt die notwendigen Hilfsmittel vorliegen, der Lösung entgegengeführt werden. Die sphärische Trigonometrie wird naturgemäß für diese Lösung zumeist in Anspruch genommen werden, doch soll gelegentlich auch darauf hingewiesen werden, in welcher Weise sich räumliche Betrachtungen ersetzen lassen durch solche, welche sich ausschließlich in ein und derselben Ebene bewegen [2]).

---

[1]) Dieselbe bewirkt (s. o.), daß alle Parallelkreise, den Aequator mit einbegriffen, in parallele Grade, die Meridiane aber in konzentrische Ellipsen mit dem Nullmeridian als gemeinsamer, gradliniger Hauptachse verwandelt werden.

[2]) Daß man der Raumtrigonometrie, wenn man auf manchen Vorteil der Kürze verzichtet, gänzlich entraten könne, beweist eine wegen der konsequenten Durchführung ihres Grundgedankens beachtenswerte Programmabhandlung von Pein: Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hilfe der ebenen Trigonometrie, Bochum-Leipzig 1883.

Berechnung der Sichtbarkeits- und Unsichtbarkeitsbogen. I. Eine Aufgabe von sehr erheblicher Wichtigkeit ist die folgende: *Wie gross ist der Sichtbarkeitsbogen eines Gestirnes für eine gegebene Polhöhe* φ? Offenbar ist die Aufgabe, so wie sie hier ausgesprochen ist, noch keine bestimmte; es muß noch weiter gegeben sein entweder die Deklination δ oder die Morgenweite m.

Wenn ersteres der Fall ist, so haben wir ersichtlich von System II des vorigen Kapitels nur die Gleichung 2. anzuwenden und in ihr $h = 0^0$ zu setzen, dann bekommen wir jenen Stundenwinkel $- s_0$, welcher dem Aufgange des Gestirnes entspricht. So wird

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s_0, \quad \cos s_0 = - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$ [1]).

Das Minuszeichen ist dadurch bedingt, daß, solange δ positiv bleibt, s_0 größer als 90^0 sein muß; für $\delta = 0$ wird $s_0 = 90^0$, für ein negatives δ wird s_0 spitz, $\cos s_0$ positiv. Der Sichtbarkeitsbogen aber ist offenbar $= 2 s_0$, der Unsichtbarkeitsbogen $360^0 - 2 s_0$.

Gesetzt, es sei das fragliche Gestirn die Sonne, dann ist es leicht, die *Zeit des Auf- und Unterganges* derselben zu ermitteln. Wir wissen nämlich, daß für $s = 0$ Mittag eintritt; wir brauchen also nur s_0 in bekannter Weise in Zeit zu verwandeln (s. o. Abschnitt VII) und diese Zeit entweder von 12^h abzuziehen oder zu 12^h hinzuzuzählen, um einerseits den Termin des Aufganges, andererseits den des Unterganges zu erhalten; wäre z. B. $s_0 = 75^0$, so wäre diesem Bogenmaß ein Zeitmaß von $\frac{75^h}{15} = 5^h$ äquivalent und die Sonne geht um $(12 - 5 = 7)$ Uhr auf,

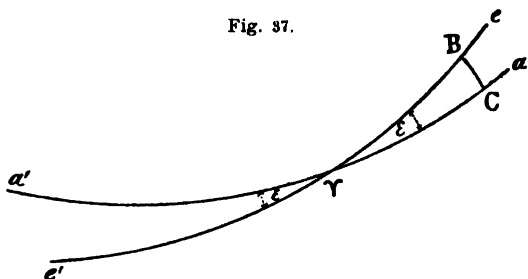
---

[1]) Die ältere Astronomie nannte, unter α die Rektaszension verstanden, den Bogen $(\alpha + 90^0 - s_0)$ die *schiefe Aufsteigung* des Gestirnes (Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 34) und den Bogen $\pm (90^0 - s_0)$ die *Aszensionaldifferenz.* Nennen wir letztere D, so ist in jedem Falle $\sin D = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$, und da die Kenntnis der Aszensionaldifferenz für die Astrologie sehr wichtig war, so begreifen wir wohl, daß gerade bei dieser Gelegenheit sich Regiomontan zur Konstruktion seiner ersten Tangententafel gedrängt sah. Vgl. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis 1525, Berlin 1887. S. 247.

um (12 + 5 = 5) Uhr unter, verweilt also 10 Stunden oberhalb des Horizontes.

Was die Deklination δ der Sonne anlangt, die freilich, wie wir wissen, selbst im Laufe eines einzigen Tages nicht völlig konstant bleibt, so kann man dieselbe entweder dem astronomischen Kalender entnehmen oder annähernd

Fig. 37.



selbst berechnen. In *Fig. 37* bedeutet aa' den Aequator, ee' die Ekliptik, $\sphericalangle\, a♈e = \varepsilon$ die Ekliptikschiefe. Die Ekliptik wird von der Sonne in $365\,^1/_4$ Tagen durchlaufen; sie hat 360 Grade, und es wird somit Tag für Tag ein Weg zurückgelegt $= \frac{360^0}{365\,^1/_4} = \frac{1440^0}{1461} = \frac{480^0}{487} = 0{,}986^0$; in n Tagen ist der Sonnenweg $= n\,.\,0{,}986^0$. Im Widderpunkte stehend, hat die Sonne die Deklination Null; seit dem Tage des Frühlingsäquinoktiums sollen n Tage verflossen sein, und so ist denn arc $♈B = n.0{,}986^0$. BC, senkrecht zu aa', ist die Deklination δ. Wenden wir auf das Dreieck $♈BC$ den Sinussatz an, so erhalten wir:

$$\sin\varepsilon : 1 = \sin\delta : \sin ♈B;\ \ \sin\delta = \sin\varepsilon\,.\,\sin(n\,.\,0{,}986^0).$$

Sobald also n bekannt ist, ist dies auch die dem treffenden Tage zukommende Deklination der Sonne.

Es übrigt uns jetzt noch, den zweiten oben angeregten Fall zu untersuchen, den nämlich, wenn statt der Deklination die Morgenweite m gegeben ist; man

bestimmt einen Punkt am östlichen Horizonte und fragt, an welchem Tage die Sonne gerade an diesem Punkte aufgehen wird. Diesmal wollen wir uns einer rein planimetrischen Betrachtungsweise bedienen [1]). In *Fig. 38* haben die Buchstaben C, Z, P, N, S, O, W, A die uns sattsam bekannte Bedeutung, OAW ist also der Aequator.

Fig. 38.

Die Sonne habe die Morgenweite $OR = m$, $RQU = 2RQ = 2QU$ sei ihr Sichtbarkeitsbogen, dann ist, wie wir aus Abschnitt III wissen, RU parallel zu CW. Der Mittelpunkt N' des von der Sonne beschriebenen Tageskreises liegt da, wo die Weltachse CP die Kreisebene schneidet; ziehen wir QN' und verlängern diese Linie, so muß sie

[1]) Der Verf. knüpft hier an eine seiner früheren Arbeiten an, welche unter der Aufschrift „Ueber die planimetrische Behandlung elementarer astronomischer Probleme" im 12. Jahrgang der „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht" (S. 99 ff.) erschienen ist. Es wurde daselbst gezeigt, daß der Lernende, wenn er die einzelnen vorkommenden Größen wirklich konstruiert, einen tieferen Einblick in den Kern der Sache erhält, als wenn er sich an ein bloß mechanisches Manipulieren mit gewissen Kugeldreiecken gewöhnt. Den kürzesten Weg jedoch vermittelt immer und allein die Raumtrigonometrie. Sehr hübsch behandelt solche Fragen die graphische Nautik; vgl. z. B. Jerrmann, Die Gunterskale, Hamburg 1888.

der Mittagslinie SN in jenem Punkte T begegnen, in welchem SN auch von der Spurlinie RU geschnitten wird. Es ist, wenn noch RN' und UN' gezogen werden, $\Delta RN'T \cong \Delta UN'T$, $RT = UT$, und der Winkel $RN'T$ ist, wenn s_0 seine Bedeutung von früher beibehält, gleich $180^0 - s_0$. Demnach haben wir mittelst ebener Trigonometrie die Relation

$$\operatorname{tang}(180^0 - s_0) = -\operatorname{tang} s_0 = \frac{RT}{N'T}.$$

Diese beiden Strecken sind aber leicht zu ermitteln. Wird nämlich CR gezogen und, wie üblich (s. o.), der Radius der Himmelskugel der Einheit gleichgesetzt, so hat man, da als Wechselwinkel $\sphericalangle CRT = \sphericalangle OCR = m$ ist, $RT = \cos m$, $CT = \sin m$; im Dreieck $CN'T$, welches bei N' rechtwinklig ist, hat man $N'T = CT \sin\varphi = \sin m \sin\varphi$, und setzt man diese beiden Werte oben ein, so wird

$$\operatorname{tang} s_0 = -\frac{\cos m}{\sin m \sin\varphi} = -\operatorname{cotg} m \operatorname{cosec}\varphi,$$

so daß also wiederum der Stundenwinkel des Aufgangspunktes und mit ihm die halbe Tagesdauer sowie der Termin des Aufganges durch bekannte Größen ausgedrückt erscheinen.

Der Dämmerungsbogen. II. Dieselbe Aufgabe muß nun freilich, wenn die Resultate der Natur entsprechend befunden werden sollen, noch unter einem allgemeineren Gesichtspunkte in Angriff genommen werden, nämlich unter Berücksichtigung der *Refraktion* und der *Dämmerung*. Der Umstand, daß der Körper der Erde von einer Kugelschale aus elastischflüssiger Materie, aus atmosphärischer Luft, umgeben ist, hat zur unmittelbaren Folge, daß auch dann, wenn ein Himmelskörper bereits thatsächlich unter den Gesichtskreis hinabgetreten ist, derselbe durch Brechung und Zurückwerfung des Lichtes an den unteren, dichteren Luftschichten noch einige Zeit sichtbar gemacht wird, und ebenso erscheint auf diese Weise jedes Gestirn dem Auge immer schon vor dem

Zeitpunkte, welcher auf Grund der vorhin entwickelten Formeln als der theoretische Aufgangstermin anzusehen wäre. Wir werden auf die Frage, inwieweit durch Refraktion das Aufgehen des Gestirnes selber verfrüht und dessen Untergehen verzögert wird, im zweiten Kapitel, bei der Lehre von der atmosphärischen Strahlenbrechung, wieder zurückkommen, vorläufig aber nur die Verlängerung der Tagesdauer durch die Dämmerung abhandeln. *Das Dämmerungsphänomen verlängert stets die Tageshelle sowohl nach dem Unter- wie vor dem Aufgang der Sonne; der Sichtbarkeitsbogen wird sozusagen durch das Hindurchpassieren der Lichtstrahlen durch die irdische Lufthülle vergrössert, der Unsichtbarkeitsbogen verkleinert.* Je nach der Lage des Punktes, an dem die Beobachtung angestellt wird, ist die *Dämmerungsdauer* eine verschiedene; wenn wir für einen Augenblick die dem strengen Grundplane unserer Darstellung zufolge erst im übernächsten Abschnitte an die Reihe kommende Kugelgestalt der Erde für den Augenblick als bekannt annehmen, so können wir den Erfahrungssatz aufstellen: *Die Dämmerung ist im allgemeinen unter den Tropen am kürzesten und nimmt zu, wenn man gegen höhere Breiten hin fortschreitet.* Ohne an dieser Stelle den theoretischen, in neuester Zeit sehr wichtig und erfolgreich gewordenen Studien über das Dämmerungsphänomen näher zu treten, als es eben mit unserer Aufgabe sich verträgt[1], konstatieren wir nur,

[1] Die von den Griechen und den mittelalterlichen Optikern Alhazen und Witelo gehegte, von Lambert (Photometria sive de mensura et gradibus lucis, colorum et umbrae, Augsburg 1760. S. 440 ff.) systematisch dargestellte Ansicht vom Wesen des Krepuskularphänomenes ging dahin, daß es eine erste, zweite, *n*te Dämmerung gäbe, je nachdem das Licht der unter dem Horizonte befindlichen Sonne durch einmalige, zweimalige, *n*malige Reflexion in unser Auge gelenkt wird. Ist dies auch an sich gewiß richtig, so sah man neuerdings doch mehr und mehr ein, daß eine Anzahl früher verkannter Umstände ebenfalls von Einfluß sei, und durch scharfe Beobachtung des Alpenglühens, des Gegenscheines, der beiden Purpurlichter u. s. w. kamen v. Bezold, Riggenbach, Riccò u. a. endlich dahin, eine befriedigende physikalische Analyse vom Verlaufe der normalen Dämmerung liefern zu können. Als eine bloße Steigerung letzterer hat man auch die in den Jahren

daß man eine *astronomische* und eine *bürgerliche* Dämmerung unterscheidet. Erstere soll abends so lange dauern, bis die letzte Beleuchtung am Westhorizonte geschwunden ist, letztere so lange, bis zur Verrichtung der gewöhnlichen Arbeiten künstliche Beleuchtung sich erforderlich zeigt, und am Morgen sollen dieselben Zeiten bis zum Aufgange der Sonne verstreichen. Gewöhnlich wird angenommen, daß die bürgerliche Dämmerung aufhört, wenn die Sonne $6^1/_2{}^0$ unter den Horizont hinabgesunken ist, während die für das Ende der astronomischen Dämmerung charakteristische Depression auf 18^0 angegeben wird [1]), indes ist nach neueren Untersuchungen von Hellmann es sicher, daß diese Zahlen einer Rektifikation bedürfen [2]). Wir gehen auf die Zahlwerte hier nicht näher ein, sondern stellen die Frage einfach so: *Wie lange dauert die Dämmerung, wenn deren Anfang resp. Ende in dem Augenblicke erreicht sein soll, in dem die negative Höhe der Sonne h'^0 beträgt?*

In unserer *Fig. 39* wird die Dauer der Morgendämmerung berechnet, doch gestaltet sich natürlich der Kalkul für die Abenddämmerung ganz analog. $h h'$ ist

---

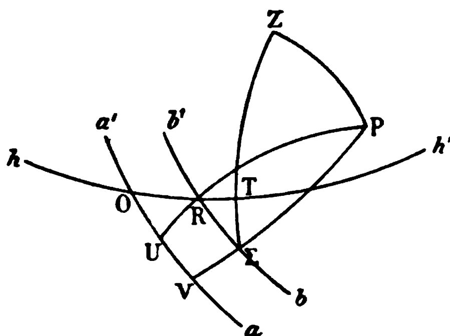
1883—1886 hervorgetretenen anscheinend anormalen Glüherscheinungen aufzufassen gelernt, welche aller Wahrscheinlichkeit nach Folgen des großen vulkanischen Ausbruches in der Sundastraße (August 1883) waren. Vgl. hierzu Kießling, Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen, Hamburg und Leipzig 1888; Symons, The Eruption of Krakatau and subsequent Phaenomena, London 1888.

[1]) Eine sehr gute Zusammenstellung der Lambertschen Resultate, untermischt mit manchen eigenen Bemerkungen findet man in Brandes' Artikel „Dämmerung" in der zweiten Auflage des physikalischen Lexikons von Gehler (2. Band, Leipzig 1826. S. 263 ff.).

[2]) Hellmann stellt (vgl. d. Verf. Meteorologie, München 1889. S. 280) folgende vier Thesen auf: Die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte beträgt am Ende der astronomischen Dämmerung 15,6°; der Depressionswinkel ist am kleinsten im Sommer, am größten im Winter; die Morgendämmerung währt etwas länger als die Abenddämmerung; die Dämmerungsdauer wächst mit der Zunahme der relativen Feuchtigkeit. Schon dieser letztere Satz beweist uns, daß eine bloß schematisch-geometrische Theorie das Dämmerungsproblem nicht endgültig erledigen kann.

der Horizont, aa' der Aequator, bb' der von der Sonne an dem Tage, an welchem ihr die Deklination δ zukommt, beschriebenen Parallelkreis; O, Z, P haben dieselbe Bedeutung, wie bisher. Σ sei der Sonnenort im Beginne der Dämmerung, R der Aufgangspunkt; schneidet der Bogen $Z\Sigma$ den Horizont in T, so ist $T\Sigma$ gleich obigem h'.

Fig. 39.



Die Bogen PR und $P\Sigma$ schneiden verlängert den Aequator in U und V; dann ist $RU = \Sigma V = \delta$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$. Man kennt somit im sphärischen Dreieck $ZP\Sigma$ die drei Seiten $\Sigma P = 90^0 - \varphi$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$, $Z\Sigma = 90^0 + h'$ und kann daraus $\sphericalangle ZP\Sigma = \sigma$ berechnen. Eine bekannte Relation der räumlichen Trigonometrie ergibt uns

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(45^0 + \frac{h' + \varphi - \delta}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{h' - \varphi + \delta}{2}\right)}{\sin\left(135^0 + \frac{h' - \varphi - \delta}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{h' + \varphi + \delta}{2}\right)}}.$$

Sowie σ hieraus gefunden ist, zieht man davon den uns schon bekannten Stundenwinkel s_0 des Aufgangspunktes ab, und diese Differenz $(\sigma - s_0)$ braucht man nur noch in Zeit umzusetzen, um die *Dämmerungsdauer* zu erhalten. Für Grade und Stunden ist dieselbe $= \frac{\sigma - s_0}{15}$.

Man kann auf diese Weise auch jene Polhöhe φ ermitteln, für welche Abend- und Morgendämmerung unmittelbar sich die Hand reichen. Für gewisse Serien der Werte von φ und δ ergeben sich so die bekannten *hellen Nächte* der polaren und subpolaren Zone, von welchen freilich im Systeme erst dann gehandelt werden könnte, wenn die Kugelgestalt der Erde zur Sprache gekommen ist. Ferner gehört hierher auch das in der Geschichte der Mathematik zu einer gewissen Berühmtheit gelangte *Problem der kürzesten Dämmerung*[1]).

Das Problem der kürzesten Dämmerung. Nach Stoll[2]) kann man demselben durch ganz elementare Betrachtungen beikommen, ja man kann ihm sogar eine bedeutend allgemeinere Fassung erteilen, indem man von der folgenden Fragestellung ausgeht: *Wie gross muss für die Polhöhe φ die Deklination δ_0 eines Sternes sein, damit derselbe in kürzester Zeit von dem der Höhe h_1 entsprechenden Almukantarat* — s. Abschnitt III — *zu dem der Höhe h_2 entsprechenden Almukantarat gelange?* Wir bezeichnen mit w_1 und w_2 die diesen Höhen zugehörigen Azimute, mit s_1 und s_2 die zugehörigen Stundenwinkel, schreiben für die beiden so entstehenden Dreiecke Zenit-

[1]) Dieses Problem wurde zum erstenmal gestellt, jedoch natürlich nicht gelöst in dem Werke „De crepusculis“ (Lissabon 1542) des Portugiesen Nunez; später wandten, wie Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 178) mitteilt, Jakob Bernoulli, D'Alembert und Fuß die Differentialrechnung darauf an, allein sie gerieten auf höchst verwickelte Formeln, und erst D'Arrest (Astr. Nachr., Nr. 1085) war so glücklich, eine einigermaßen einfachere Lösung aufzufinden. Indes bedarf es auch noch in letzterem Falle der Bildung von vier Differentialquotienten, und die Mitführung des Variationswinkels, welcher dann schließlich doch in Wegfall kommt, verleiht dem ganzen Kalkul etwas Schleppendes, wogegen bei dem Stollschen Verfahren nur diejenigen Größen auftreten, von welchen wirklich die Lösung abhängt. Sehr hübsch weiß Cranz (Zur geometrischen Theorie der Dämmerung, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 31. Band. S. 158 ff.) das, was Stoll rechnerisch deduziert hat, auf graphischem Wege zu ermitteln.

[2]) Stoll, Das Problem der kürzesten Dämmerung, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 28. Band. S. 150 ff.

Pol-Stern jeweils den Sinussatz und diejenigen beiden Modalitäten des Kosinussatzes an, in welchen der Variationswinkel nicht vorkommt und multiplizieren je zwei zusammengehörige Gleichungen miteinander. So erhalten wir drei neue Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \cos h_1 \cos h_2 \sin w_1 \sin w_2 = \cos^2 \delta_0 \sin s_1 \sin s_2,$$

$$\text{II.}\quad (\sin h_1 - \sin \varphi \sin \delta_0)(\sin h_2 - \sin \varphi \sin \delta_0) = \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_0 \cos s_1 \cos s_2,$$

$$\text{III.}\quad \cos h_1 \cos h_2 \cos^2 \varphi \cos w_1 \cos w_2 = (\sin h_2 \sin \varphi - \sin \delta_0)(\sin h_1 \sin \varphi - \sin \delta_0).$$

Wir addieren Gleichung II und III und verbinden mit dieser nenen Gleichung die Gleichung I, deren beide Seiten zuvor mit $\cos^2\varphi$ multipliziert wurden, durch Addition und Subtraktion; so entstehen zwei neue Gleichungen IV und V, welche man aber, unter Berücksichtigung der Zeichen, als eine einzige Gleichung anschreiben kann; es ist nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\text{IV.}\\ \\ \text{V.}\\ \\ \end{array}\right| \begin{array}{c}\cos^2\varphi \cos h_1 \cos h_2 \cos(w_1 \mp w_2) \\ + (\sin h_1 - \sin\varphi \sin\delta_0)(\sin h_2 - \sin\varphi \sin\delta_0) \\ = \cos^2\varphi \cos^2\delta_0 \cos(s_2 \mp s_1) \\ + (\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta_0)(\sin h_2 \sin\varphi - \sin\delta_0).\end{array}$$

Vereinfacht, geht diese Doppelgleichung in eine übersichtlichere Form über:

$$\text{V., VI.}\quad \cos^2\delta_0 \cos(s_2 \mp s_1) = \cos h_1 \cos h_2 \cos(w_1 \mp w_2) + \sin h_1 \sin h_2 - \sin^2\delta_0.$$

Für $(s_2 \mp s_1)$ und $(w_1 \mp w_2)$ führen wir jetzt die halben Winkel ein und finden

$$\cos^2\delta_0 - 2\cos^2\delta_0 \sin^2\frac{s_2 \mp s_1}{2} = \cos h_1 \cos h_2$$

$$- 2\cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{w_1 \mp w_2}{2} + \sin h_1 \sin h_2 - \sin^2\delta_0.$$

Es ist $\cos^2\delta_0 + \sin^2\delta_0 = 1$, $\cos h_1 \cos h_2 + \sin h_1 \sin h_2 = \cos(h_1 - h_2) = 1 - 2\sin^2\frac{h_1 - h_2}{2}$; beachten wir

dies und schreiben jede der Gleichungen einzeln, so bleibt uns

$$\text{VII.}\quad \cos^2\delta_0 \sin^2\frac{s_2 - s_1}{2} = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{w_1 - w_2}{2} + \sin^2\frac{h_1 - h_2}{2},$$

$$\text{VIII.}\quad \cos^2\delta_0 \sin^2\frac{s_2 + s_1}{2} = \cos h_1 \cos h_2 \sin^2\frac{w_1 + w_2}{2} + \sin^2\frac{h_1 - h_2}{2}.$$

Gleichung VII gewährt uns einen wichtigen Aufschluß; es ist darin δ_0, h_1, h_2 konstant, und damit also auf der linken Seite ein möglichst kleiner Wert stehe, muß die rechte Seite ein Minimum, $w_1 = w_2$ sein. Sonach ist

$$\text{IX.}\quad \sin\frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{\sin\frac{h_1 - h_2}{2}}{\cos\delta_0};$$

damit ist also die auf dem Wege des Sternes zwischen den beiden Almukantarats verstrichene Zeit gegeben. Weiter folgt dann durch relativ einfache Berechnungen

$$\text{X.}\quad \sin\varphi = \frac{\sin\frac{h_1 + h_2}{2}}{\cos\frac{h_1 - h_2}{2}} \sin\delta_0,$$

und dies ist die Relation, welche auf unsere eingangs gestellte Frage die Antwort erteilt.

Wollen wir speziell zur kürzesten Dämmerung übergehen, so brauchen wir nur $h_1 = 0$, $h_2 = -h'$ zu setzen, wo h' die uns bereits von vorhin geläufige Bedeutung besitzt. So wird denn aus IX und X beziehungsweise:

$$\sin\frac{s_2 - s_1}{2}\cos\delta_0 = \sin\frac{h'}{2}; \quad -\sin\varphi = \sin\delta_0 \operatorname{tang}\frac{h'}{2}.$$

Damit ist die Aufgabe in allen ihren Teilen, ohne

höhere Analysis und ohne die auch von Kästner[1]) für notwendig erachtete Auflösung einer biquadratischen Gleichung erledigt.

Berechnung der Azimute und Höhen, welche nach einer gewissen Zeit erreicht werden. III. In das Gebiet der Koordinatentransformation gehört die folgende Aufgabe:

Welche Höhe und welches Azimut hat ein Stern erlangt t Stunden nach seinem Aufgange? Bekannt ist die Deklination δ; der Stundenwinkel s ist, unter s_0 den Stundenwinkel des Aufgangspunktes verstanden, gleich $(s_0 - 15\,t)$; gesucht sind h und w. Da jedoch die Morgenseite der Himmelskugel in betracht gezogen wird, so handelt es sich um $(360^0 - w)$; unsere beiden Transformationsgleichungen sind also diese:

$$-\sin w \cos h = \cos\delta \sin(s_0 - 15\,t),$$
$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos(s_0 - 15\,t).$$

Da h ohne weiteres gegeben ist, so kann auch w leicht gefunden werden, und zwar wird

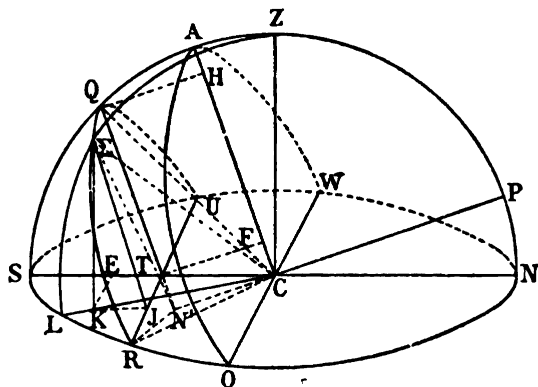
$$-\operatorname{tang} w = \frac{\cos\delta \sin(s_0 - 15\,t)}{-\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos(s_0 - 15\,t)}.$$

Wir wollen nun zusehen, ob es uns möglich sein wird, auch durch bloße Betrachtung der Figur in den Besitz dieser Werte von h und w zu gelangen. Die in *Fig. 40* gegebene perspektivische Abbildung der sichtbaren Himmelshalbkugel macht nur von den uns bereits geläufigen Bezeichnungen Gebrauch; RQU ist der Sichtbarkeitsbogen des Sternes, der gerade den Bogen $R\Sigma = 15\,t$ zurückgelegt haben und sich in Σ befinden möge. Wir fällen aus Σ auf die Ebene des Horizontes das Lot ΣK; ziehen wir dann noch den Bogen $Z\Sigma$, welcher verlängert den Gesichtskreis in L schneidet, und verbinden wir letzteren Punkt mit dem Zentrum C, so muß auf

[1]) Kästner, Astronomische Abhandlungen, 2. Band, Göttingen-Leipzig 1774.

dieser Linie auch der Fußpunkt K gelegen sein, und es ist $\sphericalangle\, \Sigma CK = h$, $\Sigma K = \sin h$, $\sphericalangle\, LCS = 360^0 - w$. $RU = 2\,RT = 2\,TU$ ist parallel zur Ostwestrichtung, QT parallel zu AC. Der Radius ρ des Kreises RQU, dessen Mittelpunkt wieder N' heissen soll, ist leicht zu finden, denn man hat $N'R = N'Q = CH$, wo $QH \# N'C$ voraus-

Fig. 40.



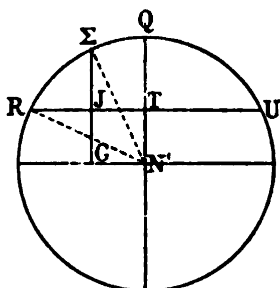
gesetzt wird. Zieht man QC, so sieht man sofort, daß $\sphericalangle\, QCA$ der — in unserem Falle negativ zu nehmenden — Deklination δ gleich ist; man hat also $QH = -\sin\delta$, $\rho = CH = \cos\delta$. Macht man $TF \# QH$, so ist, da $\sphericalangle\, TCF = 90^0 - \varphi$, $TC = \frac{TF}{\cos\varphi} = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$, und der pythagoreische Lehrsatz liefert vermittelst des Dreiecks TRC

$$RT = \sqrt{\overline{RC}^2 - \overline{TC}^2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\delta}.$$

Nachdem wir soweit sind, fällen wir aus Σ in der Parallelkreisebene auf RU die senkrechte ΣJ und bestimmen deren Länge, indem wir uns nur, grösserer Bequemlichkeit halber, auf die Hilfsfigur *(Fig. 41)* beziehen, deren

Bezeichnungen selbstverständlich dieselben geblieben sind. Wir ziehen darin einen zur Sehne $R\,U$ parallelen Durchmesser und fällen auf diesen von Σ das Loth $\Sigma\,G$, welches

Fig. 41.



also $R\,U$ in dem uns schon bekannten Punkte J durchschneidet. Dann zeigt die Figur, daß

$$\Sigma J = \Sigma G - JG = \Sigma G - TN' = [\sin(\sphericalangle\, GN'\Sigma) - \cos(\sphericalangle\, RN'Q)]\,\rho = [\cos(s_0 - 15\,t) - \cos s_0]\cos\delta$$

ist. Wird nun noch berücksichtigt, daß $\Sigma\,K = \Sigma\,J \sin(\sphericalangle\,\Sigma JK) = \Sigma\,J \cos\varphi$ ist, so ist auch

$$\sin h = -\cos s_0 \cos\delta \cos\varphi + \cos\delta \cos\varphi_0 \cos(s_0 - 15\,t).$$

Wir wissen jedoch, daß

$$\cos s_0 = -\frac{\sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi}$$

ist; führen wir diesen Wert ein, so erscheint, wie zu erwarten stand,

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos(s_0 - 15\,t).$$

Aus dem in K rechtwinkligen Dreiecke $CK\Sigma$ fließt ferner sofort $KC = \cos h$, und aus dem in E rechtwinkligen Dreiecke CKE, worin $\sphericalangle\,ECK = 360^\circ - w$ ist (s. o.),

$$\sin(360^\circ - w) = -\sin w = \frac{KE}{KC} = \frac{JT}{KC}.$$

Den Wert von JT entnehmen wir wiederum *Fig. 41*;

es ist $JT = GN' = \rho \sin (\sphericalangle G \Sigma N') = \rho \sin (\sphericalangle \Sigma N' Q)$ $= \cos \delta \sin (s_0 - 15\,t)$. Demnach wird

$$-\sin w = \frac{\cos \delta \sin (s_0 - 15\,t)}{\cos h},$$

ganz so, wie es sich aus der ersten der oben aufgestellten beiden Gleichungen ergibt. Uebrigens ließe sich auch der obige Wert für $\operatorname{tang} \varphi$ geometrisch ableiten. Es ist nämlich

$$\operatorname{tang}(360^0 - w) = -\operatorname{tang} w = \frac{KE}{CE} = \frac{KE}{ET + TC} = \frac{JT}{ET + TC}.$$

Die Werte von JT und TC sind bereits berechnet; was $ET = KJ$ anlangt, so ist dies der Figur zufolge $= \Sigma J \sin \varphi$, und es ist mithin auch

$$ET + TC = \sin \varphi \cos \delta \left[\cos (s_0 - 15\,t) - \cos s_0\right] - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Wir substituieren abermals für $\cos s_0$ den uns bekannten Wert und finden so

$$ET + TC = \sin \varphi \cos \delta \,.\, \frac{\sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi} - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

$$+ \sin \varphi \cos \delta \cos (s_0 - 15\,t) = -\frac{\sin \delta\,(1 - \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$+ \sin \varphi \cos \delta \cos (s_0 - 15\,t).$$

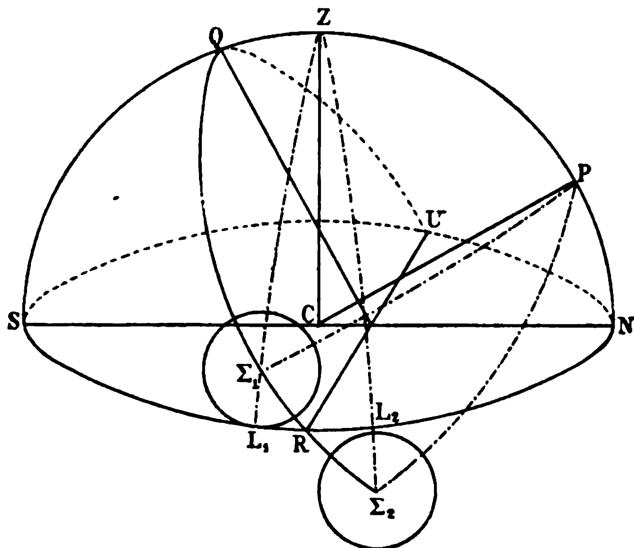
Nach unerheblicher Vereinfachung und nach Einsetzung des schon bekannten Wertes von JT stellt sich heraus:

$$-\operatorname{tang} w = \frac{\cos \delta \sin (s_0 - 15\,t)}{-\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos (s_0 - 15\,t)}.$$

Dauer des Auf- und Unterganges von Sonne und Mond. IV. Diejenigen Himmelskörper, welche eine deutliche Scheibengestalt besitzen, haben aus diesem Punkte keinen momentanen Auf- und Untergang, sondern es dauert eine gewisse Zeit, bis ihre Scheibe vollständig über den Horizont heraufgekommen resp. unter denselben hinabgesunken ist. *Die Zeitdauer des Auf- oder Unterganges soll ermittelt werden.*

Der *Fig. 42* liegt die Annahme zu Grunde, daß der Himmelskörper im Aufgehen begriffen sei. Die Bezeichnungen sind die üblichen, Σ_2 und Σ_1 sind die Positionen des Scheibenmittelpunktes in den beiden Momenten, in

Fig. 42.



welchen der Aufgang gerade beginnt und vollständig beendigt ist; dann berühren also die um Σ_2 und Σ_1 als Mittelpunkte mit dem sphärischen Scheibenradius ρ geschlagenen beiden Kreise den Horizont bezüglich in L_2 und L_1. Man ziehe die Bögen $L_2\Sigma_2$ und $L_1\Sigma_1$; beide werden verlängert durch das Zenit Z hindurchgehen. Der (negative) Stundenwinkel von Σ_2 sei s_2, derjenige von Σ_1 sei s_1, dann wird die gesuchte Zeitdauer t der Winkeldifferenz $(s_2 - s_1)$, d. h. dem Winkel $\Sigma_2 P \Sigma_1$ proportional sein. Zieht man PR, so zerfällt letzterer Winkel in die (ungleichen) Winkel $\Sigma_2 PR$ und $RP\Sigma_1$. In den beiden sphärischen Dreiecken $PZ\Sigma_2$ und $PZ\Sigma_1$ kennt man jetzt die

drei Seiten; es ist nämlich $PZ = 90^0 - \varphi$, $P\Sigma_2 = 90^0 - \delta = P\Sigma_1$, $Z\Sigma_2 \doteq 90^0 + \rho$, $Z\Sigma_1 = 90^0 - \rho$. Der Kosinussatz, auf beide Dreiecke angewendet, führt uns zu nachstehenden Gleichungen:

$$-\sin\rho = \sin\delta\,\sin\varphi + \cos\delta\,\cos\varphi\,\cos s_2;$$

$$\cos s_2 = -\frac{\sin\rho + \sin\delta\,\sin\varphi}{\cos\delta\,\cos\varphi},$$

$$\sin\rho = \sin\delta\,\sin\varphi + \cos\delta\,\cos\varphi\,\cos s_1;$$

$$\cos s_1 = \frac{\sin\rho - \sin\delta\,\sin\varphi}{\cos\delta\,\cos\varphi}.$$

Handelt es sich bloß um numerische Auswertung, so wird es wohl das zweckmäßigste sein, s_2 und s_1, jedes für sich, zu berechnen und die Differenz $(s_2 - s_1)$ zu bilden. Will man dagegen eine independente Formel haben, so addiert und subtrahiert man die beiden Fundamentalgleichungen und erhält

$$(\cos s_2 + \cos s_1)\,\cos\delta\,\cos\varphi = -\,2\sin\delta\,\sin\varphi;$$

$$(\cos s_2 - \cos s_1)\,\cos\delta\,\cos\varphi = -\,2\sin\rho.$$

Nun geht man zu den halben Winkeln über, so daß die Gleichungen

$$\cos\frac{s_2 + s_1}{2}\cos\frac{s_2 - s_1}{2} = -\frac{\sin\delta\,\sin\varphi}{\cos\delta\,\cos\varphi},$$

$$\sin\frac{s_2 + s_1}{2}\sin\frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{\sin\rho}{\cos\delta\,\cos\varphi}$$

entstehen. Man kann hier $\cos\frac{s_2 + s_1}{2}$ und $\sin\frac{s_2 + s_1}{2}$ isolieren; quadriert man dann beide Gleichungen und addiert sie, so bleibt nur $(s_2 - s_1)$ als unbekannte Größe übrig. Diese Gleichung ist biquadratisch, nämlich

$$\frac{\sin^2\delta\,\sin^2\varphi}{\cos^2\delta\,\cos^2\varphi\,\cos^2\frac{s_2 - s_1}{2}} + \frac{\sin^2\rho}{\cos^2\delta\,\cos^2\varphi\,\sin^2\frac{s_2 - s_1}{2}} = 1,$$

doch läßt sich dieselbe, wie man sieht, leicht auf den zweiten Grad zurückbringen. Für $\rho = 0$ ist $\sin\rho$ eben-

falls $=0$; beide Dreiecke sind kongruent, und an die Stelle von s_2 oder s_1 tritt das uns bekannte s_0. Mit Ausscheidung der in unserer Gleichung eingegangenen Wurzel $\sin^2 \frac{s_2+s_1}{2}$ findet man dann:

$$\frac{\sin^2\delta \sin^2\varphi}{\cos^2\delta \cos^2\varphi \cos^2 s_0} = 1, \quad \cos s_0 = \pm \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\varphi;$$

und dies ist die Formel für den dem Aufgangs- oder Untergangspunkte eines punktförmigen Himmelskörpers entsprechenden Stundenwinkel [1]).

---

[1]) Es mag sich empfehlen, bei dieser Stelle auch ein Zahlenbeispiel einzuschalten. Die Sonne hat einen scheinbaren Durchmesser, der, in den einzelnen Jahreszeiten nicht genau gleich groß, doch im Mittel von einem halben Grade nur ganz unwesentlich abweicht. Am Aequator ist, wie wir vorauseilend hier bemerken, der von jedem Tageskreise und insbesondere vom Himmelsäquator selbst mit dem Horizonte gebildete Winkel ein rechter; wenn also die Sonne dort auf- oder untergeht, vergehen $\left(\frac{24.60.30}{360.60} = 2\right)$ Minuten, bis der Auf- oder Untergang beendet ist. Wie aber verhält es sich damit an einem Orte, welcher unter der Polhöhe $\varphi = 40^0$ gelegen ist? Wir rechnen s_2 und s_1, für $2\rho = \frac{1}{2}{}^0$, nach unseren obigen Formeln aus und erhalten für die Zeit eines Solstitialtages, wenn also etwa $\delta = +23\frac{1}{2}{}^0$ ist, einen erheblich größeren Wert. Wir schreiben nämlich, um die negativen Zeichen zu vermeiden, unsere Gleichungen an, wie folgt:

$$\cos(180^0 - s_2) = \frac{\sin\frac{1}{4}{}^0 + \sin 23\frac{1}{2}{}^0 \sin 40^0}{\cos 23\frac{1}{2}{}^0 \cos 40^0},$$

$$\cos(180^0 - s_1) = \frac{-\sin\frac{1}{4}{}^0 + \sin 23\frac{1}{2}{}^0 \sin 40^0}{\cos 23\frac{1}{2}{}^0 \cos 40^0}.$$

Das Resultat ist dieses:

$$s_2 - s_1 = 180^0 - 64^0\,50'\,29'' - 180^0 + 65^0\,37'\,32'' = 0^0\,47'\,3''.$$

Dies ist dann noch in Zeit zu verwandeln; auf 360.60^2 Bogensekunden kommen 24.60^2 Zeitsekunden; $0^0\,47'\,3''$ sind $= 2823''$, und in diese ist noch mit 15 zu dividieren. Dies ergibt 188^s (von einem Bruchteile abgesehen), und es ist sonach die gesuchte Zeitdauer $= 3^m\,8^s$. Ein Aequinoktialtag ($\delta = 0^0$) ergibt unter der gleichen Polhöhe ungefähr 3^m. In letzterem Falle ist die Zeit proportional $2 \operatorname{arc}\cos \frac{\sin\frac{1}{4}{}^0}{\cos 40^0}$.

Berechnung sphaerischer Entfernungen. V. Die letzte der in diesem Abschnitte diskutierten Aufgaben soll die *sphärische Distanzbestimmung* sein. Zwei Punkte auf der Himmelskugel sind durch ihre Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben, wobei also die x beliebig Längen, Rektaszensionen, Stundenwinkel und Azimute, die y entsprechend Breiten, Deklinationen und Höhen sein können. Man verbindet beide Punkte mit dem positiven Pole des Abszissenkreises und erhält auf diese Weise ein sphärisches Dreieck, dessen eine Seite eben die gesuchte sphärische Distanz D, dessen beide anderen Seiten aber resp. $(90^0 - y_1)$ und $(90^0 - y_2)$ sind, während der Seite D der Winkel $\pm(x_1 - x_2)$ gegenüberliegt. Der Kosinussatz führt, da bekanntlich $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ ist, zu der Bestimmungsgleichung

$$\cos D = \sin y_1 \sin y_2 + \cos y_1 \cos y_2 \cos(x_1 - x_2).$$

Wie diese Formel logarithmisch umzugestalten ist, haben wir bereits oben anläßlich der Koordinatentransformation gesehen; der Aufgabe selbst, welche sich hier ausschließlich auf die Himmelskugel bezog [1]), werden wir später, bei der Erde, in erweiterter Form wiederum begegnen.

---

[1]) Diese Aufgabe hat ein gewisses Interesse bei der Bestimmung der scheinbaren ***Meteorbahn***, aus welcher sich dann wieder die wirkliche herleiten läßt. Man sieht das Meteor an einem Punkte der Himmelskugel aufleuchten, eine glänzende Linie an der Himmelskugel beschreiben und wieder erlöschen; um die Koordinaten dieser beiden Grenzpunkte mit größtmöglicher Sicherheit festzustellen, bedient man sich in der Astronomie gewisser theodolitenartiger Vorrichtungen, wie solche von C. v. Littrow (bereits 1837), Heis, Neumayer u. a. angegeben sind. Das *Meteoroskop* (vgl. Lehmann-Filhès, Ueber die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarmes, Astr. Nachr., Nr. 2296) gestattet sogar für einen beliebigen Punkt der scheinbaren Bahnlinie die approximative Ermittlung von Rektaszension, Deklination und Positionswinkel. Man kann auf diese Weise nicht bloß, im Sinne unserer obigen Formel, die Bahnlänge berechnen, sondern auch Zwischenpunkte in dieselbe einschalten, die zur Ausgleichung der bei der Fixierung des Anfangs- und Endpunktes begangenen Fehler dienen können. Weitere Erörterungen über die Meteoritenbahnen gehören nicht mehr in die mathematische Geographie; Näheres darüber enthält Schiaparellis berühmt gewordene Schrift „Note

X. Grundlagen der Zeiteinteilung und Zeitmessung.

Es ließ sich schon bisher bei den verschiedensten Gelegenheiten nicht vermeiden, von der Zeit zu sprechen, Zeitmaß in Gradmaß und umgekehrt zu verwandeln, und es ist dies auch nur natürlich, da ja unser ganzes bürgerliches Leben darauf eingerichtet ist, in den sich bewegenden Gestirnen die Regulatoren dessen, was man Zeit nennt, anzuerkennen. Jetzt dagegen handelt es sich darum, diesem Begriffe eine wissenschaftliche Formulierung zu erteilen.

Sternzeit, wahre und mittlere Sonnenzeit. Wenn wir uns unter den Gestirnen nach solchen umsehen, denen eine *absolut gleichmässige Bewegung* zukommt, so müssen wir Sonne, Mond und die als Planeten bezeichneten Sterne ausschließen und uns einzig an die Fixsterne halten. Nur sie beschreiben mit gleichförmiger Geschwindigkeit stets denselben Parallelkreis der Himmelskugel, sie eignen sich also, zunächst wenigstens, am besten dazu, aus ihrer Bewegung die *Zeiteinheit* abstrahieren zu lassen, denn bei den anderen erwähnten Himmelskörpern ändert sich die Poldistanz selbst in dem Zeitraume zwischen Aufgang und Untergang. Unter *Sternzeit* versteht man deshalb sowohl allgemein die auf die (scheinbare) Bewegung der Fixsterne, d. h. auf die Achsendrehung der Himmelskugel begründete Zeitbestimmung, als auch konkret den *Stundenwinkel des Kolurs der Aequinoktien*. Sowie wir dies festgestellt haben, können wir auch der in Abschnitt VII nur angedeuteten Relation zwischen Stundenwinkel und Rektaszension eine präzise Gestalt geben; es gilt nämlich der Satz:

Stundenwinkel + *Rektaszension* = *Sternzeit*[1]).

---

e riflessioni intorno alla teoria astronomica delle stelle cadente" (Florenz 1867; ins Deutsche übertragen durch G. v. Boguslawski. Stettin 1871).

[1]) Wolf, Handbuch etc., S. 31.

Allerdings hat das Rechnen nach Sternzeit praktisch einen großen Nachteil, den nämlich, daß jener Zeitraum, während dessen die menschlichen Geschäfte ihrer ungeheuren Mehrzahl nach abgewickelt werden müssen, nicht derjenige ist, während dessen die Sterne am Himmel sichtbar sind. Aus diesem Grunde wäre es wünschenswert, sich nach dem Gestirne des Tages, nach der *Sonne*, richten zu können, und so können wir denn auch der *Sonnenzeit* nicht entraten. Doch haben wir dabei zweierlei Dinge auseinanderzuhalten. *Wahre Sonnenzeit* nennen wir den *Stundenwinkel des wirklichen Sonnenmittelpunktes* [1]), und es wäre mit dieser eine erwünschte Formulierung des Zeitbegriffes gegeben, wenn eben diese Zeit, gemessen an einer künstlichen *Uhr* [2]), eine wirklich konstante wäre.

[1]) Der beobachtete Sonnenmittelpunkt müßte erst von dem Fehler der Refraktion u. s. w. befreit werden.

[2]) Es liegt, aprioristisch betrachtet, ein logischer Zirkel vor, wenn man auf der einen Seite die Zeitbestimmung auf die Bewegungen der Himmelskörper begründen und andererseits diese letzteren mittels eines mechanischen Zeitmessers kontrollieren will. doch ist diese Inkonsequenz eine der vielen in der Wissenschaft durch die Natur der Sache selbst gebotenen. Aehnlich werden wir später das Höhenmessen mit dem Barometer als unmittelbaren Ausfluß gewisser Sätze über das Wesen der atmosphärischen Luft kennen lernen, und eben diese Sätze hoffen wir durch fortgesetzte Verbesserung der erwähnten Messungsmethode schärfer präzisieren zu können. — Die geschichtliche Entwicklung der Zeitmeßkunst finden wir eingehend geschildert bei Wolf (Gesch. d. Astr., S. 134 ff.) und in Bilfingers reichhältiger Monographie „Die Zeitmesser der antiken Völker“ (Stuttgart 1886). Schon der alte Orient kannte die *Wasseruhren*; ein Gefäß von einfacher geometrischer Gestalt wurde mit Wasser gefüllt, und dieses lief durch eine sehr kleine Oeffnung ab; freilich trifft die Annahme, daß in gleichen Zeiten auch gleiche Wassermengen austreten, nicht in aller Strenge zu. Die Inder gingen, wie ein von H. v. Schlagintweit aus Benares mitgebrachtes und (Sitzungsber. d. bayer. Akademie, math.-phys. Kl., 1871. S. 128 ff.) einläßlich beschriebenes Instrument ausweist, von einem entgegengesetzten Prinzipe aus; sie setzten nämlich eine Hohlhalbkugel aus Metall so auf eine Wasserfläche, daß die Flüssigkeit durch eine feine Oeffnung eindringen konnte, und rechneten die Zeit von dem Momente des Aufsetzens bis zu dem des Untersinkens als eine konstante Einheit. Ueber die Einrichtung der athenischen κλεψύδρα, welche auf der Agora den Sachwaltern zur Bemessung ihrer Redezeit diente, geben die Werke der attischen

Dies trifft jedoch nicht zu, je nach der Stellung, welche die Sonne auf ihrer Wanderung zwischen den beiden Wendekreisen gerade einnimmt, sind die Zeiten ungleich,

---

Rhetoren mannigfachen Aufschluss. Eine Weckvorrichtung scheint Platon mit der Wasseruhr verbunden zu haben, ähnlich wie dies in den Klöstern des Mittelalters üblich war (Bilfinger, S. 10). Später wurden die Wasseruhren durch Ctesibius in der Weise verbessert, daß man dem schon im Gefässe befindlichen Wasser unausgesetzt neues zuströmen ließ, sowie dadurch, daß man verschiedene Skalen anbrachte. Den höchsten Triumph der antiken Uhrmacherkunst bezeichnet die von Vitruvius ausgeführte *Aufzugsuhr*, deren Zifferblatt mit einem stereographischen Abbilde der scheinbaren Himmelskugel versehen war (Bilfinger, S. 43 ff.; Terquem, La science romaine dans l'âge d'Auguste, Paris 1886), und äußerst kunstfertig muß auch jene Wasseruhr gewesen sein, mit welcher nach dem bekannten Berichte des fränkischen Historiographen Einhard dessen Kaiser Karl von Harûn al Raschid beschenkt ward. Späterhin konkurrierten mit den Wasseruhren stark die *Sanduhren*, welche im 8. Jahrhundert unserer Zeitrechnung ein Mönch Liutprand erfunden haben soll (Wolf, S. 136); sie sind durchaus nicht so schlecht, als man gewöhnlich annimmt, und wenn nicht hie und da rhapsodische Stauungen darin vorkämen, auf welche R. Wolf (Astron. Mitteilungen, XXXVI) aufmerksam gemacht hat, käme ihnen sogar ein gewisser Vorzug vor den Wasseruhren zu, indem nach Hubert Burnand die durch kleine Oeffnungen ausfließende Sandmasse von der Höhe der Füllung im Gefässe unabhängig ist (G. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1867. S. 88). Wer die ersten Gewichtsuhren konstruiert habe, ist nicht ausgemacht; abwechselnd schrieb man ihre Erfindung dem Pacificus aus Verona (gest. 846), dem Mathematiker Gerbert (Papst Sylvester II.) und dem mit diesem gleichzeitig lebenden Abte Wilhelm von Hirsau zu. Uhren mit Schlagwerken (und Gewichten) werden nicht erst bei Dante (Gehlers Phys. Wörterbuch, 2. Auflage, 9. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1839. S. 1110), sondern schon bald nach 1100 in Klosterannalen erwähnt, doch kennt man die Einrichtung erst von jener Schlaguhr, die um 1370 Heinrich von Wyck für Karl V. von Frankreich anfertigte (Wolf, S. 137). Daß Walther die erste Räderuhr in den Dienst der Beobachtungspraxis stellte, haben wir oben schon gesehen; bald nachher erfand Peter Henlein in Nürnberg die Taschenuhren. Die Pendeluhr ist wahrscheinlich gleichzeitig von Galilei und J. Bürgi, dem Hofuhrmacher Rudolfs II., erfunden worden (E. Gerland, Zur Geschichte der Erfindung der Pendeluhr, Ann. d. Phys. u. Chem., [2] 4. Band. S. 585 ff.; Wolf, Gesch. d. Astr., S. 369 ff.). Ohne von diesen Vorarbeiten zu wissen, verfiel Huygens ganz von selbst darauf, die Unruhe

welche jene zur Zurücklegung gleicher Bogen benötigt. Würde die Sonne, statt in der Ekliptik, im Aequator umlaufen, von dem nach seiner Definition (Abschnitt III) stets gleiche Bogen in gleichen Zeiten durch den Meridian sich hindurchschieben müssen, so wäre der beregte Uebelstand nicht vorhanden, und aus diesem Grunde ergreift man folgenden Ausweg. Man denkt sich eine fingierte Sonne mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Aequator umlaufend, und den *Stundenwinkel des fingierten Sonnenmittelpunktes* nennt man *mittlere Sonnenzeit.* Im allgemeinen werden wahre und mittlere Sonnenzeit voneinander verschieden sein; die momentane Differenz zwischen beiden, welche positiv, negativ und auch Null sein kann, belegt man mit dem Namen *Zeitgleichung.* Das Vorhandensein einer solchen mußte den Astronomen von dem Augenblicke an klar sein, da Kepler die nach ihm benannten Gesetze — s. u. im dritten Kapitel — aufgestellt hatte, doch findet sich schon bei Ptolemäus, der von den näheren Verhältnissen noch keine Ahnung haben konnte, eine richtige Andeutung des Sachverhaltes [1]). Genauer erörterte sodann diesen der als Beobachter hochgeschätzte erste *„Astronomer Royal"* Flamsteed [2]), und mit den Fortschritten der theoretischen Astronomie fand man auch die Möglichkeit, den Wert der Zeitgleichung für einen gegebenen Zeitpunkt mit immer größerer Schärfe auszudrücken [3]). Dieselbe wird viermal im Jahre zu Null,

in der Uhr durch ein Pendel mit Sperrhaken zu ersetzen, und ihm fiel denn auch darum die Ehre der Entdeckung ungeteilt zu — um so mehr freilich, da sein dieselbe beschreibendes Werk (Horologium oscillatorium, Haag 1658) sich durch die Fülle von neuen Perspektiven auszeichnet, welche es der Mechanik und nicht minder der reinen Mathematik eröffnet. Auf die Verfeinerung der astronomischen Uhrmacherkunst wird uns später das berühmte Problem der Meereslänge wieder zurückführen.

[1]) Almagest, lib. III, cap. 8; Wolf, Handbuch etc., 2. Band, S. 261.

[2]) Flamsteed, De inaequilitate dierum solarium dissertatio astronomica, London 1672.

[3]) Die Rektaszension α der Sonne wird aus deren Länge l, wie wir schon wissen, durch die Formel $\tang \alpha = \tang l \cos \epsilon$ her-

zweimal erreicht sie ein positives, zweimal ein negatives Maximum, so daß, wenn wir die einzelnen Monate des Jahres nach ihrer Reihenfolge mit römischen, die Monatstage mit arabischen Ziffern bezeichnen, das folgende Schema resultiert:

II,12.	IV,15.	V,14.	VI,14.	VII,26.	31,VIII.	18,XI.	24,XII.
$+14^m 31^s$	0	$-3^m 53^s$	0	$+6^m 2^s$	0	$-16^m 18^s$	0

Will man auch für die zwischenliegenden Tage die Zeitgleichung finden, ohne die in der Randnote signa-

---

geleitet, unter ε die Ekliptikschiefe verstanden. Da nun die Methode der unbestimmten Koeffizienten zufolge (Brünnow, a. a. O., S. 17) aus $\operatorname{tang} y = n \operatorname{tang} x$ die Reihenentwicklung

$$y = x + \frac{n-1}{n+1}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6x + \ldots$$

sich ergibt, so ist in unserem obigen Falle auch

$$\alpha = l - \operatorname{tang}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2l + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4l - \ldots$$

Hier ist l die Länge der wahren Sonne, die Länge der imaginären oder mittleren Sonne, welche L heißen möge, ist (Brünnow, a. a. O., S. 102) mit l durch folgende Relation verknüpft:

$$l = L + 1244'',31 \sin L + 6805'',56 \cos L - 67'',82 \sin 2L + 25'',66 \cos 2L;$$

eigentlich würde die Reihe rechts eine unendlich fortlaufende sein, doch gewähren die hier allein berücksichtigten Glieder jede wünschbare Genauigkeit. Setzt man den für l erhaltenen Wert in der α und l verbindenden Gleichung ein, so ergibt sich uns für die Zeitgleichung, die ja aus der Differenz $(\alpha - l)$ sofort erhältlich ist, eine neue Beziehung in Zeit:

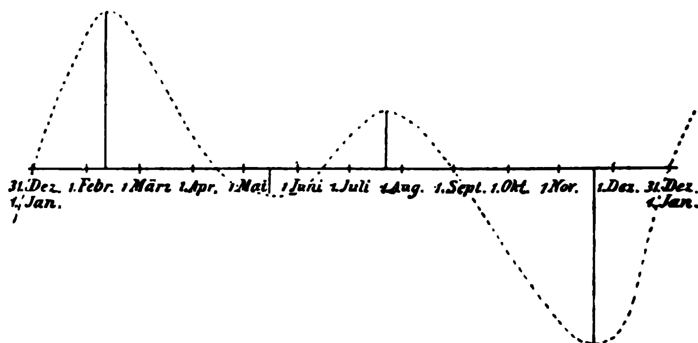
$$\begin{aligned}\alpha - l = {} & 86^s,53 \sin L + 434^s,15 \cos L - 596^s,64 \sin 2L + 1^s,69 \cos 2L \\ & - 3^s,77 \sin 3L - 18^s,77 \cos 3L + 13^s,23 \sin 4L - 0^s,19 \cos 4L \\ & + 0^s,16 \sin 5L + 0^s,82 \cos 5L - 0^s,36 \sin 6L + 0^s,02 \cos 6L.\end{aligned}$$

Hiernach läßt sich also die Zeitgleichung in jedem einzelnen Falle zahlenmäßig ermitteln, und zwar um so bequemer, da die ursprünglich in Bogenmaß gegebenen Koeffizienten der trigonometrischen Reihe bereits in Zeitmaß umgerechnet erscheinen. Ist nämlich n die mittlere tägliche Bewegung der Sonne in Zeit und $(n + w)$ die wahre tägliche Bewegung der Sonne für den treffenden Tag, so hat man (Brünnow, a. a. O., S. 104) für die im Augenblicke des wahren Mittages bestehende Gleichung der Zeit (x) die nachstehende Proportion:

$$x : (\alpha - l) = 24^h : (24 - w)^h.$$

lisierte mühsame Rechnung durchführen zu müssen, so verfährt man am besten interpolatorisch in Gemäßheit der *Fig. 43.* Hier stellen die Abscissen die Jahrestage, die zugehörigen Ordinaten der Kurve die entsprechenden

Fig. 43.



Zeitgleichungen vor, und man sieht auf den ersten Blick, wie sich Maximal-, Minimal- und Nullpunkte über das ganze Jahr hin verteilen [1]). Man überzeugt sich, daß die Differenz zwischen der mittleren und wahren Sonnenzeit auf mehr als auf eine Viertelstunde anzusteigen vermag.

Sterntag, wahrer und mittlerer Sonnentag. Diejenige Zeit, welche unsere Kunstuhren liefern, ist entweder Sternzeit oder mittlere Sonnenzeit, welch letztere eben aus diesem Grunde, weil Schlaguhren unsere tägliche Geschäftsthätigkeit zu regulieren pflegen, *bürgerliche*

---

[1]) Unser Diagramm will selbstverständlich die Verhältnisse nur der Art nach, nicht aber auch mit quantitativer Genauigkeit zur Anschauung bringen. Will man letzteres erreichen, so muß man bedeutend vergrößerte Abmessungen zu Grunde legen, wie dies z. B. bei Martus (S. 81 ff.) geschehen ist. Die dortige Figur ist groß genug angelegt, um mit Hilfe eines genauen Maßstabes eine sehr scharfe graphische Bestimmung der Zeitgleichung zu erlauben.

Zeit genannt wird. Wir haben uns an diese letztere so gewöhnt, daß wir uns kaum vorstellen können, es sei deren Einführung in den einzelnen europäischen Ländern erst vor einer gar kurzen Zeitspanne erfolgt, allein dem ist nichtsdestoweniger so, und noch vor relativ kurzer Zeit ward mit dem, was wir heutzutage *Stunde* nennen, vielfach ein ganz anderer Begriff verbunden [1]). Jetzt be-

[1]) Die älteren Völker machten von der uns jetzt so natürlich erscheinenden Einteilung der einer Vollumdrehung der Himmelskugel entsprechenden Zeit in aliquote Teile nur einen sehr sparsamen Gebrauch, denn es war durchgehends Sitte, *Tag* und *Nacht* für sich in Stunden einzuteilen. Nun ist aber nur für Orte, durch deren Zenit der Himmelsäquator hindurchgeht, der Sichtbarkeitsbogen der Sonne immer dem Unsichtbarkeitsbogen gleich, für andere Orte nur an jenen Tagen, für welche die tägliche Bewegung jenes Gestirnes sich längs des Aequators vollzieht. Wenn man mithin Tag- und Nachtstunden besonders rechnet, so werden zwar zwei Tagstunden unter sich und ebenso zwei Nachtstunden unter sich gleich sein, aber eine Tagstunde wird, die Aequinoktialtage abgerechnet, immer eine andere Länge haben als eine Nachtstunde. Bezeichnet man die erstere mit h_t, die andere mit h_n, so ist im Sommer $h_t > h_n$, im Winter $h_t < h_n$. In dieser Weise war die Tageseinteilung bei den Babyloniern, Griechen, Römern und bei den Abendländern im Mittelalter durchgeführt; die Mittagsstunde erschien so als die natürliche Mitte des Tages, und man unterschied Stunden *vor* und *nach* Mittag. Für einen Solstitialtag unter 48° Polhöhe ist es ungefähr 16 moderne Stunden wirklicher Tag, während auf eben diesen Zeitabschnitt 12 alte Stunden treffen; 1 moderne Stunde ist demzufolge $\frac{3}{4}$ alte Stunden. Lesen wir in einem alten Schriftsteller, ein Ereignis habe sich zugetragen, als die neunte Stunde des Tages, d. h. dritte Stunde des Nachmittags vorüber war, so müssen wir dies 3 mit $\frac{4}{3}$ multiplizieren und ersehen so, daß nach unserer Auffassung es vier Uhr am Nachmittage war, als jenes Vorkommnis eintrat. Eingehendere Belehrung vermittelt Bilfingers 1883 zu Stuttgart gedruckte Programmabhandlung „Antike Stundenzählung“. Chr. v. Wolf (Anfangsgründe der Chronologie, Halle 1717. S. 4) nennt die ungleichen Stunden *Judenstunden* und gibt ausführliche Anweisung dazu, eine in diesen ausgedrückte Zeitangabe in das uns geläufigere Zeitmaß umzurechnen. Für einzelne Orte können wir die allmähliche Verdrängung der ungleichen durch die gleichen Stunden einigermaßen historisch kontrollieren, so z. B. für die damalige freie Reichsstadt Nürnberg. Dort unterschied man seit dem 15. Jahrhundert *kleine* und *grosse* Zeit; erstere rechnete mit

zeichnen wir allgemein mit Stunde $^1/_{24}$ des Tages; dieser Tage jedoch haben wir dreierlei zu unterscheiden:

Sterntag nennen wir den Zeitraum zwischen zwei nächst aufeinander folgenden Meridiandurchgängen eines bestimmten Fixsternes.

Wahren Sonnentag nennen wir den Zeitraum zwischen zwei konsekutiven oberen resp. unteren Kulminationen des wirklichen Sonnenmittelpunktes.

Mittleren Sonnentag nennen wir den Zeitraum zwischen zwei konsekutiven oberen resp. unteren Kulminationen des Mittelpunktes jener fiktiven Sonne, welche als im Aequator umlaufend angenommen wird.

Damit sind auch die Begriffe *Sternstunde, wahre* und *mittlere Sonnenstunde* festgelegt. Die Astronomen halten sich nicht an die im bürgerlichen Leben übliche Zerlegung des Gesamttages in zwei Hälften zu je zwölf Stunden, sondern zählen von Mitternacht zu Mitternacht durch 24 Stunden hindurch; 17^h bedeutet also bei ihnen das-

---

modernen, letztere mit antiken Stunden, und ein großes Maß von Scharfsinn und zeichnerischer Geschicklichkeit wurde aufgeboten, um Diagramme zur bequemen Umrechnung aus der einen in die andere Zeitbestimmung herzustellen. Eine solche Vorrichtung brachte z. B. der kaiserliche Hofmathematikus Stab an der schönen Sonnenuhr an, welche er 1501 an die Wand der St. Lorenz-Kirche in Nürnberg zeichnete (Doppelmayr, a. a. O., S. 32). — Betreffs antiker und mittelalterlicher Stundenbezeichnung wolle man sich bei Bilfinger (Die antiken Stundenangaben, Stuttgart 1888), betreffs der uralten Sitte, mit „Stunde" den zwölften Teil des Tages zu benennen, bei demselben Autor (Die babylonische Doppelstunde, eine chronologische Untersuchung, Stuttgart 1888) näher unterrichten. — Genf acceptierte, auf das Drängen des Astronomen Mallet hin (Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz, 2. Zyklus, Zürich 1859. S. 266), die mittlere Zeit im Jahre 1780, aber Paris folgte erst 1816, nachdem Berlin ihm um sechs Jahre vorangegangen war. Ein wesentliches Verdienst um die Einführung der mittleren Sonnenzeit als örtlicher Normalzeit hatte sich besonders der astronomische Kongreß erworben, welchen Lalande und v. Zach 1798 nach der Sternwarte auf dem Seeberge bei Gotha eingeladen hatten; die Mitglieder desselben gaben sich gegenseitig das Wort, in gedachtem Sinne thätig sein zu wollen (Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 261).

selbe, was wir 5 Uhr nachmittags zu nennen gewohnt sind. Die Einteilung der Stunde in Minuten und Sekunden ist bekannt. Was die längeren Zeitabschnitte anlangt, so können wir uns an dieser Stelle noch nicht in eine detaillierte Erörterung der verschiedenen Begriffe einlassen, welche mit den traditionellen Worten „Jahr“ und „Monat“ zu verbinden uns die Fortschritte der Astronomie nach und nach gezwungen haben. Ein *Jahr* ist dann vorüber, wenn die Sonne ihre Bahn, die Ekliptik, vollständig durchlaufen hat und wieder an demselben Orte angelangt ist, von welchem sie ausgegangen war; daß dieser Zeitraum etwas mehr als 365 Tage umfaßt, war den Himmelsbeobachtern schon in altersgrauer geschichtlicher Zeit festzustellen gelungen [1]). Als Anfangspunkt der Zeitzählung gilt uns hier, wie früher bei der Abszissenzählung, der Widderpunkt, und so liegt es am nächsten, das Erreichtwerden dieses Punktes durch die Sonne zum Anfangs- und Schlußpunkte des Jahres zu machen. Dann lautet unsere Definition:

Das tropische Jahr. *Tropisches Jahr heisst das Intervall, welches zwischen zwei unmittelbar folgenden Durchgängen des Sonnenmittelpunktes durch einen bestimmten der zwei Punkte liegt, in welchem sich der Aequator und der Kolur der Aequinoktien durchschneiden.*

---

[1]) Formaleoni (Saggio sulla nautica antica dei Veneziani, Venedig 1788) stellte zuerst die Hypothese auf, unsere Teilung der Kreisperipherie in 360° gleiche Teile (μοῖρα, gradus, degré, Grad) sei dadurch ins Leben gerufen worden, daß die alten Babylonier zuerst irrtümlich die Jahreslänge mit 360 statt mit 365 Tagen identifiziert hätten, und somit sei ein „Tagesschritt“ der Sonne $\frac{1}{360}$ des Umfanges der Ekliptik gewesen. Angesichts des Umstandes, daß zur Zeit der Sonnenwende die Fortbewegung der Sonne nur eine ganz langsame ist, kann ein solcher Irrtum für das Kindesalter der Sternkunde nur als ein sehr verzeihlicher angesehen werden, und Formaleonis Ansicht wird denn jetzt auch, obwohl sie anfangs auf manchen Widerspruch stieß, wohl von allen gebilligt, die zu einem Urteile in der Sache berufen sind. S. zumal Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ (1. Band, Leipzig 1880. S. 83).

Diese Definition geht bis auf *Hipparch* zurück, der seine astronomische Laufbahn eben mit einer schärferen Bestimmung der Jahreslänge begann [1]). Bald jedoch nahm derselbe wahr, daß die Länge des tropischen Jahres keine völlig gleich bleibende ist, und auch den nächsten Grund für diese Inkonstanz durfte er aufdecken. Indem er nämlich für eine Anzahl von ihm genau beobachteter Fixsterne ein Verzeichnis anlegte, in welchem deren ekliptische Koordinaten zusammengestellt waren, und indem er dieses Verzeichnis mit den analogen Verzeichnissen verglich, welche längere Zeit vorher durch *Eudoxus* sowie durch *Aristyllus* und *Timocharis* angefertigt worden waren, erkannte er eine für sämtliche Sterne ohne Ausnahme giltige Thatsache, deren Wesen sich in Worten folgendermaßen ausdrücken läßt [2]):

Die Breiten ändern sich nicht, wohl aber die astronomischen Längen, und zwar werden dieselben in der Weise unausgesetzt und gleichmässig grösser, dass die Zunahme in einem Jahrhundert ungefähr einen Bogengrad beträgt. Diese Längenbewegung der Sterne ist nur eine scheinbare und wird in Wirklichkeit dadurch bedingt, dass der Frühlingspunkt, der Anfangspunkt der Zählung, in jedem Jahre um einen konstanten Bogenwert im Sinne der täglichen Bewegung fortschreitet.

Allgemeines über die Präzession. Die hiermit gekennzeichnete Erscheinung nennt man *Präzession* oder *Vorrücken der Aequinoktialpunkte.* Kausal ihre Natur begreifen zu wollen, dazu sind wir an dieser Stelle noch

---

[1]) Hipparch vermied, eben wegen der für die Chaldäer irreführenden Minimalbewegung der Sonne in den Solstitien, die Beobachtung dieser letzteren und zog es vor, die Jahreslänge durch scharfe Beobachtung der Aequinoktien zu fixieren. Zu dem Ende stellte er den einen Hauptkreis seiner Armille (s. o. Abschnitt V) genau in die Ebene des Himmelsäquators und merkte die Zeitpunkte an, da der Schatten der vorderen Hälfte gerade die hintere Hälfte verdeckte.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 458 ff.

nicht genug vorbereitet; dies wird im zwölften Abschnitte des dritten Kapitels nachgeholt werden. Wir nehmen von der Thatsache einfach Akt und verzeichnen die Werte, welche man für die *Präzessionskonstante* [1]) ausgemittelt hat. *Hipparch* und *Ptolemäus* schätzten den Jahresbetrag auf 36″, der Araber Albategnius (Al Batânî) erhielt dafür den schon viel richtigeren Wert von 55″, der Perser Nasr-Eddin, um 1260 n. Chr., den fast ganz mit der Wahrheit übereinstimmenden Wert von 51″. In neuerer Zeit hat sich der berühmte Bessel der Sache mit besonderem Eifer angenommen [2]); er nahm 2000 Sterne vor, deren Oerter Bradley 1755 und Piazzi 1800 scharf bestimmt hatten, und ermittelte so, daß für die Epoche 1750 die Präzession 50″,340499 oder — auf eine mit Hilfe der Königsberger Beobachtungen vorgenommene Revision hin — 50″,37572 betragen habe. Vorgreifend dürfen wir hier gleich anführen, daß bei der Bestimmung der Präzession auch auf die Veränderung Rücksicht genommen werden muß, welche die Schiefe der Ekliptik — allerdings innerhalb ziemlich enger Grenzen — erleidet. Um allen Einflüssen gerecht zu werden, unterscheiden wir eine *feste* und eine *wahre Ekliptik*; erstere ist die Ekliptik des Besselschen Normaljahres 1750, letztere entspricht dem Jahre $(1750 + t)$. Will man wissen, welches die Winkelwerte sind, um welche in diesen t Jahren der Widderpunkt auf der wahren und auf der festen Präzession sich verschoben hat, oder will man, wie man auch sagt,

---

[1]) Mit den dem Mittelalter zu Gebote stehenden Mitteln konnte der Betrag der Präzession nur als konstant gefunden werden; wenn man trotzdem hieran zweifelte und sogar die von den Arabern begründete Lehre von der *Trepidation* der Tag- und Nachtgleichenpunkte weiter auszubilden sich bestrebte, so hing man eben Irrtümern nach, mit deren Beseitigung erst der Reformator der Astronomie einen ernstlichen Anfang machte. Vergl. Günther, Der *Wapowski*-Brief des Coppernicus (Mitteil. d. Coppern.-Ver. für Wissenschaft und Kunst zu Thorn, 2. Heft. S. 1 ff.).

[2]) Bessel, Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab a. 1750 usque ad a. 1850 computatae, Königsberg 1830; Astr. Nachr., Nr. 29.

die auf obige t Jahre entfallenden Beträge der *allgemeinen Präzession* und der *Lunisolarpräzession* kennen lernen, die resp. ψ und ψ_0 sein sollen, so hat man sich an diese Gleichungen zu halten [1]):

$$\psi = 50'',21129 \,.\, t + 0'',0001221483 \,.\, t^2,$$
$$\psi_0 = 50'',37572 \,.\, t + 0,0001217945 \,.\, t^2.$$

In neuester Zeit hat Dreyer die Möglichkeit gezeigt, noch über die von Bessel und seinem Nachfolger Struve [2]) erreichte Genauigkeit in der Berechnung der Lunisolarpräzession dadurch hinaus zu gelangen, daß man hauptsächlich von teleskopischen, d. h. mit bloßem Auge nicht erkennbaren Fixsternen die Ortsveränderungen verfolgt [3]).

Zur Kalenderkunde. Das Gesagte wird hinreichen, darzuthun, daß das tropische Jahr die von einem Normalzeitmaße zu fordernde Eigenschaft absoluter Konstanz nicht besitzt. Letztere kommt jenem Jahre zu, welches *siderisch* genannt wird; es deckt sich mit der Zeit, welche verfließt, bis die Sonne, von einem Fixsterne ausgehend, wieder zu demselben zurückgekehrt ist [4]). Die Länge eines siderischen Jahres ist gleich $365^d, 2563744$

---

1) Wolf, Handbuch etc., 2. Band S. 89; Brünnow, S. 123 ff.

2) O. W. v. Struve, Mémoire sur l'évaluation numérique de la constante de la précession des équinoxes, Bull. scient. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, vol. X.

3) Dreyer, A new Determination of the Constant of Precession, Dublin 1881. Die Untersuchung, welche an eine ältere Arbeit von Nyrén anknüpft, stützt sich wesentlich auf den Sternkatalog Schjellerups.

4) Allerdings besitzen auch sehr viele Fixsterne diesen ihren Namen nicht ganz mit vollem Rechte, sondern weisen zum Teile gar nicht unbeträchtliche Eigenbewegungen auf (Näheres darüber in Abschnitt IX des dritten Kapitels). Man wird also zur Bestimmung der Länge des siderischen Jahres vorzugsweise solche Sterne wählen, die keine solche Bewegung haben, und eben weil im Durchschnitte diese Bewegung bei lichtschwachen Fixsternen viel geringfügiger als bei Sternen der höheren Größenklassen zu sein pflegt, muß dem Plane Dreyers (s. o.) von vornherein ein günstiges Prognostikon gestellt werden.

$= 365^d\,6^h\,9^m\,10^s{,}75$. Trotz der Differenz in dem Wesen des tropischen und des siderischen Jahres und trotz des Umstandes, daß das letztere das geeignetere zur Regulierung der Zeiten zu sein scheint, hat man doch aus praktischen Gründen an dem tropischen Jahre festgehalten, dessen Länge für die Gegenwart auf $365^d\,5^h\,48^m\,47^s{,}33$ mittlerer Zeit angesetzt wird [1]). Für die *Kalendariographie* ist maßgebend der Unterschied zwischen dem tropischen und dem *bürgerlichen* Jahre, welch letzteres in 365 Tage = 12 Monaten = $52\,^1/_7$ Wochen eingeteilt wird. Schon der Einleitung zufolge verzichten wir auf eine sachlich eingehende Darlegung der chronologischen Grundlehren, wie sie in Werken über mathematische Erdkunde aus anderweiten Motiven eine Stelle einzunehmen pflegt, indem wir uns bescheiden, den astronomischen Ursprung des Kalenderwesens in einer Randnote zu besprechen und geschichtlich zu würdigen [2]).

---

[1]) Martus, S. 93.

[2]) Die älteste geordnete Zeitrechnung besaßen die Aegypter; ihr Kalender war, wie C. Riel (Das Sonnen- und Siriusjahr der Ramessiden, Leipzig 1875) nachgewiesen hat, in der Hauptsache derselbe, den wir mit Julius Cäsars Namen zu belegen gewohnt sind. Er bestand aus (360 + 5) Tagen, welch letztere als *Epagomenentage* die Rolle von Schalttagen zu spielen hatten. Als Jahresanfang diente der Tag, an welchem das Gestirn der Isis, der Sirius, gerade vor der aufgehenden Sonne am Osthimmel sichtbar ward. Das Jahr der Pharaonen war mithin ein Sternjahr und dementsprechend etwas kürzer als das eigentliche tropische Sonnenjahr, allein die Differenz wurde durch die aus der Präzession folgende Verschiebung des Siriusaufganges wieder ausgeglichen; man muß, dies erwägend, zugestehen, daß die Aegypter bei der Abgrenzung ihres Jahres von einem überaus glücklichen Instinkte geleitet gewesen sind. Cäsar nun bediente sich, als er die Reform des von Numa Pompilius auf ein Mondjahr von 354 Tagen begründeten, seitdem aber in fast unglaublichen Verfall geratenen römischen Kalenders in die Hand nahm, als wissenschaftlichen Ratgebers des Sosigenes von Alexandria, der einfach die in seinem Vaterlande gültigen Normen adoptierte und das Jahr zu $365\,^1/_4$ Tagen ansetzte. Alle vier Jahre sollte ein *Schalttag* (dies bissextus) eingeschoben werden, damit so im Laufe von vier Jahren wirklich $(365 + 365 + 365 + 366 = 1461 = 4 \cdot \frac{1461}{4})$ Tage ab-

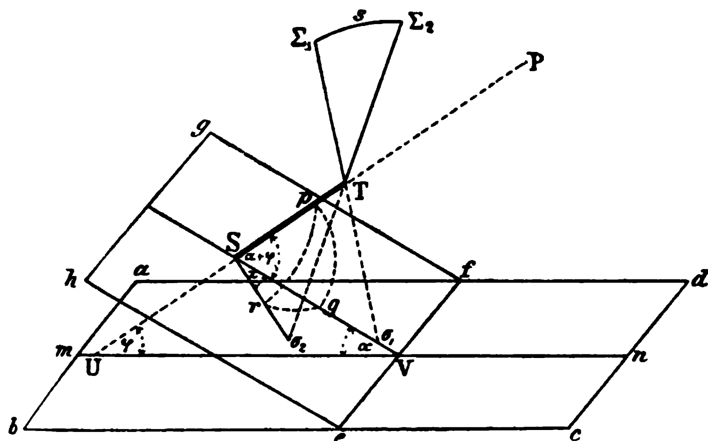
Die Sonnenuhren. Eine sehr wichtige Frage sieht nunmehr noch ihrer Lösung entgegen: *Wie bestimmen wir die Zeit* — die wahre natürlich, da ja die mittlere durch unsere Kunstuhren angezeigt wird? Hierzu dient uns in erster Linie die *Sonnenuhr*, eine Fläche, auf welcher sogenannte *Stundenlinien* verzeichnet sind; immer dann, wenn der Schatten einer gewissen Linie, des *Stylus* oder *Zeigers*, auf die mit *n* bezeichnete Stundenlinie fällt,

---

gelaufen wären. Allein es ist, wie wir oben sahen, das tropische Jahr etwas kürzer, als der alexandrinische Astronom angenommen hatte, und so traten denn, je länger es dauerte, um so mehr Mißstände hervor, welchen man Jahrhunderte lang abzuhelfen sich bemühte, ohne einen durchschlagenden Erfolg zu erzielen. Wegen der historischen Seite dieser Angelegenheit befragt man am besten die monographischen Darstellungen von Kaltenbrunner (Die Vorgeschichte der gregorianischen Kalenderreform, Wien 1876) und Schubring (Zur Erinnerung an die gregorianische Kalenderreform, Halle 1883); die sachlichen Fragen haben eine gründliche, den üblichen Vortrag der Lehrbücher mehrfach korrigierende Schilderung erfahren in einem Aufsatze Peins (Die Verbesserung des julianischen Kalenders, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 17. Jahrgang. S. 321 ff.). Danach war für Papst Gregor XIII. (Fürst Hugo von Boncompagni), als er durch seine Mathematiker Lilius und Clavius die Verbesserung der Zeitrechnung endlich zum Ziele führen ließ, die Tendenz bestimmend, die zu seiner Zeit (1576) auf den 10. März entfallenden Aequinoktien wieder auf den 21. März zurückzubringen, auf welchen sie nach den vom nizänischen Konzile für die Berechnung des Osterfestes gegebenen Regeln fallen sollten. Dies konnte nur geschehen, wenn man sofort 10 Tage fortließ, und damit Aehnliches sich nicht wieder ereigne, ward die in der That höchst zweckdienliche Bestimmung getroffen, daß fortan die mit zwei Nullen endigenden Jahreszahlen der ihnen nach der julianischen Vorschrift zukommenden Eigenschaft, Schaltjahre zu sein, verlustig gehen sollten. Für ewige Zeiten wird auch diese Maßregel die absolute Uebereinstimmung des Kalenders mit dem Laufe der Gestirne nicht verbürgen, wohl aber für die nächsten Jahrhunderte. — Empfehlenswerte Schriften über Zeitrechnung sind: Brockmann, System der Chronologie, Stuttgart 1883 (ganz elementar gehalten); Brinckmeier, Praktisches Handbuch der historischen Chronologie aller Zeiten und Völker, Berlin 1882 (zumal für Historiker und Urkundenforscher); Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, Berlin 1825—26 (ein noch immer unentbehrliches Quellen- und Nachschlagewerk).

hat man n Uhr wahre Zeit. Damit eine Sonnenuhr für eine bestimmte Polhöhe φ zu allen Zeiten des Jahres gleichmäßig brauchbar sei, bedarf es bloß der Erfüllung einer einzigen Bedingung: *Der gradlinige Zeiger muss eine zur Weltachse parallele Richtung besitzen.* Für den Fall, daß die Fläche der Stundenlinien eine ebene sein

Fig. 44.



soll, lassen sich die Formeln leicht entwerfen, zumal wenn man noch eine zweite einschränkende Voraussetzung macht, welche in der Praxis fast allgemein erfüllt ist und die Rechnungen sehr erheblich vereinfacht. $abcd$ (Fig. 44) sei die Horizontalebene, mn die Nordsüdlinie, und es werde angenommen, daß die Ebene $efgh$, in welche die Sonnenuhr eingetragen werden soll, die Ebene $abcd$ in einer mit der Ostwestrichtung zusammenfallenden Graden ef durchschneide. ST sei der Zeiger, der Himmelspol P liegt in der Verlängerung von ST. Σ_1 und Σ_2 sollen zwei Sonnenstände sein, und zwar wird Σ_1 als im Meridiane befindlich vorausgesetzt, so daß also arc $\Sigma_1 \Sigma_2$ den Stundenwinkel s repräsentiert. Die beiden Sonnenständen ent-

sprechenden Stundenlinien seien $S\sigma_1$ und $S\sigma_2$; erstere Linie muß in die Vertikalebene und demgemäß in die Linie SV fallen, welche in der Uhrebene senkrecht auf der Spurlinie ef steht. Der Neigungswinkel beider Ebenen ist $\sphericalangle SVm = \alpha$; die verlängerte TS schneidet die Horizontalebene in einem der Mittagslinie mn angehörenden Punkte U so, daß $\sphericalangle SUV =$ der Polhöhe φ wird. Der Winkel x, mit dessen Auffindung die Aufgabe, eine Sonnenuhr a priori zu konstruieren, gelöst erscheint, ist $\sphericalangle \sigma_1 S \sigma_2$. Um ihn durch die bekannten Größen α, φ und s auszudrücken, beschreiben wir um S als Mittelpunkt mit willkürlichem Radius eine Kugelfläche, aus welcher von dem Dreikant $ST\sigma_1\sigma_2$ das sphärische Dreieck pqr ausgeschnitten wird. In diesem ist bekannt $\sphericalangle rqp = 90^\circ$, $\sphericalangle rpq =$ dem Stundenwinkel s und Seite $pq = \sphericalangle TSV = \alpha + \varphi$, da der Außenwinkel eines ebenen Dreieckes (hier USV) gleich der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Innenwinkel ist. Wendet man auf das so durch drei Stücke bestimmte Kugeldreieck pqr je einmal den Sinus- und den Kosinussatz an, so hat man, unter y die Seite pr verstanden, für zwei Unbekannte zwei Bestimmungsgleichungen:

$$\sin y = \frac{\sin x}{\sin s}, \quad \cos x \cos(\alpha + \varphi) = \cos y.$$

Eliminiert man in bekannter Weise y, so erhält man leicht

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 s \sin^2(\alpha + \varphi)}{1 - \sin^2 s \cos^2(\alpha + \varphi)}, \quad \cos^2 x = \frac{\cos^2 s}{1 - \sin^2 s \cos^2(\alpha + \varphi)}.$$

Durch Division und Radizierung folgt hieraus

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} s \sin(\alpha + \varphi).$$

Diese Relation reicht unter allen Umständen aus, die Stundenlinien in die Uhrebene einzuzeichnen [1]).

[1]) Ohne Rechnung, lediglich durch Konstruktion, diese Aufgabe zu lösen, ist sehr wohl möglich; den Anfang dazu machte schon vor mehr denn zweihundert Jahren der berühmte französische Mathematiker De la Hire (Traité de gnomonique, Paris 1782).

Gemeiniglich sind es drei besondere Fälle, welche am meisten in Betracht kommen. Dieselben sollen, jeder für sich, noch kurzer Erörterung unterzogen werden.

I. Die Uhrebene fällt mit der Aequatorebene zusammen; Aequatorialuhr. Alsdann ist $\alpha + \varphi = 90^0$, $\sin(\alpha + \varphi) = 1$, $x = s$: *Die Winkel zwischen zwei bestimmten Stundenlinien sind gleich den Differenzen der entsprechenden Stundenwinkel.* Die Anfertigung einer solchen Sonnenuhr macht also die wenigsten Schwierigkeiten; man beschreibt um den Fußpunkt des Stylus als Zentrum einen Kreis und teilt dessen Peripherie in vierundzwanzig gleiche Teile.

II. Die Uhrebene fällt mit der Horizontalebene zusammen; Horizontaluhr. In diesem gewöhnlichsten Falle ist $\alpha = 0$, $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} s \sin \varphi$.

III. Die Uhrebene fällt mit der Ebene des ersten Vertikalkreises zusammen; Vertikaluhr. So fügt es sich stets, wenn der Zeitweiser an einem kirchlichen Gebäude angebracht werden soll, da ja für ein solches die Orientierung nach den vier Weltgegenden vorgeschrieben ist. Alsdann ist $\alpha = 90^0$, $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} s \cos \varphi$.

Nur insoweit haben wir im Interesse der mathema-

Seiner Methode wird von Chasles (Geschichte der Geometrie, deutsch von L. A. Sohncke, Halle 1839. S. 115) das Lob vollständiger Neuheit erteilt, aber andererseits muß eben derselbe Gewährsmann (S. 653) es rügen, daß De la Hire stets mehr Stücke als gegeben voraussetzt, als dies den Bedingungen der Aufgabe nach erforderlich wäre, daß er also, kurz gesprochen, das Problem als ein *überbestimmtes* behandelt. Sowie im allgemeinsten Falle drei Stundenlinien vorliegen, müssen sich die übrigen dazu finden lassen; unter der von uns zugelassenen Beschränkung genügen sogar deren zwei, denn aus den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} s_1 \sin(\alpha + \beta),\ \operatorname{tang}(x + k) = \operatorname{tang} s_2 \sin(\alpha + \beta),$$

worin k den von den beiden gegebenen Stundenlinien eingeschlossenen Winkel vorstellt, lassen sich die beiden Unbekannten x und $(\alpha + \beta)$ berechnen. Chasles führt (a. a. O.) seine sehr einfache Konstruktion auf die Thatsache zurück, daß die drei gegebenen Stundenlinien mit einer unbekannten vierten ein sogenanntes „anharmonisches" Strahlenbüschel bilden, so daß also die Lehre von den „Doppelverhältnissen" ohne weiteres Platz greifen kann.

tischen Erdkunde ein Problem zu betrachten, welches allerdings aus sich heraus einen selbständigen und in gewissen Zeiten für äußerst wichtig erachteten Zweig der angewandten Mathematik sich entwickeln sah: die *Sonnenuhrkunde* oder *Gnomonik* [1]). Dieselbe ist begreiflicherweise sehr alten Datums, denn in der vorchristlichen Zeit gab es ja, von der erst nach und nach zu größerer Vollkommenheit gebrachten Wasseruhr (s. o.) abgesehen, kein anderes Mittel, sich in der Zeit zurechtzufinden. So sah denn bereits das Altertum Sonnenuhren der verschiedensten Beschaffenheit entstehen [2]). Ursprünglich benutzte man zweifellos einen aufrecht stehenden Stab oder Gnomon und bemaß die Zeit nach der — allerdings für dieselbe Tagesstunde in verschiedenen Zeiten des Jahres veränderlichen — Schattenlänge desselben [3]); erst später entstand

---

[1]) Die Bildung dieses Wortes wird sofort verständlich, wenn man sich an die Angaben von Abschnitt V über den Sonnenweiser der Gnomon erinnert.

[2]) Genaue Nachweisungen über die Entwicklungsgeschichte der Gnomonik findet man, außer in der uns schon bekannten Abhandlung Bilfingers, besonders noch in den nachstehend verzeichneten Schriften: Martini, Von den Sonnenuhren der Alten, Leipzig 1777; Ostertag, Programm von den Skaphien der Alten, Regensburg 1780; Calkoen, De horologiis veterum sciothericis, Amsterdam 1797; Wöpcke, Disquisitiones archaeologico-mathematicae circa solaria veterum, Berlin 1842. Letztere Schrift ist die in mathematisch-historischer Hinsicht vollkommenste. Auch in einem zunächst der Gnomonik selbst gewidmeten Buche von Sonndorfer (Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren auf Ebenen, Kegel- und Cylinderflächen, Wien 1864) begegnet man schätzbaren geschichtlichen Notizen.

[3]) Wohl das älteste Zeugnis dieser Art hat uns Aristophanes in seinen „Ekklesiazusen“ (v. 625) aufbehalten; daraus ist zu entnehmen, daß man um 400 v. Chr. zu Athen die Essensstunde auf den Zeitpunkt verlegt hatte, in welchem die Länge des vom „στοιχεῖον“ geworfenen Schattens zehn Fuß maß („δεκάπους“). Die Sitte, die Tageszeit durch Abmessen des eigenen Schattens zu bestimmen, ist eine uralt-griechische, sie erhielt sich aber auch das ganze Mittelalter hindurch, wie man u. a. aus den „Versus Domini Bedae ad componendum horologium“ ersehen kann, die zwar nicht von dem Stiftslehrer Beda Venerabilis selbst herrühren, wohl aber von einem Mönch Wandalbert im karolingischen Zeitalter

die eigentliche antike *Sonnenuhr*, deren älteste Form von Vitruvius [1]) auf einen Chaldäer Berosus zurückgeführt wird, während für die weitere Ausbildung der gnomonischen Technik Anaximander, Pherekydes, Eudoxus, Apollonius u. s. w. thätig gewesen sein sollen [2]). Jene älteste Sonnenuhr war das sogenannte *Hemicyklium*, von dessen Einrichtung uns *Fig. 45* einen Begriff gibt, und welches nach Bilfingers treffender Angabe [3]) den

---

gedichtet wurden; vgl. Bilfinger, S. 73 ff. und Ebert, Allgemeine Geschichte der Litteratur des Mittelalters im Abendlande, 2. Band, Leipzig 1880. S. 189. Auch in Chaucers „Canterbury-Erzählungen" und in Schöners streng wissenschaftlicher „Gnomonice, seu de descriptionibus horologiorum sciothericorum omnis generis libri tres" (Nürnberg 1562) tritt uns das erwähnte Herkommen entgegen. Auch hat Bilfinger (Das Schattenmaß, Korrespondenzblatt d. württemb. Gelehrtenschulen, 1888, Heft 9) auf Grund ethnographischen Materiales dargethan, daß eine ähnliche Prozedur zur Bestimmung der Zeit mit Hilfe des Körperschattens bei halbkultivierten Völkern gar nicht so selten vorkomme. Hierher gehören z. B. die Javanen und ganz besonders die Hovas auf Madagaskar, welche ihre — dem antiken Muster unbewußt nachgebildeten — Stunden mit Namen belegt haben, die sich nur dann erklären lassen, wenn man gewisse Hauptabmessungen des menschlichen Körpers als Namengeber betrachtet.

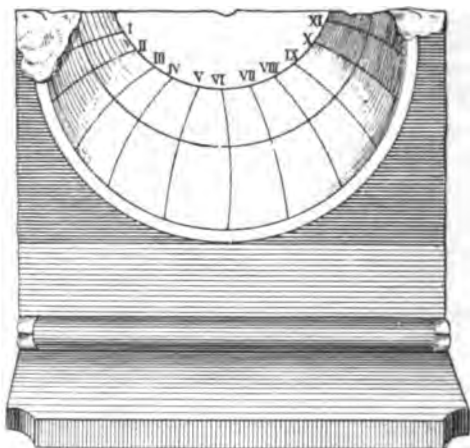
[1]) Vitruvius, De architectura, lib. IX, cap. 9.

[2]) Poppe, Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur, Nürnberg 1802. S. 22 ff.

[3]) Bilfinger, S. 27. Die erste Originalsonnenuhr dieser Art beschrieb Zuzzeri: D'una antica villa scoperta sul dosso del Tusculo, e d'un antico orologio a Sole trà le rovine della medesima trovato, Venedig 1746. Das im Texte abgebildete Exemplar ist pompejanischer Provenienz; vgl. Descrizione di una casa Pompeiana, Neapel 1837. Auch in Deutschland hat man manche interessante Sonnenuhr von römischer Fabrik ausgegraben (Jahresber. von Altertumsfreunden im Rheinlande, IV. S. 90 ff.; Schlieben, Römische Sonnenuhren in Wiesbaden und Cannstatt, Ann. f. nassauische Altertumskunde, 20. Band. S. 316 ff.). Wie lange die Römer dazu brauchten, das Wesen dieser Vorrichtungen verstehen zu lernen, erhellt daraus, daß sie eine in Sizilien erbeutete und für dortige Verhältnisse richtig gehende Uhr fast ein volles Jahrhundert auf ihrem Forum aufgestellt und benutzt hatten, ohne auf die falschen Zeitangaben aufmerksam zu werden (Böckh-Bratuschek, Encyklopädie und Methodologie der philologischen Wissenschaften, Leipzig 1886.

Zweck verfolgte, „die auffangende Fläche zum genauen Gegenbilde der Himmelshemisphäre, die Schattenwege zu genauen Abbildern der Sonnenwege“ zu machen; inwieweit von dieser Sonnenuhr die dem Samier Aristarch zugeschriebene „σκάφη“ abwich, das wird sich heute nicht mehr bestimmen lassen. Nachdem sodann in der römi-

Fig. 45.



schen Zeit der Baumeister Vitruv[1]) die zur Verzeichnung einer konkav-gekrümmten Sonnenuhr notwendigen Konstruktionen („ἀνάλημμα“) gründlich erörtert und ins-

---

S. 324). Später schuf Augustus seinen Unterthanen einen bequemeren Zeitmesser, indem er den auf seine Veranstaltung aus Aegypten nach Rom gebrachten Obelisken zu diesem Zwecke aptieren ließ.

[1]) Vitruvius, lib. IX, cap. 7; vgl. den Kommentar hierzu bei Bilfinger (a. a. O., S. 28 ff.) und bei Terquem (a. a. O., S. 55 ff.). Im allgemeinen sind die von dem Endpunkte des Stylus auf der Uhrebene beschriebenen krummen Linien *Kegelschnitte* (in dem speziellen Falle des Vitruv waren es Hyperbeln). Unter der Voraussetzung, daß man es mit einem der Vertikalrichtung paral-

besondere auch die vom Endpunkte des Schattens beschriebenen Kurven in Untersuchung gezogen hatte, nahm die gnomonische Technik einen neuen Aufschwung bei den Arabern, über deren Leistungen auf diesem Gebiete die Arbeiten Sédillots Licht verbreitet haben[1]. Es lagen für die Anhänger des Islam religiöse Gründe vor, die Konstruktion der Sonnenweiser möglichst zu verbessern[2]. Aus dem Morgenlande teilte sich dieser neue Anstoß auch dem Westen mit, allerdings jedoch mit erheblicher Verspätung, denn erst zu Anfang des 16. Jahrhunderts trat Sebastian Münster auf, den Wolf[3] den „Vater der ausgedehnten Sonnenuhren-Litteratur im 16. und 17. Jahrhundert“ nennt[4]. Es ist von da ab kein geringer Scharfsinn aufgeboten worden, um stets neue Formen von Sonnenuhren zu erdenken und unter schwierigen äußeren Umständen zu konstruieren, worüber die

---

lelen Zeiger zu thun habe, entwickelt die Kegelschnittsgleichung Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 84), aber schon der Araber Thabit ben Korra studierte diese Linien (Chasles, a. a. O., S. 573).

[1]) Das beste Werk über arabische Gnomonik verfaßte um das Jahr 1250 Abul Hassan von Marokko; der eine Band des uns schon (aus Abschnitt V) bekannten „Traité des instruments astronomiques des Arabes“ der beiden Sédillot (Vater und Sohn) ist nur diesem Gegenstande gewidmet.

[2]) Die arabische Sonnenuhr war meistens eine solche mit senkrecht stehendem Zeiger, und in die horizontale Platte war neben den Stundenlinien noch die sogenannte „Quibla“ eingetragen, d. h. die nach der heiligen Stadt Mekka führende gerade Linie. Ein eigener Beamter hatte die Uhr unausgesetzt ins Auge zu fassen und durch öffentlichen Ausruf den Moment bekannt zu geben, in welchem der Schatten des Körpers gerade mit der Quibla zusammenfiel. Jeder Gläubige sollte nämlich beim Niederwerfen zum Gebete seinen Blick möglichst nach der heiligen Stätte richten, und das konnte am leichtesten dann geschehen, wenn ihm sein eigener Schatten die Richtung anwies.

[3]) Wolf, Biographien etc., 2. Cyklus, S. 11.

[4]) Münster, Fürmalung und künstliche Beschreibung der Horologien, Basel 1537; Rudimenta mathematica, ebenda 1551. Der erste Teil letzteren Werkes enthält die Grundlinien der reinen Geometrie, der zweite diejenigen der Gnomonik.

Werke von Bion[1]) und Gaupp[2]) den besten Aufschluß geben können, allein freilich liefen auch immer mehr Künsteleien und Spielereien mit unter. Doch bemühte sich das 18. Jahrhundert auch um die analytische Ausgestaltung der Gnomonik, und nachdem De la Hire (s. o.) für die Verzeichnung der Stundenlinien ganz neue Gesichtspunkte eröffnet hatte, wurde das Problem, auf einer wie immer gelegenen Ebene eine Sonnenuhr anzubringen, von Hausen[3]) und Kästner[4]) allgemein aufgelöst. Die neuesten, streng wissenschaftlichen Darstellungen unseres Faches besitzen wir von J. J. v. Littrow[5]) und Sonndorfer (s. o.); dieses letztere Buch zeichnet sich vor seinen Vorgängern insonderheit auch durch die Anwendung der *darstellenden Geometrie* aus, welche mit entschiedenem Vorteil dann verwendet wird, wenn es sich um die Konstruktion einer Uhr auf gekrümmter Aufnahmefläche handelt.

Statt der Sonnenuhr kann zur Bestimmung der wahren Sonnenzeit wohl auch ein zu diesem Zwecke künstlich ersonnener Apparat dienen, und da mehrere dieser Vorrichtungen einiges Aufsehen erregt haben, glauben wir eine kurze Charakteristik derselben nicht umgehen zu können.

Verschiedene Instrumente zur Ermittlung der wahren Sonnenzeit. *I. Dents Dipleidoskop*[6]).

---

[1]) Bion, Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques, Paris 1713; deutsch von Doppelmayr (Mathematische Werkschule, Leipzig 1713).

[2]) Gaupp, Allgemeine mechanische Sonnenuhrkunst, Augsburg 1711. Die Stadtbibliothek zu Lindau, wo Gaupp (1667 bis 1738) als Pfarrer lebte, bewahrt noch einen reichen Vorrat gnomonischer Manuskripte dieses Schriftstellers von teilweise gar nicht uninteressantem Inhalte.

[3]) Hausen, Methodus generalis construendi horologia ope triangulorum planorum, Analecta Soc. Charit. et Scient. Lips., vol. I.

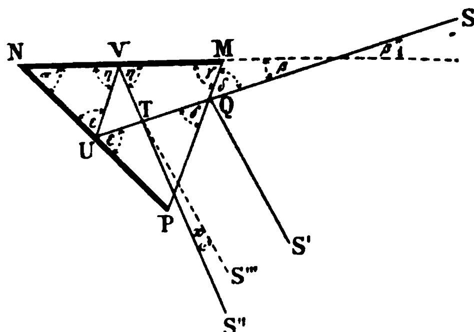
[4]) Kästner, Gnomonica analytica, Leipzig 1754; Gnomonik, Anfangsgründe der angewandten Mathematik, 2. Abteilung, Göttingen 1781. S. 450 ff.

[5]) v. Littrow, Gnomonik, Wien 1839.

[6]) Das Instrumentchen wurde erfunden und erstmalig be-

Hauptbestandteil ist ein Winkelspiegel *MNP (Fig. 46)* mit der Oeffnung α; vor den Spiegel wird eine Glasplatte *MP* gesetzt. Ein aus *S* kommender Lichtstrahl, der mit der verlängerten Spiegelebene *MN* einen Winkel β bildet, wird von dem Spiegel *MP* in *Q* so reflektiert, daß er nach *S'* zurückgeht; doch ist diese Reflexion nur eine partielle, und ein anderer Teil des Strahles dringt

Fig. 46.



in das Innere ein, um dortselbst eine doppelte Spiegelung in *U* und in *V* zu erfahren und in der Richtung *VS''* wieder auszufahren. *VS''* und *SU* durchschneiden sich in *T*; zieht man durch *T* die Grade *TS'''* parallel zu *QS'*, so ist der Winkel $S''TS''' = x$ derselbe Abstand, welchen die durch einmalige und durch dreimalige Zurückwer-

---

schrieben von Dent (On the Dipleidoscope, London 1844). Die Theorie des Instrumentes wurde vornehmlich in Deutschland ausgebildet, wie die nachstehend aufgeführten Arbeiten bekunden: G. Schmidt, Ueber die Theorie des Dipleidoskopes, Archiv d. Math. u. Phys., 5. Teil, S. 337 ff.; Grunert, a. a. O., S. 343 ff.; Heinen, Das Dipleidoskop, Düsseldorf 1847. Schmidt und Grunert begründen die optischen Sätze, auf die es ankommt, ziemlich umständlich mit Hilfe der Koordinaten; daß aber auch ganz einfache geometrische Betrachtungen zum Ziele führen, beweist u. a. die Darstellung Wolfs (Handbuch etc., 2. Band. S. 81 ff.), welcher auch wir oben im Texte gefolgt sind.

fung entstandenen beiden Bilder des Punktes S voneinander haben. Dieses x soll bestimmt werden. Zu dem Ende nennen wir ε und η die Winkel, welche resp. in U und V der reflektierte Strahl mit der Spiegelebene bildet, δ den $\sphericalangle MQS$ und haben dann zunächst:

$$1.\ \alpha + \varepsilon + \eta = 180^0;\ 2.\ \delta + \beta = \gamma;$$

γ ist $= \sphericalangle NMP = \sphericalangle NPM$. Aber auch im Dreieck UVT ist die Winkelsumme zweien Rechten gleich; hier ist $\sphericalangle TUV = 180^0 - 2\varepsilon$, $\sphericalangle UVT = 180^0 - 2\eta$, $\sphericalangle UTV = \sphericalangle STS'' = \sphericalangle S''TS''' + \sphericalangle S'QS = x + 180^0 - 2\delta$. Dies einsetzend, erhält man als neue Gleichung:

$$3.\ 180^0 - 2\varepsilon + 180^0 - 2\delta + x + 180^0 - 2\eta = 180^0;$$

$$4.\ \varepsilon + \eta + \delta = 180^0 - \tfrac{1}{2}x.$$

Addieren wir die Gleichungen 1. und 2. zusammen, so erhalten wir

$$5.\ \alpha + \varepsilon + \eta + \delta + \beta = 180^0 + \gamma;$$

ziehen wir von 5. die Gleichung 4. ab, so bleibt uns noch

$$6.\ \alpha + \beta = \gamma + \tfrac{1}{2}x.$$

Diese letzte Gleichung nimmt eine sehr einfache Form an, wenn $\alpha = \gamma$ gemacht wird; in diesem die Konstruktion des Apparates nicht im mindesten erschwerenden Falle wird nämlich $x = 2\beta$, für $\beta = 0$ wird auch $x = 0$, und es kommen also die beiden Bilder zur Deckung, sobald der einfallende Strahl in die Spiegelebene MN selbst zu liegen kommt. Dies erreicht man am einfachsten dadurch, daß man diese Ebene in den Meridian stellt und die Kulmination beobachtet. Auf diese Weise kann also die Zeit des wahren Mittags mit einer Genauigkeit ermittelt werden, die nichts zu wünschen übrig läßt. — Das von Steinheil vorgeschlagene *Passagenprisma* [1]) erreicht denselben Zweck wie das Dipleidoskop, indem nur ein Prisma an die Stelle des Winkelspiegels getreten ist.

---

[1]) v. Steinheil, Ueber das Passagenprisma. Astr. Nachr., Nr. 24.

II. Ebles Zeitmesswerk [1]). Aus der Höhe der Sonne kann man trigonometrisch deren Stundenwinkel, das Maß der wahren Zeit berechnen, denn wie wir bei der Transformation der sphärischen Koordinaten erfahren haben, ist

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

Um nun die Höhe rasch zu erhalten, war schon früher der sogenannte *Sonnensextant* [2]) im Gebrauche, ein im Punkte C (*Fig. 47*) frei aufgehängter Sechstelskreis CDB, der auf dem Alhidadenschenkel CA eine verschiebbare, zur Ebene des Sextanten senkrechte Platte P_1 und am Endpunkte B des Endschenkels CB eine zu P_1 parallel zu stellende Platte P_2 trug. In P_1 befand sich ein kleines Loch Q, in P_2 eine Marke B, und diese beiden Punkte bestimmten eine Visierlinie BQ senkrecht zur Linie CA; zieht man BD, so ist offenbar $\sphericalangle DBQ$ dann gleich der Sonnenhöhe h, wenn die Verlängerung von BQ durch die Sonne S hindurchgeht, und dieser Winkel h ist aus geometrischen Gründen, wenn CH das mit der Symmetrielinie des Sextanten zusammenfallende Bleilot anzeigt, gleich $\sphericalangle ACH$. Ebles Verbesserung bestand nun zunächst darin, daß er zwischen B und Q eine das Licht zusammenhaltende Röhre einschob und zugleich die eine Oeffnung Q durch zwei kreisrunde Löcher ersetzte, welche zwei in P_2 sich

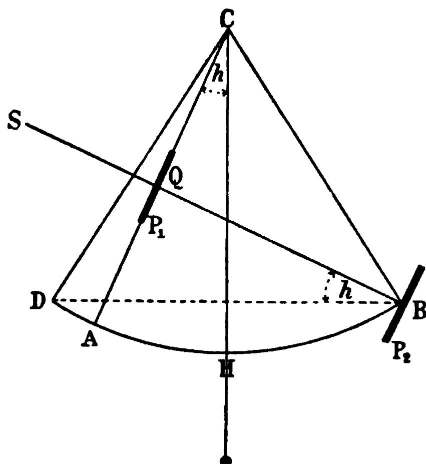
---

[1]) Weiteren Kreisen wurde der Zeitweiser des in Ellwangen wohnenden Mechanikers erst bekannt durch einen Aufsatz von Grunert: Ueber Ebles Stundenzeiger, ein Instrument zur Zeitbestimmung, Arch. d. Math. u. Phys., 37. Teil. S. 420 ff. Einen für den praktischen Gebrauch dieses Instrumentes wichtigen Nachtrag hierzu lieferte nachmals Nell: Berücksichtigung der Refraktion und Korrektion der Fehler bei dem Stundenzeiger von Eble, a. a. O., 41. Teil. S. 207 ff. Ferner wäre für die theoretische Begründung dieses Messungsverfahrens, welches übrigens in mancher Beziehung an das in Abschnitt VII besprochene Triedometer erinnert, noch zu vergleichen eine Abhandlung C. v. Littrows: Ueber Herrn M. Ebles graphische Methoden der Auflösung sphärischer Dreiecke, mit besonderer Rücksicht auf sein neuestes, „Stundenzeiger" oder „Horoskop" benanntes Instrument, Sitzungsber. d. k. k. Akademie zu Wien, Mathem. Kl., XLII, 4. S. 203 ff.

[2]) Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 82.

berührende Sonnenbildchen lieferten; ferner verfertigte er ein stereographisches Netz der Himmelskugel mit Skala, durch dessen Anwendung der oben berechnete Wert von cos *s* graphisch ermittelt werden konnte. Vereinfacht

Fig. 47.



wurde später dieses Verfahren noch von **Eble** durch das ebenfalls von ihm erfundene sogenannte *Horoskop* (s. S. 189, Note 1), aus dessen Einrichtung für die oben angeführte sphärisch-trigonometrische Beziehung eine wirklich überraschend einfache planimetrische Darstellung entfließt.

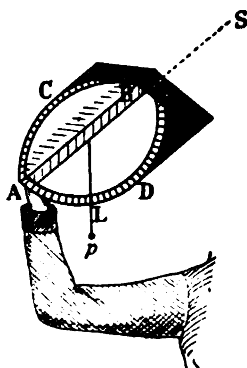
III. Presslers Zeitmessknecht [1]). Das Streben des um die angewandte Mathematik mehrfach verdienten Tharandter Lehrers der Forstwissenschaft ging dahin, ein tragbares Instrument zur Anstellung irgendwelcher geodätischer und ähnlicher Messungen herzustellen. Ein Kreissektor,

---

[1]) Von den vielen auf ein und dasselbe Ziel gerichteten Schriften dieses Autors möge es genügen, hier an die „Mathematisch-polytechnische Brieftasche mit Ingenieurmeßknecht“ (Berlin 1875. S. 12) zu erinnern.

dem zu einem Vollkreise nur ein vergleichsweise kleines Segment fehlt *(Fig. 48)*, ist längs des Durchmessers *AB* aufgeschnitten und mit einem Scharniere versehen, so daß die eine Hälfte *ACB* horizontal, die andere Hälfte *ADB* vertikal gestellt werden kann; ein bei *p* befindliches Bleilot verbürgt die Vertikalstellung. Zur schärferen Einstellung der Visierrichtung dient eine bei *B* senkrecht eingesteckte Nadel. Man hält dann den „Knecht" dergestalt

Fig. 48.



vor das Gesicht und gegen die Sonne *S*, daß des Stiftes Schatten genau parallel zu *BA* über die vertikale Fläche des Instrumentes streicht, und liest alsdann die Sonnenhöhe ab als den Bogen, welcher sich zwischen *A* und dem Punkte *L* des Limbus befindet, auf welchen das Senkel einspielt. Eine für Süd- und Norddeutschland gesondert berechnete Tabelle gestattet sodann die Umsetzung der Sonnenhöhe in wahre Sonnenzeit [1]).

[1]) Diese Tafeln sind (Braunschweig 1860) besonders erschienen. Vorbildlich für solche Tafeln sind jene von F. C. Müller in Schwelm (Tafeln der Sonnenhöhe, Leipzig 1791), welche für jeden Grad Polhöhe von 47° bis 54° und für jeden Grad Sonnenhöhe von 0° bis 55° die Zeit bis auf 1^m genau geben (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 596). Mit solchen Tafeln war erst der Brandersche Sonnensextant (s. o.) zu dem Grade der Brauchbarkeit gebracht, welchen der Erfinder ihm hatte verleihen wollen.

IV. Augusts Sonnenkompass. Das von dem bekannten Mathematiker *F. August* in Berlin konstruierte Instrumentchen wird von der dortigen mechanischen Firma *F. Ernecke* im großen hergestellt. Es gestattet eine leichte Einstellung, zu der Kenntnis der Mittagslinie nicht erfordert wird, und zwar zeigt der Schatten einer gewissen Kante auf der Innenfläche eines Ringes die jeweilige wahre Sonnenzeit an [1]). — Einigermaßen ähnlich ist der *Chronodeck* von Chandler.

Schließlich soll wenigstens noch kurz darauf hingewiesen werden, daß ebenso, wie die *Sonne*, so auch der *Mond* ein Hilfsmittel der Zeitbestimmung darstellt [2]). Auch *Sternuhren*, die also konstante Sternzeit liefern würden, sind bereits in Vorschlag gebracht worden [3]).

---

[1]) Vgl. die eingehende Beschreibung im „Humboldt" (7. Jahrgang. S. 51 ff.).

[2]) Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 84. „Eine Sonnenuhr ist auch zur Not als Monduhr zu gebrauchen: die Mondkulmination verspätet sich täglich um $\frac{24}{29\frac{1}{2}}^h =$ nahe $\frac{4}{5}^h$; bezeichnet daher a das ‚Alter des Mondes' — d. h. die Anzahl der dem letzten Neumonde eines Jahres noch folgenden Jahrestage —, und zeigt eine Sonnenuhr bei Mondschein u^h, so ist $\left(u + \frac{4}{5}\, a\right)^h$ annähernd die entsprechende Sonnenzeit."

[3]) Mädler, Populäre Astronomie, herausgegeben von Klinkerfues, Straßburg 1882. S. 600 ff. Zwei konzentrische Scheiben werden so zusammengefügt, daß die innere sich frei drehen kann; die äußere Peripherie ist in 365, die innere in 24 gleiche Teile geteilt, und an deren Rande sind ebensoviele Zähne eingeschnitten. Eine Handhabe ist auf die Nacht vom 4. zum 5. September eingestellt, weil in dieser der Sonne und dem Fixsterne *α Ursae majoris* so ziemlich die gleiche Rektaszension zukommt. Wenn dann noch ein besonders großer Zahn die Mittagsstunde andeutet, so stellt man letzteren so auf, daß er dem Beobachtungstage am Außenrande direkt gegenübersteht; alsdann fixiert man durch ein am Alhidadenlineale angebrachtes Loch den Polarstern und bringt das Lineal selber in die aus den Sternen α und β des großen Bären bestimmte Richtung. Die an dieser Seite des Lineales gelegene Stunde der äußeren Peripherie ist die gesuchte Nachtstunde.

Auch wird uns hierauf Abschnitt IV des zweiten Kapitels wieder zurückführen.

Alle die bisher zur Besprechung gelangten Methoden der Zeitmessung beruhen auf der Voraussetzung, daß der die Messung Vornehmende sich von dem Orte der Beobachtung nicht entfernt, sondern unverrückt auf demselben beharrt. Sowie wir eine Ortsveränderung zulassen, müssen wir auch dem Zeitbegriffe, wie wir ihn bisher gefaßt hatten, eine völlig neue Seite abgewinnen, indem wir die Gestalt der Erde mit in Betracht ziehen. *Ueberhaupt haben wir zur Zeit jenes Mass von Anschauungen und Kenntnissen erreicht, zu welchem wir unter der Annahme absoluter Stabilität des Beobachters zu gelangen vermochten, und es tritt damit die Notwendigkeit an uns heran, diese Beschränkung fallen zu lassen und zuzusehen, welche neue Wechselbeziehungen zwischen Himmel und Erde uns durch freie Bewegung auf der letzteren erschlossen werden können.*

XI. Thatsachen, welche sich bei Aenderung des Beobachtungsstandpunktes ergeben.

Zwei Richtungen sind es, welche sich uns bei unserer ersten Analyse der beim Heraustreten unter freien Himmel auf uns einwirkenden Sinneseindrücke als bevorzugt dargeboten haben: die *Nordsüdrichtung* und die *Ostwestrichtung.* Die Lokomotion, welche wir dem Beobachter gestatten müssen, wenn weitere Erfahrungen erworben werden sollen, wird nun auch dann am sichersten zu solchen verhelfen, wenn ersterer sich an eine der beiden Kardinalrichtungen hält und aus denselben niemals heraustritt. Beide Gattungen von Wahrnehmungen, die sich hierbei ergeben, sollen zunächst gesondert betrachtet und erst nachher zu einem Gesamtbilde vereinigt werden [1]).

[1]) Um die Ideen zu fixieren, nehmen wir an, daß die Wanderung von irgend einem Punkte Europas angetreten werde, für welchen Erdteil der sichtbare Himmelspol allbekanntermaßen eben der nördliche ist.

Die Sphaera obliqua und die Sphaera recta. Die Bewegung gehe fürs erste genau in der Richtung nach Süden vor sich. Dann bemerkt der Wanderer, daß der sichtbare Himmelspol sich mehr und mehr dem Horizonte nähert, die Polhöhe wird kleiner, die Poldistanz des Zenitalpunktes größer. Sterne, die ursprünglich zirkumpolar waren (s. Abschnitt III) gehen dieser ihrer Eigenschaft verlustig und treten in die Klasse der auf- und untergehenden Sterne ein, dafür aber sieht man am Südhorizonte Sterne auftauchen und einen kurzen Sichtbarkeitsbogen beschreiben, von deren Vorhandensein man früher nichts gewußt und geahnt hatte[1]). Die Winkel, welche die Kreise der täglichen Bewegung der Himmelskörper mit dem Gesichtskreise einschließen, sind zwar noch immer so beschaffen, daß der Südpunkt in dem spitzen, der Nordpunkt in dem stumpfen Winkelraume liegt, allein die Differenz in der Größe des stumpfen und spitzen Winkels wird eine immer geringere, beide nähern sich mehr und mehr rechten Winkeln. Es muß also, wenn die Bewegung unausgesetzt fortdauert, einmal der Fall eintreten, daß sämtliche Tageskreise *senkrecht* auf dem Horizonte stehen, und wenn dies der Fall ist, so ist für jeden dieser Tageskreise zu allen Zeiten des Jahres der Sichtbarkeitsbogen gleich dem Unsichtbarkeitsbogen, nämlich jeder dieser Bogen ein Halbkreis. Um in kurzen Worten den Gegensatz des gewöhnlichen Zustandes gegen den Grenzfall zu kennzeichnen, nennt man denjenigen Anblick des Himmels, welcher sich zuerst längere Zeit hindurch dargeboten hatte, die *Sphaera*

---

[1]) Die ersten Europäer, welche, nicht mit den erforderlichen wissenschaftlichen Kenntnissen ausgerüstet, der Sphaera recta nahe kamen, waren durch die von derselben dargebotenen Phänomene, so natürlich sie auch einem mit der Kugelgestalt der Erde Vertrauten erscheinen müssen, aufs äußerste überrascht. So konnte Marco Polo auf seiner Rückreise aus China gar nicht recht begreifen, daß im nördlichen Sumátra der Polarstern dem Auge entschwinde (Ruge, Geschichte des Zeitalters der Entdeckungen, Berlin 1881. S. 69), und die ersten Portugiesen, welche die Linie überschritten, störte es gar sehr, daß der Südhalbkugel ein solcher „Polarstern“ überhaupt fehlt.

obliqua und denjenigen, in welchen diese schließlich übergegangen ist, die *Sphaera recta* [1]). Für letztere also geht

Fig. 49a.

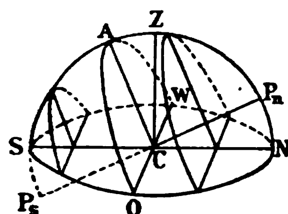


Fig. 49b.

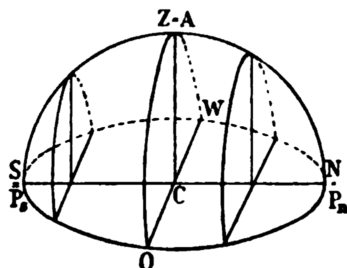
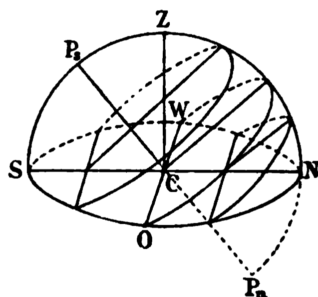


Fig. 49c.



der Himmelsäquator durch das Zenit, der Nordpol ist mit dem Nordpunkte des Horizontes zuzammengefallen,

---

[1]) Die Lehre von den verschiedenen Sphären ist zuerst in dem uns aus der Einleitung bekannten Büchlein des Autolycus „Ueber die bewegte Sphäre" entwickelt worden (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 113). In späterer Zeit begründete die bezüglichen Sätze sehr ausführlich das bis ins 17. Jahrhundert für alle astronomischen Hochschulvorträge tonangebende Lehrbuch des Engländers Sacrobosco, welches zu Ende des 13. Säkulums niedergeschrieben ward.

und ebenso muß, da ja die beiden Pole einen Winkelabstand von 180° haben, der bislang unsichtbare Südpol jetzt im Südpunkte des Horizontes liegen. So wie wir in der That auch nur um ein weniges unseren Weg in der bisherigen Richtung fortsetzen, verwandelt sich die Sphaera recta wieder in eine *Sphaera obliqua*, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt die spitzen Neigungswinkel der Tageskreise sich gegen Norden, ihre stumpfen Supplementarwinkel sich gegen Süden öffnen. Der Nordpol ist unter den Horizont hinabgetaucht und völlig unsichtbar geworden, der Südpol dagegen hat eine gewisse Polhöhe erreicht, und während unter der Herrschaft der Sphaera recta es weder Zirkumpolarsterne noch auch unsichtbar verbleibende Sterne, sondern einzig und allein auf- und untergehende Sterne gab, hat sich jetzt bereits wieder um den Südpol herum eine zirkumpolare Kalotte herausgebildet, und gewisse Sterne, die vor Erreichung der Sphaera recta wenigstens noch mit einem kurzen Sichtbarkeitsbogen in die Erscheinung traten, sind jetzt gänzlich unsichtbar geworden. Alle diese Erscheinungen steigern sich, je weiter die Reise nach Süden fortgesetzt wird, und einmal muß ein Punkt erreicht werden, dessen Polhöhe genau dieselbe ist, welche beim Beginne der Wanderung beobachtet ward, nur daß jetzt der südliche und nicht mehr wie zuvor der nördliche Pol des Himmels in Frage kommt. Unsere *Fig. 49* stellt in *a, b, c* uns die nördliche Sphaera obliqua, die Sphaera recta und die südliche Sphaera obliqua vor Augen [1]).

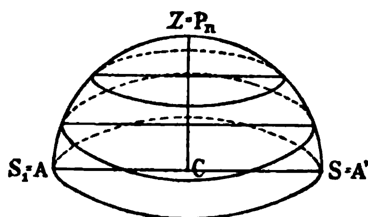
Die Sphaera parallela. Die bisherige Bewegung war eine von Nord nach Süd gerichtete. Wir denken uns unseren Wanderer nunmehr zu seinem Ausgangspunkte zurückgekehrt, und von hier aus soll er jetzt die umgekehrte, die südnördliche Richtung einschlagen. Da werden denn die Wahrnehmungen, die er macht, gerade den entgegengesetzten Charakter tragen wie vorhin. Die

---

[1]) Die in *Fig. 49* und *50* gebrauchten Buchstaben sind dieselben, deren wir uns bereits in *Fig. 31* bedient haben.

Polhöhe vergrößert sich, Sterne, welche früher als auf- und untergehend bekannt waren, werden zirkumpolar, die spitzen Winkel, welche die Tageskreise mit dem Horizonte einschließen, werden kleiner und kleiner. So weit allerdings, um eine wirkliche Koinzidenz des Nordpoles mit dem Zenit konstatieren zu können, ist zur Zeit noch kein Sterblicher nach Norden vorgedrungen, und ob es jemals möglich sein wird, das angedeutete Ziel zu erreichen, das muß als äußerst fraglich hingestellt werden[1]). Allein die aus den thatsächlich beobachteten Erscheinungen zu ziehende Schlußfolgerung zwingt uns die Ueberzeugung auf, daß beim weiteren Fortschreiten gegen Norden der Himmel uns schließlich einen Anblick darbieten müßte,

Fig. 50.



für welchen die Bezeichnung *Sphaera parallela* am Platze wäre. Jetzt sind Nordpol und Zenit identisch, wie es *Fig. 50* erkennen läßt, der Aequator ist mit dem Horizonte zusammengefallen, der obere Kulminationspunkt A des Aequators liegt im bisherigen Südpunkte S_1, der unter A' in dem diesem gegenüberliegenden Südpunkte; *der Begriff eines bestimmten Südpunktes ist jetzt illusorisch geworden, da jede von C ausgehende Linie nach Süden gerichtet ist.* Ebensowenig haben die Begriffe

---

[1]) Die höchste Polhöhe, welche bisher von Menschen gemessen wurde, ist diejenige, welche Lockwood und Brainard als Mitglieder der von Greely kommandierten, überaus unglücklich abgelaufenen Expedition am 13. Mai 1882 erreicht haben. Sie beträgt 83° 23′ 8″ (Greely, Drei Jahre im hohen Norden, deutsch von Teuscher, Jena 1887. S. 209).

Ost- und Westpunkt jetzt noch einen Sinn, denn dieselben dankten ihre Entstehung ja dem Auf- und Untergehen der Gestirne, und davon kann nicht mehr die Rede sein, denn sämtliche Sterne sind jetzt zirkumpolar geworden, Sonne und Mond, sobald dieselben überhaupt sichtbar werden, nicht ausgenommen. Der Erdort C ist so gelegen, daß für ihn die Sonne ein halbes Jahr sichtbar, ein anderes halbes Jahr unsichtbar bleibt [1]). Alle Tageskreise sind, wie auch aus der Figur zu ersehen, in Almukantarate übergegangen. Es ist nun einleuchtend, daß ebenso wie durch das ununterbrochene Vorwärtsschreiten gegen Norden so auch durch das ununterbrochene Vorwärtsschreiten gegen Süden ein Punkt erreicht werden muß, der unter einer Sphaera parallela gelegen ist, und für den völlig die gleichen Umstände bestehen müssen, nur daß diesmal der Südpol des Himmels ins Zenit hineingerückt und jede vom Standpunkte des Beobachters nach irgend einem Punkte des Gesichtskreises gezogene Grade eine Nordlinie ist. Fassen wir also all das Gesagte zusammen, so können wir die gewonnenen Erkenntnisse in einem einzigen Satze verdichten:

Ein Beobachter, der, ohne die für seinen ursprünglichen Standort gezogene Mittagslinie zu verlassen, stets in derselben Richtung weiter wandert, gelangt endlich zu seinem Ausgangspunkte zurück [2]) *und hat während dessen zweimal*

---

[1]) Das Wesen der Sphaera parallela hatten doch schon viele Geographen des Mittelalters richtig erfaßt, obwohl noch zu Columbus' Zeiten die Lehre von der Kugelgestalt der Erde vielen ein leeres, unverstandenes Dogma war. So finden wir bei einem Vertreter der höfischen, didaktischen Poesie (s. Doberentz, Die Erd- und Völkerkunde in der Weltchronik des Rudolf von Hohen-Ems, Zeitschr. f. deutsche Philologie, 13. Band. S. 195) folgende interessante Verse: „In Thylê den îseln ist naht ân alle underfrist sechs mânôt, daz halbe jâr; der ander teil ist tac für wâr."

[2]) Da noch kein Pol erreicht ward, so ist natürlich auch dieses Hinausgehen über die Pole nur ein fiktives, kein wirklich durchführbares, allein da jede von einem Punkte der Sphaera parallela aus gezogene grade Linie eine Mittagslinie ist, so müssen wir logisch die Dinge uns so zurechtlegen, wie es eben in unserer These geschah.

den Anblick der Sphaera recta, ebenso oft den Anblick der Sphaera parallela, für gewöhnlich aber immer den Anblick der Sphaera obliqua gehabt.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und erteilen unserem supponierten Beobachter die Freiheit, sich zunächst von seinem anfänglichen Platze aus nach einem beliebigen anderen Punkte zu begeben, dortselbst eine neue Mittagslinie zu ziehen und längs dieser seine Wanderung abermals anzutreten. Es zeigt sich dann, daß die von uns aufgestellte These auch in diesem Falle vollinhaltlich und unverändert ihre Giltigkeit beibehält, mag nun die neue Mittagslinie der anfänglichen benachbart oder sehr weit von ihr entfernt sein.

Es übrigt uns nun nur noch, unserer generellen Betrachtung der Verhältnisse auch die *genaue quantitative Ermittlung* nachfolgen zu lassen. Wir nehmen an, der Beobachter sei mit einem Apparate zur Messung linearer Distanzen auf der Erdoberfläche [1]) und zugleich mit einem Instrumente zur Messung von Bogen der Himmelskugel versehen und stelle mit beiden fortlaufende Beobachtungen an. Thut er dies, so erkennt er, daß die Polhöhen stets um gleiche Bogenstücke wachsen und abnehmen, je nachdem er um gleichviel in der Richtung nach Norden oder nach Süden sich vorwärts bewegt. Diese Erscheinung kann kausal nur durch die nachstehend formulierte Annahme erklärt werden:

Die konstante Krümmung der Erdoberfläche. *Die Erdoberfläche ist keine Ebene, sondern eine gekrümmte und zwar eine in dem Sinne gekrümmte Fläche, dass jede Kurve, zu der konsekutive Mittagslinien als Tangenten gehören, eine*

---

[1]) Sofern einer solchen Messung voller wissenschaftlicher Wert zuerkannt werden soll, muß dieselbe mit Meßschnüren und unter Beobachtung der weiter unten näher zu erörternden Vorsichtsmaßregeln durchgeführt sein. Die Richtigkeit unserer These würde jedoch schon bei Anwendung der gewöhnlichen *Schrittzähler* oder *Hodometer* deutlich genug hervortreten; vgl. über diese schon dem Vitruvius bekannt gewesenen *Zahnradverbindungen* den Artikel von Muncke in der zweiten Auflage des physikalischen Wörterbuches von Gehler (5. Band, 1. Abteilung, Leipzig 1829. S. 271 ff.).

überall gleichmässige Krümmung besitzt. Da solche Eigenschaft nur einer einzigen ebenen Kurve zukommt[1], *nämlich dem Kreise, so zeigt sich, dass jede Mittagslinie ein Kreis sein muss, deren von dem sichtbaren Horizonte begrenztes Stück nur der Grösse des Radius halber den Eindruck der Gradlinigkeit hervorruft. Täuschung ist nicht minder, dass uns die vom Gesichtskreise eingeschlossene Fläche als eine ebene erscheint, während sie doch in Wahrheit einen allerdings sehr kleinen Teil einer gekrümmten Fläche darstellt*[2].

Welcher Art diese Fläche ist, läßt sich durch das bisher angesammelte Beobachtungsmaterial noch nicht entscheiden; nur eine bestimmte Eigenschaft können wir jetzt schon deutlich erkennen, und zwar ist es diese:

Die Erdoberfläche ist in der Nordsüdrichtung eine stetig gekrümmte.

II. Unserem Programme gemäß wenden wir uns jetzt der Ostwestrichtung zu. Abermals begeben wir uns auf Reisen, indem wir uns nur in einer zur Mittagslinie senkrechten Richtung von dieser entfernen. Das aber, worauf wir jetzt unser Augenmerk richten, das sind die Auf- und Untergänge der Himmelskörper.

Wir wählen also einen beliebigen Stern aus und bestimmen mittelst unserer Uhr, daß die Aufgangszeit desselben für unseren Ausgangsort $= t_1^h$, seine Untergangszeit $= t_2^h$ ist. Nachdem wir gegen Westen eine Strecke von l Längeneinheiten zurückgelegt haben, wiederholen wir unsere Beobachtung und bemerken, daß der Stern später auf- und untergeht; seine Aufgangszeit ist jetzt $= (t_1 + T)^h$, seine Untergangszeit $= (t_2 + T)^h$, so daß

[1]) Außer dem Kreise (und der eine Entartung desselben darstellenden graden Linie) hat nur die cylindrische Schraubenlinie die Eigenschaft, daß mit dem Zirkel darauf gleiche Bogen abgemessen werden können.

[2]) Wegen der Krümmung der Erde bewegt sich beim Wandern auf derseben anscheinend der Pol — dieser Satz ist so einfach, daß eine angeblich wissenschaftliche Bekämpfung desselben kaum denkbar erscheint. Daß trotzdem der Philosoph Patricius (1529—93) eine solche Bekämpfung versuchte, bezeugen Rixner und Siber (Leben und Lehrmeinungen berühmter Physiker, 4. Heft, Sulzbach 1823. S. 155).

also die zum Durchlaufen des Sichtbarkeitsbogens benötigte Zeit ($t_2 - t_1 = t_2 + T - t_1 - T$) dieselbe geblieben ist. Nachdem in derselben Richtung ein Weg von nl Längeneinheiten gemacht ist, zeigt die Uhr beim Aufgange des Sternes auf $(t_1 + nT)^h$, beim Untergange auf $(t_2 + nT)^h$. Genau dasselbe tritt ein, wenn wir vom ursprünglichen Punkte aus uns gegen Osten bewegen, nur ist alsdann $(+T)$ durch $(-T)$ zu ersetzen, die Termine des Auf- und Unterganges verfrühen sich in stets gleich bleibender Weise. Da wir nun aber wissen, daß Zeit- und Bogenmaß äquivalente Dinge sind, daß gleichen Bogen am Firmamente gleiche Zeiten und umgekehrt entsprechen, so drängen unsere Wahrnehmungen uns offenbar zu dem folgenden Schlusse:

Die Erdoberfläche ist auch in der Ostwestrichtung eine stetig gekrümmte.

Die beiden Erfahrungssätze über die Krümmung der von uns bewohnten Fläche haben wir nun miteinander in Einklang zu bringen. Das soll die Aufgabe des nächstfolgenden Abschnittes sein.

XII. Die Erde eine frei schwebende Kugel; primitive Methoden, ihre Grösse zu messen.

Wäre die Erde nur längs einer bestimmten Richtung gleichförmig gekrümmt, so würde sich dieselbe als ein Rotationscylinder auffassen lassen, der in sehr großer Entfernung[1]) von der Himmelskugel in deren Innerem sich befände, und zwar fiele die Achse des Cylinders mit der Ostwestrichtung zusammen, wenn bloß eine gleichmäßige Krümmung in der Nordsüdlinie vorhanden wäre. Die

[1]) Wenn nämlich diese Entfernung keine sehr große wäre, so müßte sich bei Verlegung des Beobachtungsplatzes der Umstand geltend machen, daß alle zur Achse des Cylinders senkrecht gelegten Schnitte kongruente Kreise liefern, während eine zur Ebene eines Hauptkreises parallel gelegte Ebene aus der Kugel nicht mehr einen Hauptkreis, sondern einen mit zunehmender Entfernung stetig abnehmenden kleinen Kreis ausschneidet.

einzige Fläche dagegen, welche für jeden ihrer Punkte eine nach zwei aufeinander senkrecht stehenden Fortschreitungsrichtungen gleichmäßige Krümmung besitzt, ist der Stereometrie zufolge eine Kugel, und wir können sonach unsere Erfahrungen nur dann richtig deuten, wenn wir den Satz aufstellen[1]):

Die Erde als Kugel erkannt. *Die Erde ist eine Kugel, welche, konzentrisch zu der Himmelskugel, von dieser allseitig umschlossen wird und frei in ihrem Inneren schwebt.*

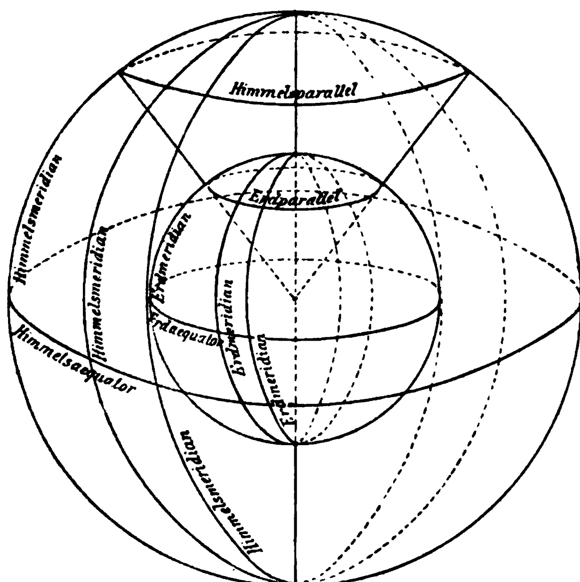
Aus dem über die Sphaera recta und parallela Beigebrachten erhellt aber weiter, daß die Ebene des Himmelsäquators aus der Erdkugel einen Kreis ausschneidet, den man folgerichtig als *Erdäquator* bezeichnen muß, und daß ebenso jedem Meridian der Himmelskugel ein mit ihm in gleicher Ebene gelegener *Erdmeridian* entsprechen muß. Legt man ferner durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt von Himmel und Erde als Spitze und durch irgend einen zum Aequator parallelen kleinen Kreis der Himmelskugel einen Kegel, so schneidet dessen Mantel aus der Erdkugel einen Kreis aus, der künftig *Parallelkreis* oder schlechtweg *Parallel* heißen soll. Der Reisende, von dem oben die Rede war, bewegte sich demgemäß zuerst auf einem Meridiane und nachher auf einem Parallelkreise; unter dieser Voraussetzung ist es selbstverständlich, daß zu gleichen Bogen auf der Erde, gemessen auf diesen Kreisen und im Linearmaße, stets auch gleiche Bogen an der Himmelskugel, gemessen im Zeit- oder Bogenmaße, gehörten. Alle unsere Wahrnehmungen sind also jetzt in

---

[1]) Eine völlig korrekte Herleitung dieser Thatsache aus den Erfahrungen, daß die Erde in zwei Kardinalrichtungen eine gleichmäßige Krümmung besitzt, haben wir zum erstenmale in der Litteratur angetroffen bei Deschales (Cursus seu Mundus mathematicus, 2. Band, Lyon 1690. S. 369 ff.). Auch in neueren Schriften wird auf den einzig exakten Beweis, anderen sogenannten Beweisen gegenüber, nicht immer der richtige Nachdruck gelegt; als mustergiltig darf, zumal auch nach der negativen Seite hin, die Darstellung gelten bei A. Pick (Die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie, Wien 1883. S. 96 ff.).

einfachster Weise aufgeklärt, und ein Blick auf *Fig. 51*, welche wohl ohne besondere Erläuterung für sich selber spricht, reicht hin, um darzuthun, daß diese Wahr-

Fig. 51.



nehmungen keine anderen als eben die beschriebenen gewesen sein können.

Neue Begriffsbestimmungen für den Horizont. Nur betreffs eines einzigen Punktes kann noch eine Erläuterung verlangt werden: *Welche Rolle spielt der Horizont der kugelförmigen Erde gegenüber?* Der Beobachter steht, das wissen wir jetzt, nicht auf einer ebenen, sondern auf einer gekrümmten Fläche; wie kommt es, daß er von dieser Krümmung anscheinend nicht das geringste bemerkt? Es wird sich bald finden, daß bei schärferer Anspannung der Sinnesthätigkeit die Erdkrümmung aller-

dings sinnenfällig werden kann, allein selbst wenn dem nicht so wäre, so ließe sich doch dem soeben angedeuteten Dilemma leicht begegnen durch folgende Erklärung:

Die von uns bislang als Horizont bezeichnete Kreislinie bestimmt eine Kreisfläche, deren Ebene nichts anderes als eine Tangentialebene der Erdkugel ist, und zwar fällt der Berührungspunkt mit dem augenblicklichen Standpunkte des Beobachters zusammen. Da aber, wie wir sehen werden, der Radius der Erdkugel ein ziemlich grosser, deren Krümmung sonach eine geringe ist [1]), *so weicht die Kugel von ihrer Berührungsebene in der Nachbarschaft des Berührungspunktes so wenig ab, dass unser Auge statt einer Kugelhaube nur eine ebene Fläche zu erblicken glaubt.*

Jeder Mensch besitzt sonach seinen eigenen Horizont, sein eigenes Zenit u. s. w. Während die Koordinatensysteme des Aequators und der Ekliptik als etwas der Himmelskugel fest Angehöriges zu betrachten sind, ändern die zum Systeme des Horizontes gehörigen Linien und Punkte mit jeder Fortbewegung des Beobachtenden selbst ihren Platz. Sofern jede geometrische Fläche unter einem doppelten Gesichtspunkte, nämlich als Punkt- oder als Ebenengebilde aufgefaßt werden kann, darf man auch sagen: *Die Erdkugel wird von den ihren sämtlichen Oberflächenpunkten zugehörigen Horizontalebenen eingehüllt.*

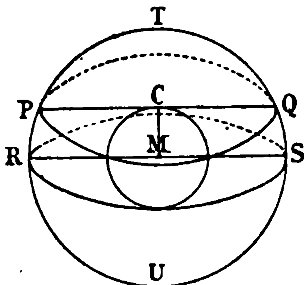
Allerdings scheint diese neue Definition des Wortes Horizont noch mit einem Widerspruche behaftet zu sein. Als wir nämlich in Abschnitt III den Horizontalkreis zuerst in die Betrachtung einführten, konstatierten wir zugleich, daß derselbe die Himmelskugel in zwei kongruente Halbkugeln zerteile. Wenn aber die Horizontalebene Berührungsebene einer zur Himmelskugel konzentrischen Kugel ist, dann kann (s. *Fig. 52*) von solcher Kongruenz nicht mehr die Rede sein. M ist hier der

---

[1]) Für jeden Kreis gilt (Baltzer, Die Elemente der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1870. S. 102) der Satz, daß seine Krümmung dem Halbmesser umgekehrt proportional ist, und da eine Kugelfläche in jedem Punkt unendlich viele kongruente Kreisschnitte ergibt, so kann dieser Satz unmittelbar auch auf sie ausgedehnt werden.

gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kugeln, C ein Punkt auf der Oberfläche der (kleineren) Erdkugel; wir legen an letztere durch C eine Berührungsebene, welche die (größere) Himmelskugel längs des Kreises PQ schneidet; eine durch M parallel zur vorigen Ebene gelegte Ebene schneidet dagegen die Himmelskugel längs des Hauptkreises RS, und da offenbar Halbkugel $RTS \equiv$ Halbkugel RUS ist, so muß Kalotte $PTQ <$ Kalotte PUQ sein. Dies führt uns denn zu einer neuen Begriffsbestimmung:

Fig. 52.



Die Berührungsebene, welche durch den Standpunkt des Beobachters an die Erdkugel gelegt wird, ist der scheinbare Horizont, jene Ebene dagegen, welche durch den Erdmittelpunkt parallel zu der vorigen Ebene gelegt gedacht werden kann, ist der wahre Horizont.

Ohne besondere geometrische Beweisführung sieht man nun unverzüglich ein, daß das Verhältnis

$$(\text{Halbkugel } RTS - \text{Kalotte } PTQ) : \text{Kugel } RTSU$$

um so kleiner wird, je größer, bei gleichbleibendem Erdradius CM, der Radius RM der Himmelskugel wird. Das Verhältnis $\frac{CM}{RM}$ ist nun in der That für gewöhnlich[1]) von Null so wenig verschieden, daß man ungescheut behaupten darf:

Für die ungemein überwiegende Anzahl der Probleme, welche in der mathematischen Geographie vorkommen können, braucht zwischen wahrem und scheinbarem Horizonte ein Unterschied nicht gemacht zu werden.

---

[1]) In Abschnitt I des zweiten Kapitels wird derjenigen Gattung von Aufgaben näher zu treten sein, bei denen die Vernachlässigung des Unterschiedes sich verbietet.

Damit ist die Kugelgestalt der Erde von jedem vernünftigerweise gegen sie zu erhebenden Einwande befreit und zum Fundamentalsatze der ganzen Geographie erhoben. Die vulgären Begriffe „oben“ und „unten“ erleiden damit eine grundstürzende Veränderung: *nach oben geht jede vom Erdmittelpunkte weg, nach unten jede auf den Erdmittelpunkt zu gerichtete Bewegung* [1]). Eine Fallbewegung kann unmöglich nach einem Orte hin streben, der vom Zentrum der Erde weiter entfernt wäre, als es der ursprüngliche Ort des fallenden Punktes gewesen ist, und damit widerlegt sich sofort das naive Bedenken mittelalterlicher Schriftsteller, die auf der „Unterseite“ der Erdkugel wohnenden Menschen liefen Gefahr, in den leeren Weltraum abzustürzen, wenn sie nicht besondere Hilfsmittel, sich anzuhalten, besäßen.

Der Einfluß der Konfiguration der Erdoberfläche. Berechtigter, wenn schon ebenfalls den Kern der Sache nicht treffend ist ein zweites Bedenken. Für die Wasserfläche läßt sich die Sphärizität leicht zugeben, das Festland aber scheint doch in seiner Kon-

[1]) Zur besseren Erklärung dieses Sachverhaltes pflegt man oft von einer Fiktion Gebrauch zu machen, welche gemeinhin — wir wissen nicht anzugeben, mit welchem Rechte — als das „Loch des Maupertuis“ bezeichnet wird, übrigens aber schon im 13. Jahrhundert von einem gewissen Omons (s. v. Raumer, Geschichte der Hohenstaufen und ihrer Zeit, 6. Band, Reutlingen 1829. S. 432) zu ganz demselben Zwecke vorgetragen wurde. Die Fragestellung ist diese: Wenn in der Richtung eines Durchmessers die Erde total durchbohrt würde und wenn es möglich wäre, daß ein Mensch hineinstiege, wie würde er auf der anderen Seite herauskommen. Die Antwort ist die, daß der hinabsteigende, übrigens aber von den im Inneren der Erde herrschenden Verhältnissen unbeeinflußt zu denkende Mensch, im Mittelpunkte des Erdkörpers angekommen, sich mittelst einer Drehung um 180° umwenden, in dieser neuen Position aufwärts steigen und mit dem Kopfe, nicht — wie behauptet werden wollte — mit den Füßen aus dem Schachte auftauchen würde. Ein hinabgeworfener Stein dagegen würde bis nahe an die Gegenseite gelangen, hierauf eine Anzahl immer kürzer werdender Längsschwingungen zu beiden Seiten des Mittelpunktes ausführen und schließlich in diesem Punkte zur Ruhe kommen.

figuration von Berg und Thal zu unregelmäßig zu sein, als daß man es mit einer geometrisch regelmäßigen Fläche vergleichen dürfte. Allein die höchsten Erhebungen über dem Meere sind doch so verschwindend klein gegenüber dem Halbmesser der Erdkugel, daß letztere durch derartige Irregularitäten ebensowenig ihren Charakter einbüßt, als dies einem gewöhnlichen Erdglobus durch den über seine Außenseite unregelmäßig verteilten Staub begegnet. Der höchste Berg der Erde, der Gaurisankar oder Mount Everest im Himálaya, ragt 8840 m über den Spiegel des Meeres empor [1]), der Erdradius dagegen, nach den in den folgenden Abschnitten zu kennzeichnenden genaueren Methoden berechnet, kann 6370000 m gleich gesetzt werden, so daß also das Verhältnis der größten Berghöhe zum Erdhalbmesser = 221 : 159250 oder = 1 : 720 gesetzt werden kann. Ein Sandkörnchen, auf einen Schulglobus von einem halben Meter Durchmesser gelegt, wird dessen reine Kugelform in höherem Maße beeinträchtigen, als der Gaurisankar die Erdkugel deformiert [2]).

Die Exzentrizitätshypothese des Mittelalters. Die Astronomen und Geographen des Mittelalters erkannten die im vorstehenden erörterte Thatsache ausnahmslos an [3]),

---

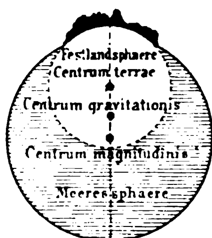
[1]) H. Wagner, H. Guthes Lehrbuch der Geographie, 5. Auflage, Hannover 1882. S. 443.

[2]) Wie klar bereits die Alten über den Sachverhalt dachten, ersehen wir u. a. aus einer interessanten Stelle in dem von Theon Smyrnäus (um 150 n. Chr.) zu den Schriften Platons verfaßten mathematischen Kommentar (ed. Hiller, Leipzig 1878. S. 125; vgl. auch Künßberg, Ueber eine mathematisch-geographische Stelle bei Theon, Bl. f. d. bayer. Gymnasialwesen, 20. Band. S. 368 ff.). Theon denkt sich auf die Erde einen „Berg“ von gleichfalls kugelförmiger Gestalt aufgesetzt und rechnet aus, daß sich dessen kubischer Inhalt zu demjenigen der Erdkugel wie 1 : 516 Milliarden verhalte, wenn man dem Berge die gewiß nicht geringe Höhe von 10 Stadien zuteile.

[3]) Es fehlt in der Litteratur nicht an hierher gehörigen Aeußerungen. So sagt z. B. Mohammed der Chowaresmier, einer der ersten arabischen Mathematiker, nach dem Berichte eines späteren Kompilators (Zakarija ben Mohammed ben Mahmûd el-Kazwinis Kosmographie, deutsch von Ethé, 1. Halb-

dagegen verführte ihre Neigung zu Absonderlichkeiten sie dazu, an der Lehre von der sphärischen Gestalt der Erde eine vermeintliche Korrektion anzubringen, welche sich dann später wieder nur mit Schwierigkeiten beseitigen ließ. Man kann den durch Jahrhunderte mit äußerster Zähigkeit festgehaltenen Irrtum auf die Form der folgenden These bringen: *Die Meeresfläche kann als absolut, das Festland wenigstens als angenähert sphärisch betrachtet werden, allein der Mittelpunkt der Wasserkugel ist ein anderer als der der Erdkugel, und der Gesamtschwerpunkt der Erde fällt mit keinem der beiden erwähnten Punkte zusammen* [1]. Diese Irrlehre, von deren Wesen uns *Fig. 53*

Fig. 53.



band, Leipzig 1868. S. 297) wörtlich folgendes: „Die Erde liegt in der Mitte des Himmels; und unter der Mitte ist in Wirklichkeit das Untere zu verstehen; sie ist kreisrund und mit Unebenheiten erfüllt, hinsichtlich der vorspringenden Berge und der sich in die Erde vertiefenden Niederungen. Das aber bringt sie nicht aus der Sphärenform heraus, wenn man ihre Gesamtheit in Rechnung bringt. Die Größenverhältnisse der Berge, wenn sie auch hoch emporragen, sind winzig klein im Verhältnis zu der Sphäre der Erde . . ."

[1]) Die älteren Scholastiker, Albertus Magnus, Wilhelm von Conches u. a. scheinen von der offenbar aus mißverstandenen Aeußerungen patristischer Autoren hervorgegangenen Irrlehre keine besondere Notiz genommen zu haben, dagegen begegnet sie uns schon im „Tresoro" des der Mitte des 13. Jahrhunderts angehörenden Brunetto Latini, und zur Zeit Dante Alighieris hatte sie sich bereits ein großes Publikum erobert. Die weiteren Schicksale der sonderbaren Doktrin sucht nach den Quellen darzustellen des Verf. Monographie „Aeltere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes durch Wassermassen" (Halle 1878). Der erwähnte große Dichter soll zuerst in seiner Schrift „De aqua et terra" entschieden Stellung genommen haben gegen die Exzentrizitätshypothese; wenigstens ist dies die allgemeine, allerdings unlängst durch Scartazzini angefochtene Ansicht (vgl. Wilh. Schmidt, Ueber Dantes Stellung in der Geschichte der Kosmographie, Graz 1876). Nachhaltige Folgen hat Dante durch seine Polemik keinesfalls erzielt, denn seitdem

einen Begriff zu geben versucht, bedarf heutzutage wohl keiner so eingehenden Bekämpfung mehr, als sie ihr von dem großen Coppernicus zu teil wurde, und auch daran erweist die Sonderbarkeit der ganzen Anschauungsweise sich aufs deutlichste, daß wir uns in die von Coppernicus vorgebrachten Argumente [1]) kaum recht hineinzudenken vermögen. —

Minderwertige Beweise für die Erdrundung. Der Erfahrungsbeweis für die sphärische Krümmung der Erdoberfläche, welchen wir an die Spitze dieses Abschnittes gestellt haben, ist zugleich der *einzige*, welcher auf *strenge Wissenschaftlichkeit* Anspruch machen kann. Freilich pflegen in den Lehrbüchern [2]) auch noch zahl-

---

gewann die Theorie erst noch eine weite Verbreitung, und daß sie die vernünftigere Ansicht der Alten zeitweise ganz verdrängt hatte, beweist ihre Aufnahme in die gangbaren Lehrbücher; so stammt obige Figur, einige Zuthaten nach anderen Schriftstellern abgerechnet, aus dem zu Beginn des 16. Jahrhunderts erschienenen encyklopädischen Werke des Gregor Reysch, genannt „Margaritha Philosophica“; vgl. Ruges oben citiertes Geschichtswerk, S. 97. Ueber einen von den beiden Theologen Paulus Burgensis und Mathäus Thoring mit entsprechenden Waffen betreffs der Exzentrizitätshypothese geführten und zunächst natürlich unentschieden gebliebenen Streit berichtet Zöckler: Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, 1. Abteilung, Gütersloh 1877. S. 471.

[1]) Nikolaus Coppernicus aus Thorn über die Kreisbewegungen der Weltkörper, deutsch von Menzzer, Thorn 1879. S. 12 ff. Das dritte Kapitel des ersten Buches hat die Ueberschrift: „Wie das Land mit dem Wasser *eine* Kugel ausmacht.“ Der Beweis geht von statischen Betrachtungen über die Gewichte der Land- und Wasserkugel aus, wobei freilich die falsche Ansicht der Scholastiker, daß die Erdoberfläche zu einem weit größeren Teile aus Land als aus Wasser bestehe, ebenfalls ihren Einfluß ausübt.

[2]) Eine eingehende Besprechung der wirklich oder angeblich für die Sphärizität sprechenden Gründe findet man, wie zu erwarten stand, bei Diesterweg (a. a. O., S. 41 ff.); noch schonungsloser wird das kritische Messer gehandhabt bei Birnbaum (Grundzüge der astronomischen Geographie, Leipzig 1852. S. 11 ff.). Unter allen Umständen muß es vermieden werden, die Fundamentalwahrheit der Geographie einfach dogmatisch hinzustellen; vgl.

reiche andere „Beweise“ eine Stelle zu finden, allein für überzeugend können dieselben ausnahmslos nicht gelten, sie wissen vielmehr nur das Theorem, zu dessen Erhärtung sie dienen sollen, mehr oder minder plausibel zu machen. Der Vollständigkeit halber soll diesen meist zu einer gewissen geschichtlichen Bedeutung gelangten Beweisversuchen immerhin eine Stelle eingeräumt werden.

I. Die Kreisgestalt des Erdschattens auf dem Monde. In seinem Buche „Vom Himmel“ sucht Aristoteles, dem übrigens zu seiner Ueberzeugung, daß der Erde Kugelgestalt zukomme, zunächst metaphysische Erwägungen verholfen hatten [1]), nachträglich diese Erkenntnis durch den Hinweis auf eine bei Mondfinsternissen auftretende Erscheinung zu vertiefen. Eine solche Eklipse entsteht, das werden wir weiter unten näher zu betrachten haben, wenn der Mond in den Schattenkegel tritt, der hinter der relativ kleinen und von der viel größeren Sonne bestrahlten Erde entstanden ist. Entweder ist die Verfinsterung total, dann sieht man den Mond überhaupt nicht mehr, oder sie ist partiell, dann grenzt sich der Durchschnitt des Kegels mit der voll erleuchteten Mondhalbkugel auf letzterer ab als krumme Linie. Aristoteles behauptet, diese Linie sei stets ein Kreis, und diese Gestalt könne die Durchdringungskurve nur dann besitzen, wenn der Schattenkegel ein durch Umdrehung entstandener, die Erde also eine vollkommene Kugel sei. Ganz richtig ist dies nicht, es wäre ja denkbar, daß die Erde ein allerdings krummflächig begrenzter Körper,

---

Jakob, Unsere Erde, Freiburg i. B. 1883. S. 38: „Die Thatsache der kugelähnlichen Gestalt der Erde braucht heute nicht mehr bewiesen zu werden.“

[1]) Aristoteles, De Coelo, lib. II, cap. 4; vgl. auch Windelband, Geschichte der alten Philosophie in J. Müllers „Handb. d. klass. Altertumswissenschaft“ (5. Band, 1. Abteilung, Nördlingen 1888. S. 271 ff.). Der Grundgedanke des Stagiriten war es, die Erde deshalb zur Kugel zu machen, weil dies die „vollkommenste“ Körperform im Sinne des von den gleichen Gesichtspunkten geleiteten Pythagoras sei, und weil nur dann ein Gleichgewichtszustand für die sämtlich nach dem Zentrum getriebenen Bestandteile der Erde bestehen könne.

jedoch von anderer Beschaffenheit wäre, und daß nur gerade dann, wenn die Verhältnisse für eine Mondfinsternis günstig gelagert sind, das an Sonne und Erde gelegte gemeinsame Berührungskonoid mit der letzteren einen Kreis gemein hätte [1]). Als durchschlagend kann man den aristotelischen Beweisgang somit nicht anerkennen, den Wert eines Wahrscheinlichkeitsbeweises hingegen mag man ihm mit gutem Gewissen lassen [2]); freilich ist auch die Kreisnatur der Schattenkurve nicht eben leicht durch Messung festzustellen.

II. Die Erdumseglungen. Nachdem die große Expedition des in spanischen Diensten stehenden, auf der Reise selbst gestorbenen Portugiesen Magalhaens den Nachweis erbracht hatte, daß man rund um die Erde herum zu dem ursprünglichen Ausgangspunkte zurückkehren könne, erblickte man vielfach in dieser Thatsache den vollgültigsten Beweis für die Kugelgestalt der Erde. Indessen erweist sich dieser Glaube bei einigermaßen gründlicherer Prüfung als hinfällig, denn daraus, daß die Erde umwandert werden kann, folgt doch zunächst nichts weiter als dieses: *Längs der im Einzelfalle durchmessenen Route besitzt die Erde eine geschlossene, einfach zusammenhängende* [3]), *von Ecken und Kanten freie Oberfläche.* Weiteres aber läßt sich logisch aus den sogenannten Weltumseglungen zunächst nicht schließen.

Die bisherigen Beweise hatten für Festland und

---

[1]) Im Beginne seines „Cosmographicus liber“ (1. Auflage, Landshut 1524) bildet deshalb Peter Apian Cylinder und Kegel als schattenwerfende Körper ab und zeigt so augenfällig, daß ein kreisförmiger Schatten auch von nicht sphärisch geformten Gebilden bewirkt zu werden vermöge.

[2]) Mit Recht sagt Munckes Artikel „Erde“ in dem mehrfach angeführten Phys. Lexikon (3. Band, Leipzig 1827. S. 835): „Nach dem Schatten könnte die Erde immerhin cylindrisch sein, obwohl es etwas gezwungen wäre, ihr allezeit die hierzu erforderliche Richtung beizulegen.“

[3]) Dieses Wort, zuerst in der modernen Funktionentheorie gebraucht, sagt aus, daß die in Rede stehende Fläche durch einen einzigen Schnitt in zwei Teile zerschnitten werden kann, welche gar keinen Zusammenhang mehr miteinander haben.

Wasserfläche gleichmäßige Geltung, diejenigen hingegen, welche nunmehr an die Reihe kommen, sehen vom Festlande gänzlich ab und zielen lediglich darauf ab, zu zeigen, daß jede größere Wasseransammlung auf der Erde eine sphärische Krümmung besitze.

III. Der hydrostatische Beweis des Archimedes. In der nur arabisch und nachher in mittelmäßiger lateinischer Bearbeitung auf uns gekommenen archimedischen Schrift „*De iis, quae in aqua vehuntur*" [1]), lautet der zweite Satz: Die freie Oberfläche einer jeden tropfbaren, in Ruhe verharrenden Flüssigkeit hat eine sphärische Gestalt, und zwar hat die betreffende Kugelfläche mit der Erde den gleichen Mittelpunkt. Anders ausgesprochen, heißt dies eben so viel: Sämtliche Wasserflächen der Erde sind in Wirklichkeit nur Teile einer einzigen großen Kugelfläche, und es ist somit wenigstens das Meer von einer sphärischen Oberfläche umschlossen.

IV. Die Begrenzung der Sichtbarkeitssphäre. Beobachtungen auf hoher See und sogar auf größeren Landseen [2]) haben schon seit alter Zeit ein Faktum erkennen lassen, das sich in Worte etwa folgendermaßen fassen läßt: *Bewegte Gegenstände, die sich vom Beobachter entfernen, werden allmählich in der Weise unsichtbar, dass ihre untersten Teile zuerst, ihre höchsten Teile zuletzt verschwinden, und ebenso treten Gegenstände, die sich dem Beobachter nähern, nicht plötzlich mit allen ihren Teilen zugleich in die Erscheinung, sondern zuerst werden die von der Erde entferntesten Teile und erst nach und nach auch die übrigen sichtbar.* Dadurch werden wir offenbar genötigt, unsere für das Wort Horizont gegebene und bereits spezialisierte Definition noch zu erweitern, und zwar im Sinne der folgenden Festsetzung [3]): „*Meeres-* oder *See-*

---

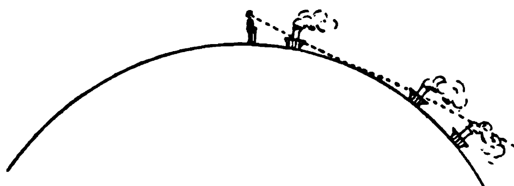
[1]) Die ersten Ausgaben dieser Schrift rühren her von Tartaglia (Venedig 1543) und von Commandino (Bologna 1565). Vgl. Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, vol. II, Leipzig 1881. S. 359 ff.

[2]) Ueber die Beobachtungen auf Seen berichtet u. a. J. Müller (Lehrbuch der kosmischen Physik, Braunschweig 1875. S. 47).

[3]) Weyer, Vorlesungen über nautische Astronomie, Kiel

horizont — in der niederdeutsch-nautischen Sprache *Kimm* — wird die Begrenzung genannt, welche die Gesichtslinien des Auges als Tangenten zur Erdoberfläche bilden, wo dieselbe als frei sichtbare Meeresfläche erscheint." Wäre die Erde eine Ebene, so würde dieselbe von den Gesichtslinien, die ihr parallel verliefen, erst in unendlicher Entfernung getroffen werden, und ein sich entfernendes Objekt würde dem Auge erst dann — dann aber auch mit einem Schlage und gleichzeitig mit allen seinen Bestandteilen — entschwinden, wenn die für ver-

Fig. 54.



schiedene Sehorgane auch verschiedene *Grenze der Sehweite* erreicht wäre. Unsere *Fig. 54* sucht die Erscheinung so wiederzugeben, wie sie sich vor den Augen eines aufmerksamen Beobachters abspielt, und man kann nicht leugnen, daß dadurch in der That die Kugelgestalt der Wasserfläche zwar nicht gerade bewiesen, aber doch einleuchtend und verständlich gemacht wird [1]). Man hat

1871. S. 3. Wir bemerken gleich hier, daß der Betrag der Kimm durch die atmosphärische Strahlenbrechung erheblich modifiziert werden kann, und auch in totale Reflexion geht die Brechung mitunter über, so daß, wie Biermann (Einige Beobachtungen über Spiegelkimmung, Deutsche meteorologische Zeitschrift, 4. Jahrgang. S. 186 ff.) durch Rechnung nachweist, aus dem gradlinigen Lichtstrahle ein parabolisch gekrümmter werden kann.

[1]) Nach Jagor und Peschel (s. dessen Physische Erdkunde, herausgegeben von Leipoldt, 1. Band, Leipzig 1884. S. 150) benützen die Seeräuber im hinterindischen Archipelagus die Wölbung der Erde, um sich hinter ihr vor den auf sie fahndenden Kreuzern zu verbergen. Sie wissen nämlich nach Maßgabe von *Fig. 54*, daß dann, wenn sie in ihren niedrigen Booten den Rauch

in neuester Zeit auch diesen Anschauungsprozess zu einem Messungsverfahren auszugestalten sich bemüht, und es ist keinem Zweifel unterworfen, daß man bei Anwendung der nötigen Vorsicht auf solche Weise ebensowohl die Theorie der terrestrischen Refraktion verbessern, als auch sogar für die Größe der Erdkrümmung befriedigende Werte erhalten kann [1]).

V. Die Spiegelung an einer Wasserfläche. In jedem Lehrbuche der Physik wird bewiesen, daß, sobald die spiegelnde Fläche eine ebene ist, das Spiegelbild mit dem Originale in allen Teilen übereinstimmen, ihm kongruent seid muß. Sowie jedoch der Spiegel gekrümmt ist, ändern sich natürlich die Verhältnisse. Uns interessiert hier der Fall, daß parallele Strahlen auf die Konvexseite eines sphärischen Spiegels auffallen, und wir fragen, wie bei solcher Voraussetzung das Bild ausfallen würde. Die Optik zeigt [2]), daß, wenn der leuchtende Gegenstand sehr weit von dem

---

des Kriegsdampfers erkennen, diese selbst vom Verdecke des Dampfschiffes aus noch nicht sichtbar sind; ihr eigener Meerhorizont umfaßt jene Rauchwolke, während sie selber noch nicht im Meerhorizonte ihrer Gegner sich befinden. So steuern sie einen zur Bewegungsrichtung des feindlichen Schiffes senkrechten Kurs und bringen sich in vielen Fällen in Sicherheit. Dem Hinweise auf die Abhängigkeit der Sichtbarkeitssphäre von der Erdrundung begegnen wir übrigens bereits in der „Historia naturalis" des älteren Plinius (lib. II, cap. 65). „Eadem est causa," sagt er dort, „propter quam e navibus terra non cernatur, e navium malis conspicua: ac procul recedente navigio, si quid, quod fulgeat, religetur in mali cacumine, paullatim descendere videatur atque postremo occultetur."

[1]) Eine sehr verdienstliche, diesem Zwecke dienende Beobachtungsreihe verdankt man F. Lingg. Derselbe visierte am Würmsee (im bayerischen Alpenvorlande) mehrere Wochen lang an jedem Tage in bestimmten Terminen nach einem am jenseitigen — in der Luftlinie etwa 4 Stunden entfernten — Ufer befindlichen Gebäude. Die mit der Erwärmung der Luftschichten variierende Refraktion bewirkte es zwar, daß nach und nach verschiedene Teile des Hauses im Gesichtsfelde erschienen, der Sockel aber blieb ein für allemal unsichtbar, weil er eben nicht mehr der durch die Krümmung der Seefläche bestimmten Sichtbarkeitssphäre angehörte.

[2]) Vgl. z. B. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 1. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1863. S. 662 ff.

krummen Spiegel entfernt ist, alsdann im Brennpunkte des letzteren ein verkleinertes Bild entsteht; daß dasselbe auch ein umgekehrtes ist, wird für einen Himmelskörper, der kein Unten und kein Oben besitzt, bedeutungslos. Wenn also in der That, wie wir allen bisherigen Aufschlüssen zufolge voraussetzen müssen, jede ausgedehnte Wasserfläche einen Konvexspiegel von freilich sehr großem Halbmesser darstellt, so wird man erwarten müssen, daß der Winkelwert des von einem See oder vom Meere zurückgestrahlten Sonnenbildes, gemessen etwa mit dem Spiegelsextanten, um ein geringes kleiner ausfallen werde als der direkt gemessene scheinbare Sonnendurchmesser, und zwar erscheint es elliptisch verzogen. Schon vor langer Zeit ist dieser an sich durchaus richtige Gedanke ausgesprochen worden, ohne daß freilich damals die Möglichkeit bestanden hätte, sich durch wirkliche Messung darüber ein Urteil zu bilden [1]). Allein in neuester Zeit hat Ch. Dufour am Genfer See eine Reihe von Beobachtungen über die Verzerrung des Sonnenbildes gemacht und sich überzeugt, daß die Abweichung sehr wohl noch innerhalb der solchen Messungen gezogenen Genauigkeitsgrenze liegt [2]). Freilich muß zu dem Ende der Seespiegel in vollkommener Ruhe sich befinden, allein dies trifft auch nicht ganz so selten zu, als man vielleicht anzunehmen geneigt wäre, und wenn Dufour — teils allein, teils in Verbindung mit Forel — die Glockentürme von Morges oder Montreux bestieg, vermochte er gar nicht selten brauch-

---

[1]) In seiner Vorrede zum „Hyperaspistes Tychonis" (Opera, ed. Frisch, 7. Band, Frankfurt a. M. und Erlangen 1868. S. 149) äußert Kepler, sein Gegner Claramontius sei wohl ein ganz guter Philosoph, mit seiner Mathematik aber könne es nicht zum besten bestellt sein, da dessen „Opuscula varia mathematica" (die posthume Ausgabe dieser Sammlung älterer Abhandlungen erfolgte zu Rom 1653) auch eine Schrift mit folgendem Titel enthielten: Ex inspectione imaginis subjecti per reflexionem ex aqua quiescente in vase investigare, quanta sit diameter terrae.

[2]) Dufour, De la déformation que les images produites sur de grandes étendues d'eau subissent par suite de la rondeur de la terre, Compt. rend. des travaux présent. à la 64. session de la soc. helv. des sc. nat., Genf 1881. S. 42 ff.

bare Messungen zu erhalten. „On voit,“ sagt er (a. a. O.), „la rondeur de la terre, aussi bien que l'on voit celle d'une boule que l'on tient à la main.“ Dufour war zu seiner Untersuchung dadurch veranlaßt worden, daß auch sonst gewisse, teilweise an die Fata Morgana erinnernde Spiegelerscheinungen, die man ab und zu auf dem Leman-See wahrnehmen kann, die Konvexität der Wasserfläche deutlich erkennen ließen; auch die vom See reflektierten Bilder der am Ufer stehenden Türme und anderer Objekte waren anders, als sie sein mußten, wenn die Oberfläche des Sees eine ebene wäre. Eine geometrische Erörterung der einschlägigen Verhältnisse, welche Dufour[1]) anstellte, klärte hierüber auf.

Methoden zur Messung der Erdgröße. Die nächste Frage, zu deren Stellung uns die jetzt erlangte Gewißheit von der Kugelgestalt der Erde Veranlassung gibt, ist nun offenbar diese: *Wie gross ist die Erdkugel?* Diese Frage zu beantworten, fällt gleichzeitig leicht und schwer. Man kann ohne allzu große Geistesanstrengung im Studierzimmer Methoden ersinnen, welche theoretisch ganz geeignet erscheinen zur Bestimmung der Größe des Erdhalbmessers, welche aber beim ersten Versuche wirklicher Anwendung der massenhaften Fehler wegen versagen, von denen sie sich nicht befreien lassen. Diese Methoden sind also, wie die Aufschrift dieses Abschnittes sie nennt, *primitive*, sie haben nur noch ein historisches Interesse, und deshalb wollen wir sie gleich hier vorwegnehmen, während wir die wirkliche, den modernen Anforderungen entsprechende Auflösung des Erdmessungsproblemes dem siebzehnten Abschnitte dieses Kapitels vorbehalten müssen. Immerhin zerfallen auch schon diese primitiven Methoden in zwei grundverschiedene Katego-

---

[1]) Dufour, De l'altération des images par réflexion sur la surface des eaux, Bull. de la soc. Vaud. des nat., vol. XIII. S. 303 ff. — C. Wolf und Ricco teilen (Compt. rend., vol. VII. S. 590 ff. S. 607 ff.) interessante Messungen an photographierten Reflexbildern der Sonnenscheibe mit.

rien, je nachdem nämlich die Größe des Erdhalbmessers *direkt* oder aber *auf dem Umwege über die vorher ermittelte Grösse eines Hauptkreisbogens*, d. h. also durch eine *Gradmessung*, gefunden werden soll.

I. Die Methode des Maurolycus. Auf diesen Vorschlag des bekannten sizilianischen Mathematikers hat in neuerer Zeit Riccardi unsere Aufmerksamkeit wieder hingelenkt [1]). M (*Fig. 54)* ist der Mittelpunkt der Erdkugel, A ein vom Meeresspiegel um die bekannte Strecke AC entfernter Punkt. Aus A sei an die Kugel die Tangente AD gelegt, zu deren Bestimmung Maurolycus einen eigens dazu von ihm erfundenen Distanzenmesser, das *Embadometer*, angewendet wissen wollte. Verlängert man dann AC über M hinaus, bis der Kreis um M zum zweitenmal in C' geschnitten wird, so ist CC' der gesuchte Durchmesser der Erdkugel, und man hat nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie [2])

Fig. 55.

$$AC(AC+CC') = \overline{AD}^2, \quad CC' = 2CM$$
$$= \frac{(AD+AC)(AD-AC)}{AC}.$$

Nach Riccardi haben verschiedene andere Gelehrte sich diesen Vorschlag angeeignet, so Belli [3]) und Giuntini [4]);

---

[1]) Riccardi, Sopra un antico metodo per determinare il semidiametro della terra, Mem. di Bologna, vol. VIII. S. 63 ff. Vgl. auch Napoli: Intorno alla vita ed ai lavori die Francesco Maurolico, Bull. di bibl. e di storia delle sc. mat. e fis., vol. IX. S. 1 ff. Schätzbare litterarische Nachrichten erteilt auch: Zanotti Bianco, Sopra una vecchia e poco nota misura del semidiametro terrestre, Atti della R. Accad. di Torino, 11. Mai 1884.

[2]) Euclidis Elementa, lib. III, propos. 36.

[3]) Belli, Libro del misurare colla vista, coll' ajuto del quadrante geometrico, senza bisogna di calcoli aritmetici, Venedig 1565.

[4]) Eine Analyse der astronomischen Arbeiten des Giuntini

andere, wie Casati, Clavius[1]) und Wright[2]) brachten die nahe liegende und auch völlig berechtigte Aenderung an, nicht eine Strecke, sondern, was ja natürlich mit weit größerer Schärfe geschehen kann, einen ihr gleichwertigen Winkel zu messen[3]). Dies leitet sofort über zu unserer zweiten Methode.

II. Die Methode der Messung der Horizontaldepression. Eine durch das Auge des beliebig über der Erdoberfläche erhabenen Beobachters gelegte Horizontalebene bildet mit jeder der Mantellinien des Tangentialkegels, welcher vom Auge als Spitze aus an die Erdkugel gelegt werden kann, einen gleich bleibenden Winkel, welcher *Depression des Horizontes* genannt wird. In obiger Figur sei HH' die zu AM senkrechte Horizontalebene, dann ist $\sphericalangle DAH = \alpha$ die erwähnte Depression, welche freilich, der Refraktion halber, kaum je mit der erforderlichen Genauigkeit sich bestimmen läßt. Ziehen wir dann den auf AD senkrecht stehenden Erdhalbmesser $MD = r$ und

---

oder Junctinus liefert Weidler (Historia astronomiae seu de ortu et progressibus astronomiae, Wittenberg 1741. S. 400).

[1]) Clavius, Opera mathematica, vol. II, Mainz 1612. Geometria practica. lib. VIII, propos. 34.

[2]) Ed. Wright, Certains Errors in Navigation detected and corrected, London 1610. S. 224 ff.

[3]) In neuester Zeit hat Koldewey (Die zweite deutsche Nordpolfahrt in den Jahren 1869 und 1870, 1. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1874. S. 628) eine Näherungsformel angegeben, welche es ermöglichen würde, versuchsweise wieder auf das Verfahren des Maurolycus zurückzugreifen. Koldewey setzt nämlich, indem er für die Strahlenbrechung einen Mittelwert zu Grunde legt, die Entfernung AD unserer Figur, in rheinländischen Fußen (1′ = 0,314 m) ausgedrückt, gleich 1,163 $\sqrt{AC}$. Führen wir überhaupt einen konstanten Wert p in unsere oben aufgestellte Formel ein, so wird

$$CC' = \frac{p^2 . AC - \overline{AC}^2}{AC} = p^2 - AC,$$

und damit ist ausgesprochen, daß die Näherungsformel sofort unbrauchbar wird, wenn h irgendwie größere Werte — also etwa bei Höhen über 150 m — annimmt. Da die Formel nicht algebraisch homogen ist, war etwas anderes von vornherein nicht zu erwarten.

bezeichnen mit h die Vertikalerhebung AC, so erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck MAD

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{MD}{AM} = \frac{r}{r+h},$$

$$r = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{h\cos\alpha}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Damit wäre also die Aufgabe gelöst, und in der That soll, wie Riccardi mitteilt, der bekannte Geodät Clarke auf diese Weise vom Gipfel des schottischen Berges Ben Newis aus einen ganz guten Näherungswert für die gesuchte Größe erhalten haben. Unsere Formel belehrt neben ihrem nächsten Zweck auch darüber, wie sich mit steigender Entfernung von der Erde die Ausdehnung des Gesichtskreises vergrößert; es ist alsdann eben α unbekannt, r und h dagegen sind bekannt. So wird die lineare Größe des Bogens CD in *Fig. 55* gleich

$$\frac{r\pi}{180}\,\text{arc}\cos\left(\frac{r}{r+h}\right).$$

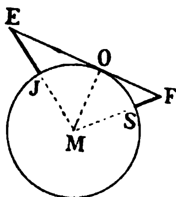
Hiernach läßt sich berechnen, ein wie großer Teil der Erdoberfläche von einem erhabenen Standpunkte, einem Turm, Berg, Luftballon aus überblickt werden kann [1]).

III. Die Methode des Ghetaldi. Dieselbe, von dem als Geometer seiner Zeit geachteten Dalmatiner Ghetaldi

[1]) Nähere Angaben siehe in H. Baumgartners Schrift „Der Horizont" (Berlin 1843), wo für verschiedene Höhen die „Kimmtiefe" tabellarisch zusammengestellt ist. Allgemeiner erörtert die einschlägigen Fragen, mit Rücksicht auf die bekannte Erzählung, daß der Schatten des Berges Athos den Marktplatz von Myrina auf Lemnos erreicht habe, Kästners „Weitere Ausführung der mathematischen Geographie" (Göttingen 1795. S. 459 ff.). — Eine nicht uninteressante Modifikation des oben beschriebenen Verfahrens ist nach Riccioli (Geographiae et hydrographiae libri duodecim, Bologna 1661. S. 163) von Dom. Cassini ersonnen und 1654 zu Bologna auf dem Turme Asinelli — warum gerade auf einem schiefen? — praktisch probiert worden. Er wählte *(Fig. 55)* auf AC einen zweiten Punkt E, dachte sich durch diesen die Horizontalebene hh' gelegt und maß dann für E die Horizontal-

ausgedacht [1]), wäre, wenn überhaupt durchführbar, die einfachste von allen, indessen ist keine Möglichkeit vorhanden, auf diesem Wege zu einem auch nur halbwegs befriedigenden Ergebnisse zu gelangen.

Fig. 56.



An zwei Punkten J und S der Erdkugel *(Fig. 56)*, durch welche in Verbindung mit dem Mittelpunkte M ein Hauptkreis letzterer bestimmt wird, sind Stäbe JE und SF von bekannten Längen d und g vertikal errichtet, und zwar sind die Punkte J und S so gewählt, daß ein in O befindlicher Beobachter gerade noch die Endpunkte E und F der beiden Stäbe erblickt. Wenn dies der Fall ist, so berührt die Grade EF die Erdkugel im Punkt O. Dann soll noch $EF = b$ durch Messung bekannt sein, und eben an dieser Forderung scheitert die Realisierbarkeit der ganzen Idee. Gesetzt aber, b wäre zu erhalten, so wäre die Berechnung des Erdradius $MO = MJ = MS$ eine leichte Sache. Wenn man nämlich $OE = x$, $OF = y$ setzt, so stehen zur Berechnung der drei Unbekannten die folgenden drei Gleichungen zur Verfügung [2]):

1. $x + y = b$; 2. $x^2 + r^2 = (r + d)^2$; 3. $y^2 + r^2 = (r + g)^2$;

---

depression $\sphericalangle\, hEG = \beta$. Wenn $AE = k$ bekannt ist und $EM = x$ gesetzt wird, so hat man $r = x \cos\beta = (x + k) \cos\alpha$, woraus sich

$$r = \frac{k \cos\alpha \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{k \cos\alpha \cos\beta}{2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

berechnet. Auch hierauf paßt freilich, was Deschales (a. a. O., S. 389) mit den bezeichnenden Worten ausdrückt: „Omnes modi terrestres huic vitio sunt obnoxii" — dem Fehler der Refraktion nämlich.

[1]) Vgl. Gelcich, Ueber den Vorschlag des Marino Ghetaldi, die Größe der Erde zu bestimmen, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-litter. Abteilung, 28. Jahrgang. S. 130 ff.

[2]) r soll, wie vorhin, so auch künftig immer, sofern nichts anderes bemerkt wird, den Erdhalbmesser anzeigen.

Subtrahiert man 3. von 2., so bleibt als Differenzgleichung

$$4.\ (x+y)(x-y)=2r(d-g)+d^2-g^2;$$

hieraus wird $(x-y)$ berechnet, und wenn man diesen Wert mit 1. kombiniert, so verbleiben uns für x und y die nachstehenden Werte:

$$x=b+\frac{(d-g)(2r+d+g)}{b};\quad y=b-\frac{(d-g)(2r+d+g)}{b}.$$

Je nachdem man nun x in 2. oder y in 3. einsetzt, ergibt sich für r der einer wesentlichen Vereinfachung nicht mehr fähige Wert

$$r=\frac{1}{2b^2d}[b^4-b^2d^2+2b^2(d-g)(2r+d+g) + (d-g)^2(2r+d+g)^2].$$

Die Berechnungsweise **Ghetaldis** ist etwas umständlicher als die hier gezeigte. Uebrigens ließe sich an dem ganzen Verfahren noch eine wirkliche Verbesserung anbringen. Denn wenn EF als Ganzes gemessen werden kann, so kann entschieden noch leichter entweder $OE=b_1$ oder $OF=b_2$ gemessen werden, und dann hätte man

$$r^2=(r+d)^2-b_1^2=(r+g)^2-b_2^2,$$

$$r=\frac{(b_1+d)(b_1-d)}{2b_1d}=\frac{(b_2+g)(b_2-g)}{2b_2g}.$$

Nunmehr wenden wir uns der oben bezeichneten zweiten Klasse von Erdmessungsmethoden zu. Der ihnen allen gemeinsame und, wie wir später sehen werden, der höchsten Verfeinerung fähige Grundsatz läßt sich dahin präzisieren: *Man stecke mittelst astronomischer Beobachtungen auf der Erdoberfläche einen Hauptkreisbogen gleich* γ^0 *ab, messe den Linearabstand* l *zwischen dem Anfangs- und Endpunkte des Bogens und bediene sich dann der Proportion*

$$360^0:\gamma^0=2r\pi:l,$$

woraus sich der Erdradius $r = \frac{180\, l}{\gamma\pi}$ *berechnet.* Es kommt nun lediglich darauf an, wie die Abgrenzung des Bogens γ im Einzelfalle erfolgen kann. Da man in früheren Zeiten Gewicht darauf legte, $\gamma = 1$ zu setzen, so nannte man diese Art der Messung eine *Gradmessung*, und dieser Name ist späterhin auf jedes korrekte Verfahren dieser Art, unbekümmert um die Größe von g, ausgedehnt worden. Wir lernen nunmehr die in der Geschichte zu einer gewissen Berühmtheit gelangten Manifestationen des Grundgedankens im einzelnen kennen.

IV. Die Methode des Eratosthenes. Der als Gelehrter in den verschiedensten Wissenszweigen hochgeschätzte Bibliothekar von Alexandria benützte eine ihm zufällig sich darbietende Thatsache, um dieselbe für die Zwecke einer Gradmessung zu verwerten [1]). Es war ihm gemeldet worden, daß am Tage des Sommersolstitiums in der damals wie heute an der Grenze Aethiopiens und des eigentlichen Aegyptens gelegenen Stadt Syene (Assuan) ein tiefer Brunnen bis zu seinem Grunde beschienen werde, und daraus zog er den richtigen Schluß, daß am fraglichen Tage die Sonne im Zenit dieser Stadt stehe. Alexandria, so glaubte er weiter annehmen zu dürfen, liegt mit Syene unter gleichem Meridiane, und wenn dem so war [2]), so ließ sich das durch *Fig. 57* gekennzeichnete

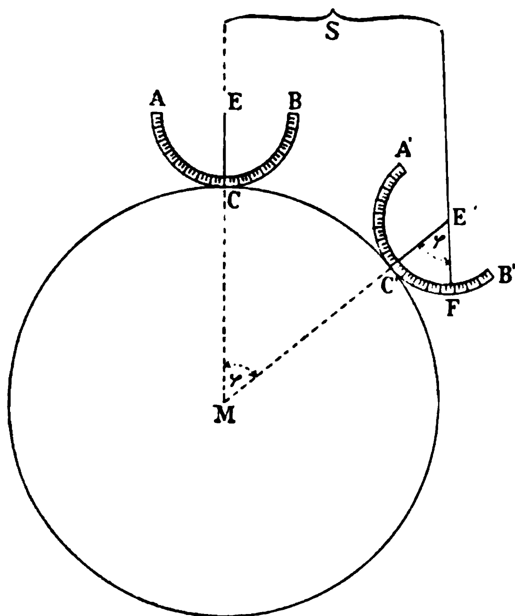
---

[1]) Für die eratosthenische Gradmessung möge man die folgenden Schriften und Abhandlungen zu Rate ziehen: Müllenhoff, Deutsche Altertumskunde, 1. Bd., Berlin 1880. S. 263 ff.; Sprenger, Zur Geschichte der Erdmessung im Altertum, Ausland, 1867. S. 1016 ff.; Abendroth, Darstellung und Kritik der ältesten Gradmessungen, Dresden 1866; Günther, Die Erdmessung des Eratosthenes, D. Rundschau f. Geogr. u. Statistik, 3. Jahrgang, S. 327 ff. Alle Quellenstellen sammelt und diskutiert mit kritischer Schärfe das verdienstliche Werk H. Bergers (Die geographischen Fragmente des Eratosthenes gesammelt, geordnet und besprochen. Leipzig 1880. S. 100 ff.).

[2]) Genau trifft diese Voraussetzung so wenig zu wie die andere, daß Syene am längsten Tage die Sonne gerade im Zenit habe. Vgl. Mädler, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit, 1. Band, Braunschweig 1853. S. 58.

Verfahren zur Messung der Bogendistanz beider Orte anwenden. C ist Syene, C' Alexandria, M der Erdmittelpunkt, der Kreis CC' ein Meridian. Sowohl in C wie in C' ist je ein Skaphion, eine hohle Halbkugel (ACB und $A'C'B'$), aufgestellt, in deren unterstem Punkte je ein Zeiger CE und $C'E'$ vertikal errichtet ist. Der Stand

Fig. 57.



der Sonne ist S; die Sonnenstrahlen sind so gut wie parallel, und zur Mittagszeit fällt die Strahlenrichtung mit CE zusammen, so daß, der Voraussetzung gemäß, CE gar keinen Schatten wirft. Dagegen wirft $C'E'$ einen solchen, und zwar ist, wenn der durch E' gehende Strahl den Boden des Skaphions in F trifft, CF der beschattete Bogen. Zieht man noch die Radien MC und MC', so ist (als Wechselwinkel) $\sphericalangle C'E'F = \varphi = \sphericalangle CMC'$,

und auf der Teilung des Viertelskreises $C'B'$ kann man also direkt den Meridianbogen CC' ablesen. Den Linearabstand CC' entnahm Eratosthenes den offiziellen Angaben der ägyptischen Landesvermessung, und so war er instand gesetzt, in die obige Proportion die erforderlichen Konstanten einzuführen. Der so für den Erdumfang berechnete Wert von 250000 — oder nach einer anderen Version 252000 — Stadien war so lange eine unverstandene Größe, als man sich über die dabei zu Grunde gelegte Maßeinheit im unklaren befand; die von Lepsius[1]) über das ägyptische Stadion gegebenen Aufschlüsse gestatten dagegen heute ein ziemlich sicheres Urteil, und es findet sich, daß der aus den verschiedensten Ursachen[2]) resultierende Gesamtfehler etwa 14% ausmacht — gewiß nicht allzu viel, wenn man sich vergegenwärtigt, daß es eben der erste Versuch, die Erde zu messen, war, durch den sich Eratosthenes einen Ehrenplatz unter den Geodäten und Geographen aller Zeiten gesichert hat.

V. Die Methode des Posidonius. Dieser Philosoph, der sich eingehend mit Astronomie beschäftigte[3]), griff auf eine ursprünglich von Kleomedes ausgesprochene Idee zurück und löste das Problem der Erdmessung in folgender formal unangreifbaren Weise *(Fig. 58)*. Hier bedeutet der innere Kreis einen Meridiandurchschnitt der Erdkugel, der äußere einen solchen der Himmelskugel, M den gemeinsamen Mittelpunkt. P und Q sind zwei demselben Meridiane angehörige Punkte der Erde, BB' und CC' resp. ihre scheinbaren, DD' und EE' resp. ihre wahren Ho-

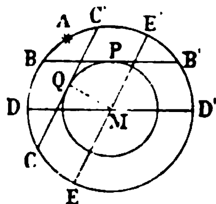
[1]) Lepsius, Das Stadium und die Gradmessung des Eratosthenes auf Grundlage der ägyptischen Maße, Zeitschr. f. ägypt. Sprache und Altertumskunde, 15. Jahrgang. S. 1 ff.

[2]) Neben den oben erwähnten Fehlerquellen war auch noch die vorhanden, daß die Längenangabe, erhalten durch die Addition der den einzelnen Distrikten des Nillandes zukommenden (meridionalen) Breiten einigermaßen von der Wahrheit abwich.

[3]) Vgl. dazu: Bunbury, History of the Geography of the Ancients, vol. I, London 1879. S. 93 ff.; Sepp, Zu Posidonius Rhodius, Bl. f. d. bayer. Gymnasialwesen, 18. Band. S. 397 ff.; Bake, Posidonii Rhodii reliquiae, Leyden 1810.

rizonte. An beiden Orten werde die Höhe gemessen, welche ein gewisser Stern A bei seiner Kulmination erreicht; diese Höhen sind AB und AC, allein da für einen Fixstern der Gegensatz zwischen wahrem und scheinbarem Horizonte gänzlich verschwindet, so kann man resp. auch die Bogen AD und AE als diese Kulminationshöhen betrachten. Da PM auf DD' und QM auf EE' senkrecht steht, so ist auch $\sphericalangle DME$, dessen Gradzahl mit derjenigen von arc DE übereinstimmt, gleich $\sphericalangle PMQ$, d. h. es ist der Meridionalabstand PQ im Bogenmaße bekannt, und wenn derselbe sonach auch in linearem Maße gegeben war, so konnte unverzüglich wieder die bekannte Proportionsrechnung stattfinden. Posidonius beobachtete den Stern Kanopus in Rhodus und verschaffte sich eine Korrespondenzbeobachtung der Kulminationshöhe desselben Sternes aus Alexandria; da aber die Angaben über die wirkliche Entfernung der Parallelkreise beider Städte sehr schwankend waren, so mußte er sich mit der Festsetzung begnügen, daß die Peripherie eines Erdmeridianes zwischen 180000 und 240000 Stadien enthalten sei [1]).

Fig. 58.



VI. Die Gradmessungsmethode vor Snellius. Die erste Gradmessung im engeren Sinne wurde von den Arabern ins Werk gesetzt [2]). Im Jahre 827 n. Chr. ordnete der

[1]) Die näheren Umstände der dem Posidonius zugeschriebenen Meridiangradbestimmung sind nicht eben in verläßlicher Weise festgestellt; vgl. darüber Berger (a. a. O., S. 105 ff.); Abendroth (a. a. O., S. 38 ff.); Schäfer, Philol. Anzeiger, 1872. S. 420 ff.).

[2]) Was wir über diese älteste *wirkliche* Gradmessung wissen, verdanken wir den Mitteilungen des Geographen Abulfeda und des Astronomen Al Fergani, vgl. Alfragani Rudimenta astronomica, cum J. de Regiomonte oratione introductoria, ed. Melanchthon, Nürnberg 1537. Blatt 8. Neuerdings hat dann Jordan (Die Gradmessung der Araber, 827 n. Chr., Zeitschr. f. Vermessungswesen, 18. Band. S. 100 ff.) eine Uebersetzung und

für Kunst und Wissenschaft begeisterte Kalife Al Mamun an, daß ein Meridiangrad in der Ebene Sindjar in Mesopotamien direkt bestimmt werden solle. Zwei Gesellschaften von Feldmessern gingen von einem gemeinsamen Anfangspunkte in dieser Ebene nach zwei verschiedenen Seiten fort, die eine nach Norden, die andere nach Süden; jede Gesellschaft war angewiesen, dann Halt zu machen, wenn die Bestimmung der Polhöhe darüber belehrt hatte, daß man vom Ausgangspunkte je um einen halben Grad sich entfernt hatte. Der so zurückgelegte Weg wurde durch Ausspannen von Meßleinen faktisch ausgemessen. So fand sich die Länge eines irdischen Meridiangrades $= 56^2/_3$ arabischen Meilen, die Länge des Erdumfanges sonach $= 120 . 170 = 30400$ solchen Meilen. Man hat mit Rücksicht auf eine Angabe des arabischen Kosmographen Demitschki[1]) diese Zahl mit 3326333 altfranzösischen Toisen identifiziert; eine neuere und zweifellos genauere Berechnung verdanken wir jedoch Jordan (s. o.), der den in der gleichen Zeit konstruierten Nilometer auf der Insel Rodah zur Vergleichung heranzog und nach dessen Einteilung die Länge eines Meridionalquadraten der alten arabischen Gradmessung zu 10644720 m bestimmte. Diese Zahl müßte dann als eine der Wahrheit überraschend nahe kommende betrachtet werden. — Während des Mittelalters ruhte, wenigstens im Abendlande, die Erdmessung ganz und gar; als aber im 16. Jahrhundert die Wissenschaften aufs neue erwachten, suchte ein französischer Gelehrter das Verfahren der Araber wieder hervor und gab ihm eine zeitgemäß sein sollende neue Gestalt, bei welcher freilich die Erzielung eines höheren

---

Interpretation des überlieferten Textes geliefert, und da er sich zugleich auf seine in Aegypten gewonnenen autoptischen Erfahrungen stützen durfte, so war es ihm auch vergönnt, der bislang noch wenig geklärten Frage nach der wahren Natur der altarabischen Maßeinheiten (Meile und Elle, ausgedrückt in Weizenkörnern) eine neue Seite abzugewinnen und eine vertrauenswerte Zahl für die Länge des Meridiangrades der Abbasiden zu erhalten.

[1]) Demitschki, Manuel de la cosmographie du moyen âge, ed. Mehren, Kopenhagen 1874. S. 3 ff.

Maßes von Präzision von vornherein ausgeschlossen war. Der Pariser Arzt Fernel, der uns über seine Manipulationen ein besonderes Werk [1]) hinterlassen hat, beobachtete mit einem Quadranten die Polhöhe in seinem Wohnorte, setzte sich dann in seinen Reisewagen und fuhr darin auf der nach Norden führenden Landstraße (Paris - Amiens) so weit, bis sich die frühere Polhöhe um einen vollen Grad vermehrt hatte. Am Wagen war ein hodometrisches Zählwerk (s. o.) angebracht, welches die Umdrehungen eines bestimmten Rades notierte, und so erhielt Fernel für den zurückgelegten Weg einen Näherungswert, mit dessen Hilfe er die Länge eines Meridiangrades auf 57070 Toisen zu berechnen befähigt wurde — „ein zum Verwundern gutes Resultat, da Fernels Verfahren wenigstens in Beziehung auf die Längenmessung weit hinter dem ihm als Muster dienenden der Araber zurückstand“ [2]).

VII. Die Triangulierungsmethode des Snellius. Den Uebergang von den als primitiv zu bezeichnenden Erdmessungsmethoden zu denjenigen, welche das große Problem im modernen Sinne aufzufassen und zu erledigen gestatten, bildet ganz naturgemäß die von dem Holländer Willebrord Snellius (1591—1626) erdachte Methode, die absolute Länge eines Meridiangrades nicht mehr direkt, sondern mittelst einer Reihe aneinander gehefteter Dreiecke, also mittelst einer sogenannten *Triangulierung* aufzufinden. Wenn wir das von ihm eingeschlagene Verfahren [3]) der unwesentlichen Elemente entkleiden und insbesondere darauf verzichten, die dreiunddreißig Dreiecke, welche er successive berechnete, nach Größe und

---

[1]) Fernel, Cosmotheoria seu de forma mundi et de corporibus coelestibus libri duo, Paris 1528.

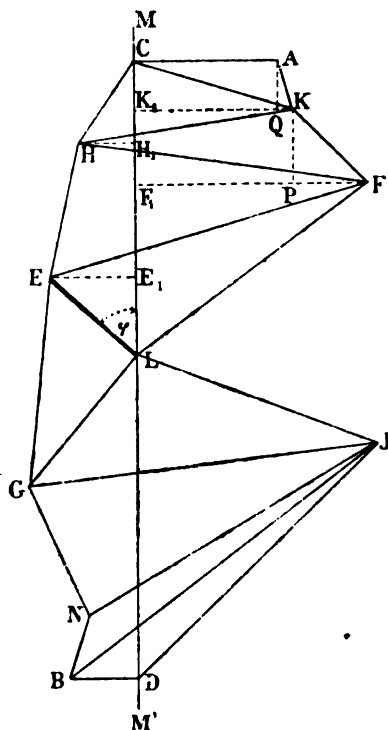
[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 169.

[3]) Dieses Verfahren bildet den Gegenstand eines ausführlichen, heute noch lesenswerten Werkes: Eratosthenes Batavus seu de terrae ambitus vera quantitate suscitatus, Leiden 1617. Eine Analyse des Inhaltes s. in dem schon öfter angeführten großen Handbuche des Riccioli (S. 122 ff.) und in Kästners Schrift „Weitere Ausführung der mathematischen Geographie“ (Göttingen 1795. S. 20 ff.).

Art getreulich wiederzugeben, so lassen sich die wesentlichen Punkte dieses Verfahrens, wie folgt, wiedergeben.

MM' (*Fig.* 59) sei der durch die Stadt Leyden (*L*) gehende Meridian, *A* sei mit der Stadt Alkmaar, *B* mit

Fig. 59.



der Stadt Bergen op zoom identisch, *AC* und *BD* seien die aus *A* und *B* auf den Leydener Meridian gefällten Lote. Von *L* aus ging unter bekanntem Winkel *ELM* die sogenannte Basis *EL*, eine nur kurze Strecke — bei Snellius 326 rheinländische Ruten —, die aber dafür mit aller nur möglichen Genauigkeit, d. h. direkt, ge-

messen sein will. Nachdem dies geschehen, wählte sich Snellius in der weiten holländischen Ebene eine Reihe von Fixpunkten (Kirchtürmen) aus und schaltete dieselben in folgender Weise feldmesserisch zwischen A und B ein. Aus E und L visierte er einerseits den Punkt F, andererseits den Punkt G an und maß $\sphericalangle ELF$, $\sphericalangle FEL$, $\sphericalangle ELG$, $\sphericalangle GEL$ und konnte alsdann die übrigen Seiten und Winkel der beiden Dreiecke ELF und ELG berechnen, da ihm ja eine Seite nebst den beiden anliegenden Winkeln bekannt war. Nunmehr durften EF und LG als neue Grundlinien von bekannter Länge gelten und es wurden in übereinstimmender Weise die Dreiecke EFH und GLJ berechnet, worauf HF und GJ an die Stelle der Grundlinien vorrückten. Es reihten sich an die Dreiecke HFK und GJN; über HK als Basis erhob sich das Dreieck HKC, über NJ als Basis das Dreieck NJB, und so ließen sich auch noch die beiden Schlußdreiecke CKA, NBJ und DJB den früheren rechnerisch angliedern. Endlich ist der gesuchte Meridianbogen $CD = CL + LD$, und diese beiden Einzelstrecken mußte Snellius ziemlich mühselig aus den allmählich zusammengekommenen Bestimmungsstücken berechnen, während heutzutage die sogenannte *Polygonometrie* [1]) eine abgekürzte Berechnung ermöglichen würde. — Um dies zu zeigen, beschränken wir uns auf das nördliche Polygon (Siebeneck) $ACHELFK$ unserer Figur und fällen, wie dies auch Snellius selber that, auf CL die Perpendikel KK_1, HH_1, FF_1, EE_1. Die Diagonale CL kann, was zugleich eine gute Kontrolle darbietet, auf zweierlei Art als Summe dargestellt werden; es ist nämlich

$$CL = CK_1 + K_1F_1 + F_1L = CH_1 + H_1E_1 + E_1L.$$

---

[1]) Die Polygonometrie als selbständiger Teil der rechnenden Geometrie wurde vor genau hundert Jahren fast gleichzeitig und in völliger gegenseitiger Unabhängigkeit begründet durch Lexell (De resolutione polygonorum rectilineorum, Novi Comm. Acad. Imp. Petrop., vol. XIX u. XX) und L'Huilier (Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilingues, Genf-Paris 1789). Systematische Darstellungen dieses Wissenszweiges findet man wohl in allen ausführlichen Werken über Trigonometrie.

Da ist zunächst $F_1L = LF \cos(L - \varphi)$, wenn φ den von der Basis LE mit der Mittagslinie eingeschlossenen spitzen $\sphericalangle ELM$ vorstellt, und wenn zugleich bestimmt wird, daß die großen Buchstaben ausschließlich Polygonalwinkel bezeichnen sollen. Fällen wir ferner von K auf FF_1 das Lot KP, so ist $K_1F_1 = KP = KF \cos(\sphericalangle PKF) = KF \cos(90^0 - \sphericalangle PFK) = KF \cos(90^0 - F + \sphericalangle F_1FL) = KF \cos(90^0 - F + 90^0 - \sphericalangle F_1LF) = KF \cos(180^0 - F - [L - \varphi]) = - KF \cos(F + L - \varphi)$. Um CK_1 zu erhalten, fällen wir das Lot AQ aus A auf KK_1 und haben $CK_1 = AK \cos(\sphericalangle QAK)$ und sodann $CK_1 = AK \cos(90^0 - \sphericalangle AKQ) = AK \cos(90^0 - K + \sphericalangle K_1KF) = AK \cos(90^0 - K + 180^0 - \sphericalangle KFF_1) = AK \cos(270^0 - K - F + \sphericalangle F_1FL) = AK \cos(270^0 - K - F + 90^0 - [L - \varphi])$; somit ist schließlich $CK_1 = AK \cos(K + F + L - \varphi)$. Auf der anderen Seite der Diagonale verhält sich offenbar alles analog, und wenn wir bedenken, daß ja cos selbst das doppelte Vorzeichen hat, je nachdem das Argument zwischen 0^0 und 90^0, resp. 270^0 und 360^0 oder aber zwischen 90^0 und 270^0 gelegen ist, so können wir sofort die folgende Doppelgleichung anschreiben:

$$CL = LF \cos(L - \varphi) + KF \cos(F + L - \varphi) + AF \cos(K + F + L - \varphi) = LE \cos\varphi + HE \cos(E + \varphi) + CH \cos(H + E + \varphi).$$

Das allgemeine Gesetz, nach welchem diese Reihenglieder fortschreiten würden, wenn die Eckenzahl der in Rede stehenden Vielecke eine beliebig große wäre, liegt auf der Hand, und es ist somit die gestellte Aufgabe gelöst, allerdings unter der nicht in aller Strenge zulässigen Voraussetzung, daß sämtliche in Betracht kommenden Dreiecke als eben angesehen werden dürfen[1]). Auf demselben holländischen Boden, auf welchem Snellius operierte, sind auch noch andere Meridiangradmessungen

---

[1]) Daß der von Snellius in dieser Hinsicht begangene Fehler kein beträchtlicher werden konnte, weist (a. a. O., S. 26 ff.) Kästner nach.

angestellt worden[1]), und auch unter den Engländern hat der niederländische Geometer einen glücklichen Nachahmer gefunden[2]).

VIII. Die Methode von Kepler. Mit dieser wollen wir die den großen Gradmessungsarbeiten der Picard-Cassinischen Epoche voraufgehenden Versuche der Erdmessung abschließen. Das von dem großen Kepler[3]) vorgeschlagene Verfahren ist nicht von ihm, wohl aber von Riccioli und Grimaldi[4]) praktisch angewendet worden und vermag, wie nachmals von Klose[5]) gezeigt

---

[1]) Snellius' nächster Nachfolger war der Kartograph Wilhelm Blaeu, in der Astronomie ein Schüler Tycho Brahes, der selbst nichts Schriftliches über seine Messung hinterlassen hat. Wir wissen jedoch aus anderweiten Berichten (G. Vossius, De universae matheseos natura et constitutione liber, Amsterdam 1650. S. 263; Picard, Voyage d'Uranibourg ou observations faites en Danemark, Paris 1680. S. 64), daß der von Blaeu trigonometrisch gemessene Bogen ein sehr langer war und sich vom Texel bis zur Maas erstreckte. Etwa hundert Jahre nach Snellius rekapitulierte Musschenbroek (Physicae experimentales et geometricae dissertationes, Wien-Leyden 1729. S. 1 ff.) die ganze Messungsarbeit des ersteren, indem er nur statt der unvollkommenen Diopterinstrumente einen guten Quadranten mit Fernrohr zur Anwendung brachte. Es fand sich, daß die Winkelmessungen des Snellius von einer staunenerregenden Genauigkeit gewesen waren.

[2]) Dies war Richard Norwood, der 1636 zu London sein nachher noch oft aufgelegtes Werk „The Seamans Practice" zum erstenmal herausgab und darin beschrieb, wie er die Polhöhen zu London und York bestimmt, hierauf die direkte Entfernung dieser beiden Städte mittelst Kette und Kompaß gemessen und so schließlich für einen Meridiangrad die Länge von 367196 englischen Fußen ermittelt habe.

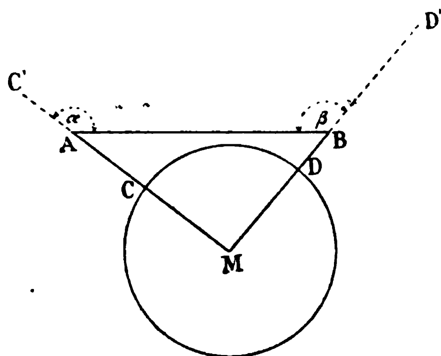
[3]) Diese Anregung Keplers befindet sich in dem trefflichen Abrisse der populären Astronomie, welcher den Titel „Epitome astronomiae Copernicanae" führt (Linz 1618. S. 28 ff.). Auch in einem Briefe an Herwart (vom 24. November 1607; Opera omnia, ed. Frisch, 5. Band. S. 43 ff.) spielt Kepler auf eine solche zwischen München und Freising wegen etwaiger Abweichung der Erde von der reinen Kugelform vorzunehmende Messung an.

[4]) Riccioli, a. a. O., S. 154 ff. Grimaldi hatte 1655 in Bologna Thesen über das Problem der Erdmessung verteidigt. Näheres über den Erfolg berichtet Wolf (Gesch. d. Astr., S. 386).

[5]) J. Müller, Kosm. Physik, S. 50 ff.

worden ist, bei der nötigen Vorsicht ganz gute Resultate zu liefern. Der Kreis um M *(Fig. 60)* repräsentiere wiederum einen Durchschnitt durch den Mittelpunkt der Erdkugel, A und B seien zwei in dem Hauptkreise der Papierebene jedoch verschieden weit vom Erdzentrum M entfernt gelegene Punkte; AC und BD seien die absoluten Vertikalerhebungen von A und B, und Bogen $CD = l$ werde als

Fig. 60.



bekannt vorausgesetzt. Ein zuerst in A, nachher in B weilender Beobachter messe an beiden Orten die Winkel $BAC' = \alpha$ und $ABD' = \beta$, welche die Visierlinie AB resp. mit den Zenitalrichtungen AC' und BD' bildet. Aus diesen beiden Winkeln folgt auch der Zentriwinkel AMB, und wir haben also, ähnlich wie bei Eratosthenes,

$$360^0 : (\alpha + \beta - 180^0) = 2r\pi : l,\ r = \frac{180\ l}{\pi(\alpha + \beta - 180)}.$$

Indem Klose (s. o.) für AC den Straßburger Münsterturm, für BD den Durlacher Wartturm setzte, fand er $2r\pi = 41\,480\,000$ m, was mit dem wirklichen Werte soweit stimmt, als es der große Refraktionsfehler erlaubt.

Hiermit sind alle diejenigen Erdmessungsmethoden gekennzeichnet, welche Varenius[1]) als *astronomisch und terrestrisch* einander gegenüberstellt[2]).

XIII. Konsequenzen der Lehre von der Kugelgestalt.

Nachdem wir uns von der kugelförmigen Gestalt der Erde überzeugt und zugleich wenigstens die Möglichkeit, auch die Größe dieser Kugel kennen zu lernen, eingesehen haben, erwächst uns die neue Aufgabe, auch den *Koordinatenbegriff* von der Himmelskugel auf die Erdkugel zu übertragen. An und für sich wäre keines der drei zölestischen Koordinatensysteme von der Uebertragung ausgeschlossen, indessen hat nur ein einziges praktische Bedeutung erhalten, nämlich dasjenige des *Aequators.*

Geographische Koordinaten. Die Einteilung der Erdoberfläche in ein Netz von Parallelkreisen und Meri-

---

[1]) Von Varenius stammt, soweit wir heute zu urteilen in der Lage sind, die erste umfassende und von modernem Geiste durchwehte Uebersicht der verschiedenen, für die Erdmessung ausgedachten Methoden. Wir selbst stützen uns bei unseren Angaben auf die dritte Ausgabe seines Hauptwerkes (Geographia generalis, in qua affectiones generales telluris explicantur, Amsterdam 1671). Dort (S. 33 ff.) schildert Varenius die Verfahrungsweisen des Eratosthenes und Posidonius als astronomische und stellt ihnen — Snellius' Reform war dem Varenius natürlich bereits als solche bekannt — die bei uns unter Nummer I, II und VIII beschriebenen mit folgenden Worten gegenüber: „Tres modi sunt terrestres, sine coelo et meridiana linea (?) opus perficientes.“

[2]) Einstweilen, bis in Abschnitt XVII die genaueren Zahlenangaben folgen können, wollen wir den Erdhalbmesser r gleich 6370 km setzen, daraus berechnet sich die Oberfläche der Erdkugel ($4r^2\pi$) gleich 509646000 qkm und der kubische Inhalt dieser Kugel $\left(\frac{4}{3}r^3\pi\right)$ gleich 1082148000000 ckm. Unter gewöhnlichen Verhältnissen genügt es, den Umfang eines Hauptkreises der Erde gleich 5400 geographischen Meilen zu setzen. Auf den Aequator- oder Meridiangrad entfallen dann 15 g. Meilen, und da eine solche Meile 7420 m 4 dm 4 cm zählt, so kann man mit großer Annäherung für die lineare Länge eines solchen Grades den aus mnemotechnischen Gründen sehr bequemen Wert von 111 km annehmen.

dianen ist uns aus dem vorigen Abschnitte bekannt; alle Meridiane durchschneiden sich in zwei diametral einander gegenüberliegenden Punkten, dem *nördlichen* und *südlichen Erdpole*, und die Verbindungslinie dieser beiden Pole, ein Teil der Himmelsachse, wird *Erdachse* genannt. Um einen beliebigen Punkt der Erde festzulegen [1]), legt man durch ihn einen Meridian und mißt das zwischen dem Punkte und dem Aequator gelegene Bogenstück; dies ist die *geographische Breite.* Das Bogenstück zwischen einem gewissen Fixpunkte und jenem Punkte, in welchem der durch den Ort gehende Meridian den Aequator durchschneidet, ist dieses Ortes *geographische Länge.* Während aber auf der Himmelskugel, wie wir sahen, der Nullpunkt für die Zählung der Abszissen sich von selbst darbietet, kann davon auf der Erde keine Rede sein, und es bleibt somit freiem Ermessen vorbehalten, den zweckmäßigsten *Anfangs-* oder *Nullmeridian* auszuwählen [2]). Nahezu sämtliche Kultur-

[1]) Die Einführung der üblichen terrestrischen Koordinatenbestimmung wird in der Regel dem Hipparch zugeschrieben (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 153), indessen ist hiergegen zu erinnern, daß eben dieser Astronom selbst aussprach, Eratosthenes habe zuerst den Vorteil der Ortsbestimmung durch Länge und Breite erkannt, freilich ohne zu einer entsprechenden Durchführung seiner eigenen Ideen zu gelangen. Vgl. Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch, Leipzig 1869.

[2]) Nur wenn die Erde das dreiachsige Ellipsoid wäre, was sie nach der Ansicht einiger Forscher sein sollte, zuverlässigeren Aufschlüssen zufolge (s. Abschnitt XX) aber nicht ist, wäre die Fixierung eines ersten Meridianes von der Natur vollzogen (Th. Schubert, Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Mém. de l'acad. imp. de St. Pétersbourg, [7] tome I. Nr. 6). Die Versuche, einen passenden Anfang der Zählung ausfindig zu machen, findet man gut gekennzeichnet bei den folgenden Autoren: E. Mayer. Die Geschichte des ersten Meridianes und der Zählung der geographischen Längen, Wien 1879; Bouthillier de Beaumont, Dissertation sur l'adoption d'un méridien initial unique, Nancy 1880; Borsari, Il meridiano iniziale e l'ora universale, L'Esplorazione, 1. Band. S. 146 ff.; Hennequin, Le premier méridien et l'heure universelle à la septième conférence internationale géodésique, Bull. de la soc. royale Belge de géogr., 1883. S. 751 ff.; Thury, Le méridien initial et l'heure universelle, Genf 1883; v. Bauernfeind-Günther-H. Wagner, Referat über den einheitlichen Meridian, Verhandl. d. IV. deutschen Geographentages, Berlin 1884.

völker sind übereingekommen, den *Meridian der englischen Hauptsternwarte Greenwich* als Anfangsmeridian anzuerkennen, alle in Betracht kommenden Fachmänner-

---

S. 43 ff. Die ältere griechische Zeit schwankte in der Wahl des Anfangskreises, aber seit Marinus dem Tyrier (1. Jahrhundert n. Chr.) galten die in der That den äußersten Grenzstein damaligen erdkundlichen Wissens repräsentierenden „glückseligen Inseln" (Canarien oder Azoren?) allgemein als Anfangspunkt der Zählung. Das Mittelalter zählte seine Längen teils von Jerusalem, teils von einer hypothetischen „Weltkuppel" Arin aus, und gegen den Ausgang des erwähnten Zeitraumes war die Meridiananarchie eine so große geworden, daß jeder Gelehrte einfach nach dem Mittagskreise seines Wohnortes oder einer beliebigen anderen Stadt rechnete, Regiomontan z. B. nach demjenigen von Nürnberg, Coppernicus nach demjenigen der Universitätsstadt Krakau u. s. w. Der Plan des Columbus, die Isogone Null des Atlantischen Ozeans zu wählen, ward zwar von der zur Ziehung einer „linea de demarcaceon" zwischen den spanischen und portugiesischen Erwerbungen einberufenen „Junta von Badajoz" aufgenommen, trägt aber für jeden mit dem Wesen des Erdmagnetismus oberflächlich Vertrauten den Stempel des Unmöglichen an der Stirn. Viel Erfolg hatte der 1634 zur Lösung der Meridianfrage von Richelieu niedergesetzte Ausschuß, denn der *Meridian von Ferro* galt seitdem bis in die neueste Zeit herein als der konventionelle Nullmeridian der zivilisierten Welt, allein die Geschicklichkeit des berühmten Kartenzeichners Delisle brachte es fertig, an Stelle jenes einen verschleierten Pariser Meridian einzuführen; man bestimmte nämlich die wahre Länge der Westspitze jener äußersten Canarieninsel nicht astronomisch, sondern dekretierte, daß die Längendifferenz zwischen Ferro und Paris 20° betrage. Von neueren, wohl nicht zu adoptierenden, aber immerhin mit Gründen gestützten Vorschlägen nennen wir nur einige: Thury (a. a. O.) spricht sich für die Cheopspyramide aus, Alexis sucht die für einen die Halbinsel Kamtschatka der Länge nach halbierenden Meridian sprechenden Gesichtspunkte zusammenzustellen (Le méridien initial de Kamtschatka, L'exploration, 1881. S. 239 ff.) und Bouthillier de Beaumont (vgl. auch neben der schon citierten Schrift dessen in Genf 1881 gedrucktes offenes Schreiben an den Geographenkongreß zu Venedig) tritt zu gunsten der Beringsstraße ein. Weitere Litteratur zur Meridianfrage: Naccari, Il meridiano unico e l'ora universale, Venedig 1886; H. v. Schwerin, Initialmeridianens Historia, Ymer (schwed. Zeitschrift) 1886, III. u. IV. Im Berichte über die Verhandlungen des dritten, in Venedig abgehaltenen geographischen Kongresses (2. Band, Rom 1884 ff.) sind einige Gutachten abgedruckt, welche zur Entscheidung über den ersten Meridian von Barnard, Hazen, Sandford Fleming und Chan-

gruppen, nämlich die Geographen[1]), Geodäten[2]) und Meteorologen[3]), haben sich in diesem Sinne ausgesprochen, und die allein noch widerstrebenden Franzosen werden sich unter dem Drucke der Verhältnisse wohl auch noch dieser internationalen Festsetzung anbequemen müssen. Dagegen herrscht noch nicht vollständige Einhelligkeit bezüglich der Zählung; die Amerikaner z. B. möchten dem Orte Greenwich nicht die Länge 0°, sondern die Länge 180° beigelegt wissen[4]), und man ist auch darüber noch nicht im klaren, ob, wie bisher, so auch künftig eine östliche und westliche Länge unterschieden *oder ob von 0° in bestimmtem Sinne bis zu 360° herumgezählt werden soll.* Letzteres wäre offenbar schon aus dem Grunde das Zweckdienlichste, weil die gesamte astronomische Analogie dafür spricht. Bezüglich der Breite dagegen läßt sich der Gegensatz zwischen positiver (nördlicher) und negativer (südlicher) Ordinate ebensowenig beseitigen, als es (s. Abschnitt VII) bei Höhe, Deklination oder astro-

---

courtois erstattet wurden. Wie man ältere Atlanten für den neuen Meridian aptieren könne, erörtert der gewiegte Kartograph A. Steinhauser (Der Greenwicher Meridian in der Schule, Zeitschrift f. d. Realschulen, 11. Jahrgang. S. 21 ff.).

[1]) In dieser Beziehung ist zu verweisen auf das oben erwähnte Referat, in welchem namentlich H. Wagner den Kartographen den Greenwichmeridian ans Herz legte, und in der That ist diese Anregung, wie fast alle seitdem erschienenen Atlanten beweisen, auf fruchtbaren Boden gefallen.

[2]) Hierüber gibt Auskunft v. Bauernfeind, Die allgemeine Konferenz der europäischen Gradmessung zu Rom im Oktober 1883, München 1884. S. 42 ff.

[3]) Neumayer, Bericht über die Verhandlungen des zweiten internationalen Meteorologenkongresses, Hamburg 1880. S. 7 ff.

[4]) Die amerikanischen Gelehrten, welche sich in diesem Sinne vernehmen liessen, waren Barnard, Sandford Fleming und Cleveland Abbe, aber auch der bekannte Astronom O. v. Struve (Sur le temps universel et sur le choix à cet effet d'un premier méridien, Bull. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, vol. XXVII. S. 50 ff.) pflichtet den Amerikanern bei. Die Sache steht in naher Beziehung zu der Frage der sogenannten Weltzeit, von welcher gleich nachher im Zusammenhange wird gesprochen werden müssen.

nomischer Breite angehen würde. Wir dürfen jetzt also den Satz aussprechen:

Die geographische Breite ist für die Erdkugel genau dasselbe, was die Deklination für die Himmelskugel ist, und in gleichem Sinne kann auch von einer terrestrischen Poldistanz gesprochen werden, die geographische Länge dagegen entspricht der Rektaszension oder dem Stundenwinkel, ohne mit einem dieser Abszissenwerte, angesichts der Verschiedenheit der Anfangspunkte der Zählung, identisch zu sein.

Was die Aufgabe, für einen gegebenen Erdort Länge und Breite zu ermitteln, anlangt, so kann dieselbe hier nicht gleichsam im Vorbeigehen erledigt, sie muß vielmehr einer gründlichen Erörterung vorbehalten werden, welche ihr denn auch im zweiten Kapitel zu teil werden soll. Für jetzt begnügen wir uns damit, zwei uns wohlbekannte Begriffe mit einander in Verbindung zu bringen, indem wir den Lehrsatz aufstellen und beweisen [1]):

Polhöhe und geographische Breite. *Die Polhöhe eines Punktes der Erdoberfläche ist gleich seiner geographischen Breite.* Wir sehen vor uns in *Fig. 61* einen Meridiandurchschnitt der Erde, deren Mittelpunkt M ist. AA' soll der Aequator, P der dem fraglichen Orte B benachbarte Erdpol sein, dann ist $\sphericalangle BMA$ gleich der geographischen Breite von B. Um die Polhöhe zu finden, lege man durch B eine berührende Ebene an die Kugel; HH' sei der Durchschnitt dieses Horizontes mit der Papierebene. Dann ziehe man BP'' parallel zu MP [2]), und es

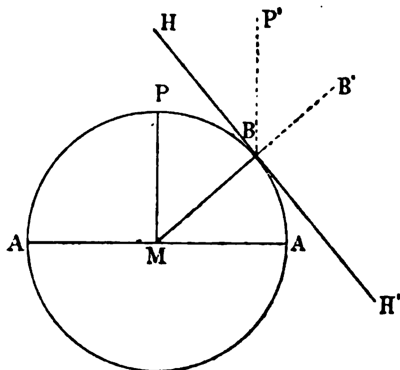
---

[1]) Die Thatsache selbst war natürlich schon den Griechen bekannt, da ja lediglich auf ihr die Möglichkeit einer geographischen Ortsbestimmung beruht, doch war die Art der Beweisführung keine so überzeugende, wie man es aus didaktischen Gründen wünschen muß; vgl. Liebknechts in der Einleitung öfter citiertes Werk, S. 162.

[2]) Es ist hier, da ja parallele Grade erst im Unendlichen konvergieren, stillschweigend vorausgesetzt, daß der Radius der Himmelssphäre ein unendlich großer sei. Ganz abgesehen von dem später zu erweisenden Faktum, daß wirklich die Entfernung der

wird $\sphericalangle HBP'$ die Polhöhe von B sein. Wenn BB' der verlängerte Erdhalbmesser MB ist, so hat man $\sphericalangle HBP' + \sphericalangle P'BB' = 90^0 = \sphericalangle BMA + \sphericalangle PMB$; $\sphericalangle P'BB'$ und $\sphericalangle PMB$ sind aber gleich als korrespondierende

Fig. 61.



Winkel an Parallelen, und somit ist auch $\sphericalangle HBP' = \sphericalangle BMA$, was zu beweisen war. Wir dürfen demgemäß jetzt die Worte Polhöhe und Breite als Synonyma gebrauchen, und es wird dies auch in der Folge sehr häufig der Abwechslung halber geschehen[1]).

Fixsterne von der Erde eine über alle unsere Begriffe hinausgehende ist, durfte obige Annahme allein schon deshalb gemacht werden, weil jener Radius von allem Anfang an als absolut unbestimmbar und willkürlich gegolten hat.

[1]) Die Identifizierung von Polhöhe und Breite gestattet die sofortige Lösung mancher Aufgabe der mathematischen Erdkunde. So erzählt z. B. der bayerische Reisende Ulrich Schmiedel — — wir verdanken diese Notiz dem Herausgeber des Schmiedelschen Reisejournales, Herrn Langmantel in München —, daß er den „Wagen" bei seiner Wanderung durch Brasilien, als er sich dem Meere näherte, zu seiner Freude plötzlich wieder erblickt habe. In welcher Gegend mag dies gewesen sein? Wenn wir annehmen, daß der fragliche Anblick in dem Momente eingetreten sei, in welchem der dem Nordpole des Himmels zunächst gelegene Stern des großen Bären gerade im Nordpunkte des Horizontes

Zeitgewinn und Zeitverlust beim Umwandern der Erde. Die Aequatorabszissen am Himmel durften, wie wir uns erinnern, mit gleichem Rechte in Bogen- und in Zeitmaß ausgedrückt werden, ein Gleiches werden wir also auch für die geographischen Längen beanspruchen dürfen. Daraus ergibt sich dann eine weitere wichtige Folgerung. Wenn wir uns denken, ein Wanderer habe sich von seinem anfänglichen Standorte aus um 15 Längengrade nach Westen bewegt, dann erkennen wir, daß ihm an dem jetzt erreichten Platze die Sonne um $\left(\frac{15}{360}=\frac{1}{24}\right)^d$, also um 1^h, später denn zuvor aufgehen wird, und umgekehrt wird sie für ihn um 1^h früher aufgehen, wenn die Bewegung eine gegen Osten gerichtete gewesen war. Allgemein liegt darin die folgende Erfahrungswahrheit: *Wer gegen Westen reist, verliert, wer gegen Osten reist, gewinnt an Zeit, d. h. er muss im ersten Falle seine Uhr zurückstellen, im zweiten vorrichten.* Beträgt der Weg $15\,n$ Längengrade, so beträgt die Zeitdifferenz n Stunden, für $n = 24$ also einen vollen Tag. Da $15 \,.\, 24 = 360$ ist, so müssen wir obigem Satze noch das nachstehende Korollar hinzufügen: *Wer eine Erdumseglung in westlicher Richtung antritt, hat nach der Rückkehr zum Ausgangspunkte einen vollen Tag verloren, wer eine Erdumseglung in östlicher Richtung antritt, hat nach der Rückkehr einen vollen Tag gewonnen, und wenn zwei Wanderer gleichzeitig eine Reise um die Erde in entgegengesetzter Richtung, aber mit gleicher Geschwindigkeit antreten würden, so würden sie zwar am nämlichen Tage wieder an dem Ausgangspunkte eintreffen, aber das Datum, das beide schrieben, würde um zwei volle Tage differieren.*

---

seine obere Kulmination hatte, so sehen wir, daß dieser Stern in demselben Augenblicke auch aufgehört hatte, nördlicher Zirkumpolarstern zu sein. Da aber die Kalotte der südlichen Zirkumpolarsterne ebenso groß ist als die der nördlichen, so mußte damals die Höhe des südlichen Poles, d. h. die südliche Breite ebenso groß sein wie der Abstand von α Ursae majoris vom Nordpole. Dieser beträgt ungefähr 27°, Schmiedel befand sich also, als er seine Beobachtung machte, in der heutigen Provinz S. Catarina.

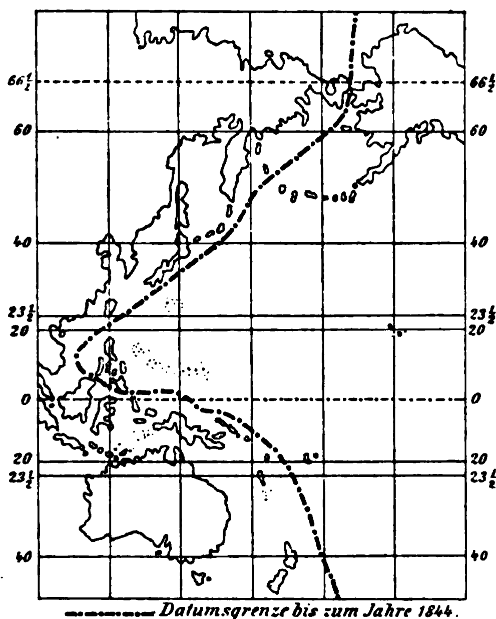
Datumsgrenze. So zwingend auch die soeben konstatierten Thatsachen von der Sphärizität der Erde uns aufgenötigt werden, so hatten sie doch, als man ihrer zum erstenmale im praktischen Leben inne ward, etwas geradezu Verblüffendes selbst für Leute, welche an der Kugelgestalt nicht im geringsten mehr zweifelten[1]). Und auch heutigestags noch herrscht in weiten Kreisen Unklarheit über das, was man unter der *Datumsgrenze*[2]) zu verstehen habe. Bekanntlich ist die Okkupation und Besiedlung derjenigen Erdgebiete, welche ungefähr um 180° von Europa abstehen, teils von Osten, teils von Westen aus ins Werk gesetzt worden; die Holländer z. B., denen der größere Teil des hinterindischen Archipels gehört, kamen von Westen, wogegen die Spanier, welche unter Magalhaens auf den Ladronen, Marianen und Philippinen landeten, von Osten her sich zu diesen Inselgruppen geführt sahen. Wenn also unser Satz von oben richtig ist, so mußte die Zeitrechnung der Holländer auf Ceram und der Spanier auf Luzon um $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)^{d}$ verschieden sein, und zwar waren die ersteren den letzteren um einen Tag voraus, obwohl, da die Molukken östlich von den Philippinen gelegen sind, eher das Gegenteil hätte erwartet werden müssen. So war denn eine *histo-*

[1]) An dem Beispiele der zwei Wanderer erläuterte bereits Abulfeda die Kugelgestalt der Erde und die daraus entfließenden Konsequenzen (Peschel-Ruge, Geschichte der Erdkunde, S. 132). Als die Genossen Magalhaens' von der ersten Erdumseglung heimkehrten und auf den Inseln des grünen Vorgebirges sich erkundigten, was für ein Wochentag gerade sei, vernahmen sie, der Donnerstag (Ruge, Gesch. d. Zeitalters d. Entdeck., S. 481). „Das setzte uns sehr in Erstaunen," schrieb Pigafetta in sein Tagebuch, „weil bei uns erst Mittwoch war. Und ich hatte doch, da ich stets gesund gewesen, Tag für Tag mein Journal geführt. Erst später erfuhren wir, daß wir keinen Fehler gemacht und keinen Tag übersprungen hatten, und daß der Unterschied entsteht, wenn man von Osten nach Westen die Erde umschifft."

[2]) Ausführlichere Angaben über diesen Gegenstand enthält Gretschels „Lexikon der Astronomie" (Leipzig 1882); ferner vgl. J. C. V. Hoffmann, Die sogenannte Datumsgrenze auf der Erdkugel (Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht, 14. Band, S. 576 ff.). Sehr hübsch popularisiert Naumann die Sache in seinen in der „Beil. z. Allg. Zeitung" erschienenen „Geogr. Tagesfragen".

rische Datumsgrenze entstanden, eine unregelmäßig geschlängelte Kurve, von welcher *Fig. 62* ein Bild zu entwerfen sucht[1]). Man sieht, daß die Linie östlich von

Fig. 62.



Datumsgrenze bis zum Jahre 1844.

Neu-Seeland, Neu-Kaledonien und Neu-Guinea hinzieht, zwischen Celebes und Borneo einerseits, Mindanao andererseits verläuft und, Formosa wie das ganze japanische Inselreich westlich lassend, der Beringsstraße zustrebt.

---

[1]) Ein solches Kartenbild findet sich u. a. im Meyerschen Konversationslexikon, Artikel „Datumsgrenze"; gezeichnet ist dasselbe nach H. Berghaus' älterer „Chart of the World". Doch hat die Skizze in dieser Form, wie die nächste Note darthun wird, schon fast seit einem halben Jahrhundert ihre Richtigkeit eingebüßt.

Rechts von dieser Linie war in älteren Zeiten immer Sonntag, während man links Montag schrieb, und als die Vereinigten Staaten sich gegenüber der erwähnten Meeresstraße festsetzten, entstanden mehrfache Irrungen, welchen durch gesetzliche Bestimmungen abgeholfen werden mußte. Im übrigen gehört die historische Datumsgrenze wirklich jetzt nur noch der Geschichte an[1]), und an ihre Stelle ist die *thatsächliche* Datumsgrenze getreten, welche mit dem der pazifischen Erdhemisphäre angehörigen *Halbmeridiane von Greenwich* zusammenfällt[2]). Der

---

[1]) Nachdem Jagor (Reisen in den Philippinen, Berlin 1873. S. 1 ff.) von der Uebertragung spanischer Zeit nach dieser Inselgruppe durch Magalhaens gesprochen und erwähnt hat, daß die Spanier von dem damals schon auf 16^h angewachsenen Zeitverluste (s. o.) keine Kenntnis besaßen, fährt er fort: „In den Philippinen blieb jener Umstand gleichfalls unberücksichtigt; es war dort Sylvester, wenn in der übrigen Welt Neujahr begonnen hatte, und so ging es fort bis Ende 1844, wo man sich, nach eingeholter Genehmigung des Erzbischofs, entschloß, den Sylvestertag einmal gänzlich zu überspringen. Seitdem liegen die Philippinen nicht mehr im fernsten Westen, sondern im fernsten Osten und sind ihrem Mutterlande um acht Stunden voraus." Gleichzeitig mußte auch in der an der chinesischen Küste gelegenen portugiesischen Pflanzstadt Makao eine Zeitregulierung vorgenommen werden. Für das Festland stellt sich die Sache etwas anders. Als 1867 Rußland seinen amerikanischen Gebietsanteil an die Union verkaufte, ward nach Pösche (Die Meridiankonferenz in Washington, Petermanns Geogr. Mitteil., 1884. S. 458 ff.) festgesetzt, daß als äußerste Westgrenze des abgetretenen Landes jener Punkt des Parallelkreises von 65° 30′ n. Br. gelten solle, in dem jener vom Meridian der Insel Krusenstern geschnitten werde. Die an die Vereinigten Staaten übergegangenen Ansiedler hatten natürlich den asiatischen Tag mitgebracht, und die in ihr neues Besitzthum einwandernden Nordamerikaner waren gegen erstere um einen Tag zurück. Allmählich siegte natürlich der Einfluß der letzteren, die Datumsgrenze wurde bis an die Beringsstraße zurückgedrängt, weiter aber nicht, und da diese Meerenge 11° östlich von 180° Greenwicher Länge liegt, so verliert der Normalmeridian in Sibirien seine maritime Bedeutung als Datumsscheide.

[2]) Es leuchtet jetzt ein, weshalb amerikanische und andere Astronomen (s. o.) gerade von der pazifischen Seite des Greenwich-Meridians aus die Längen gezählt wissen wollen, denn, wenn es so eingerichtet wird, stehen auch die um 12^h in Zeit differierenden Erdorte um volle 180° voneinander ab.

Datumswechsel gestaltet sich jetzt überaus einfach, und die Schiffer haben sich daran so gewöhnt, daß die Aenderung mit derselben Ruhe und Sicherheit sich zu vollziehen pflegt wie jede beliebige andere nautische Verrichtung[1]). *Wer von West nach Ost segelt, zählt den Tag doppelt, an welchem er diese Linie überschreitet; wer von Ost nach West reist, lässt diesen Tag aus und springt sofort beispielsweise vom 30. März zum 1. April über.* Damit ist diese, an sich nicht unwichtige Frage in der denkbar einfachsten Weise, und wohl für alle Zeiten, gelöst.

Orts- und Weltzeit. Diejenige Zeit, welche — sei es auf der Sonnenuhr als wahre, sei es auf der Kunstuhr als mittlere Zeit — auf unseren Zeitweisern abgelesen werden kann, ist die *Ortszeit*, und diese wechselt naturgemäß von Meridian zu Meridian. Wer also eine Reise ganz oder angenähert längs eines Parallelkreises der Erde macht, hat dem Unterschiede der Ortszeiten Rechnung zu tragen, und wenn in den Eisenbahnfahrplänen eine *Normalzeit* für ein gewisses Land festgesetzt wird, so darf man doch nicht erwarten, die nach dieser Zeit gestellte Uhr auf jeder anderen Station mit der dortigen Lokalzeit im Einklange zu finden. Aus diesem Grunde muß an jedem nicht im Meridiane des Zentralpunktes gelegenen Ort die von den Kirchenuhren verkündete Zeit eine andere sein als die von der Uhr des Bahnhofes verkündete. Wenn somit ein Land mehr eine westöstliche als eine nordsüdliche Ausdehnung hat, wird es mit einer einzigen Normalstation nicht mehr auskommen, und so wird denn beispielsweise die Zeit in den Kursbüchern für das rechtsrheinische Bayern auf den Meridian von München, für die Pfalz auf den Meridian von Ludwigshafen bezogen. Kölner Zeit ist gegen Berliner Zeit um 25^m zurück, wenn folglich der sogenannte „Blitzzug“ Berlin um 10 Uhr des Abends verläßt und in Köln um 8 Uhr des Morgens eintrifft,

[1]) Sehr launig schildert die Folgen des Doppeltrechnens eines Tages E. Hildebrandts „Reise um die Erde“ (herausgeg. von Kossak, 3. Teil, Berlin 1876. S. 88).

so beträgt[1]) seine fahrplanmäßige Fahrtdauer nicht 10^h, sondern $10^h\ 25^m$, und der Passagier, welcher diese 25^m Zuschlag auf seiner Taschenuhr findet, hat für diese anscheinende Verzögerung ausschließlich die Rundung der Erde verantwortlich zu machen.

Um die Eisenbahn- und Dampfschiffverwaltungen der steten Rücksichtnahme auf eine ganze Anzahl von staatlichen „Normalzeiten" zu überheben, ist von verschiedenen Seiten die Einführung einer *internationalen Zeit* oder *Weltzeit* angeregt worden. Als solche gilt, wie sich von selbst versteht, *mittlere Zeit von Greenwich*. Ein Kalendertag in Weltzeit nimmt dann seinen Anfang, wenn die Sternwarte von Greenwich Mitternacht hat[2]). Um zu einer gegebenen Ortszeit die entsprechende Weltzeit zu finden, kann man die für erstere gestellte Uhr mit einem besonderen Stunden- und Minutenzeiger — etwa von anderer Farbe — versehen oder auch eines besonderen Instrumentes, des *Weltzeitanzeigers*, sich bedienen[3]). —

Einteilung der Erdoberfläche in Zonen und Klimate. Nachdem wir uns, soweit es unser Arbeits-

---

1) Martus, a. a. O., S. 124.

2) Eingehende Belehrung gewährt eine Schrift von Hammer: Nullmeridian und Weltzeit, Hamburg 1889.

3) Eine derartige Vorrichtung ist gemeinsam dem Mechaniker Wigand in Zeitz und dem Astronomen Weinek in Prag patentiert und in der „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht" (14. Band. S. 617 ff.) beschrieben worden. Die Erdoberfläche ist durch Polarprojection auf einer rotierenden Scheibe abgebildet, und in diese letztere läßt sich ein beliebiger Erdort eintragen; daß dabei nur die Länge genau, die Breite aber gar nicht berücksichtigt zu werden braucht, erleichtert die Einzeichnung sehr. Die Scheibe dreht sich innerhalb eines in 24 Teile (Stunden) geteilten Zeitringes, und zwar sind die 12 Tagstunden durch schwarze Ziffern auf hellem Grunde, die 12 Nachtstunden durch weiße Ziffern auf dunklem Grunde ersichtlich gemacht. Zwei vom Zentrum ausgehende Zeiger verhelfen dazu, durch Einstellung auf zwei beliebige Punkte (*A* und *B*) deren Zeitunterschied ablesen zu können, und wenn man mithin Greenwich als den einen dieser Punkte, etwa *A*, wählt, so kann man die Weltzeit von *B* unmittelbar am Limbus angegeben finden.

plan erlaubte, mit den *zeitlichen* Folgen der Erdkrümmung beschäftigt, haben wir noch eine Reihe *räumlicher* Fragen in Betracht zu ziehen. Als erste derselben gilt die *Zoneneinteilung der Erdoberfläche.* An der Himmelskugel hatten, wie ein antiker Kompilator glaubhaft mitteilt[1]), bereits Thales und Pythagoras fünf Zonen unterschieden, deren vier Begrenzungskreise jeweils die beiden *Wendekreise* und die von den Polen um einen der Ekliptikschiefe gleichen Bogen abstehenden beiden *Polarkreise* waren, während die mittlere Zone vom Aequator halbiert ward. Wahrscheinlich war es auch Pythagoras, der diese Einteilung auf die zur Himmelssphäre konzentrische Erdkugel übertrug, wenigstens sprechen hierfür die Angaben des Diogenes Laertius, und auch der für die Erdkunde des Mittelalters so überaus verhängnisvoll gewordene Aberglaube, daß nur zwei unter den fünf Erdzonen bewohnbar seien, ist anscheinend altpythagoreisch[2]). So zerfiel die Erdoberfläche in eine

[1]) Nach der im Dielsschen Werke (S. 45 ff., vgl. die Einleitung) aufgestellten und glücklich vertheidigten Hypothese entstammt die obige Nachricht der „*Epitome*" des Aetius.

[2]) Diogenes Laertius, lib. VIII, cap. 25. „Μέσην περιέχει δ κόσμος τὴν γῆν, καὶ αὐτὴν σφαιροειδῆ καὶ περιοικουμένην." Dieses „ringsum bewohnt" gilt jedoch einzig und allein für die gemässigten Erdgürtel, denn die mittlere Zone wird ausdrücklich als „διακεκαυμένη" bezeichnet, und als solche, als „zona combusta" erscheint sie in allen Lehrbüchern des Mittelalters, bis in die neuere Zeit herein. Für die antike Periode sind als Gewährsmänner noch anzuführen Diodor (lib. I, cap. 40), Aristoteles in seiner „Meteorologie" (lib. II, cap. 5) und Plinius, in dessen „Naturgeschichte" das 68. Kapitel des zweiten Buches die Ueberschrift trägt: „Quae portio terrae habitetur". Andere Autoren, griechische zumal, waren von dieser Irrlehre weit weniger durchdrungen, am meisten skeptisch verhielt sich gegen dieselbe Strabon (lib. II, cap. 2 und 3), und auch das „Almagest" des Ptolemäus (lib. II, cap. 6) erhob theoretische Bedenken, die dann in der „Geographie" (lib. IV, cap. 8) durch den Hinweis auf jenseits des nördlichen Wendekreises geglückte Handelsniederlassungen verstärkt wurden. Sogar der alte Eratosthenes scheint (Berger, a. a. O.) dem aristotelischen Dogma nicht Beifall gezollt zu haben. Allein die mittelalterliche Neigung, Unwahrscheinliches eben deshalb für wahr zu halten, nahm von den Gegengründen der denkenden und weltkundigen Griechen wenig Notiz und verblieb bei

heisse Zone zwischen den beiden (zentrisch auf die Erdsphäre projizierten) Wendekreisen, in zwei *gemässigte* Zonen zwischen je einem Wende- und einem Polarkreise und in zwei — besser Kalotten zu nennende — *kalte* Zonen. Letztere galten der Kälte, die intertropische Zone galt der Hitze wegen für *unbewohnbar*. Späterhin hat Parmenides die Zoneneinteilung aufs neue zum Gegenstande einer Erörterung gemacht [1]), allein daraus

---

einer Anschauung, welche sich trefflich versinnbildlicht vorfindet in unserer *Fig. 63*. Dieselbe ist von uns einem Manuskripte der an seltenen alten Denkmälern der Litteratur reichen Bibliothek zu Maihingen (unweit Nördlingen) entnommen worden. Eine der schlimmsten Länderverzerrungen auf älteren Karten dankt der

Fig. 63.



Lehre von der Unbewohnbarkeit gewisser Striche ihre Entstehung; man ließ nämlich die ostafrikanische Küste vom Kap Guardafui aus nach Osten, statt nach Süden, verlaufen, da Sofala und Zanzibar doch offenbar nicht der heißen Zone angehören könnten (Peschel-Ruge, Gesch. d. Erdk., S. 143 ff.). Sehr hübsch charakterisiert Ruge (Gesch. d. Zeitalters d. Entdeck., S. 91) die Durchbrechung des auf der Geographie liegenden Bannes, die erfolgte, als sich an dem 1441 entdeckten Rio d'Ouro lebende Menschen vorfanden.

[1]) Vgl. Sartorius, Die Entwicklung der Astronomie bei den Griechen (s. d. Einleitung), S. 55.

läßt sich noch kein Grund ableiten, gerade ihn zum eigentlichen Vater dieser Einteilung zu machen, wie es häufig geschieht. Von Eratosthenes datiert dann noch die Zerlegung der Erdoberfläche in sogenannte *Klimate* [1]), allein diese hat heutzutage alle Bedeutung verloren, und nur die fünf pythagoreischen Zonen bilden noch ein Inventarstück des elementaren geographischen Pensums, freilich mit dem Unterschiede, daß mit der Lehre von der Unbewohnbarkeit endgiltig gebrochen werden konnte [2]).

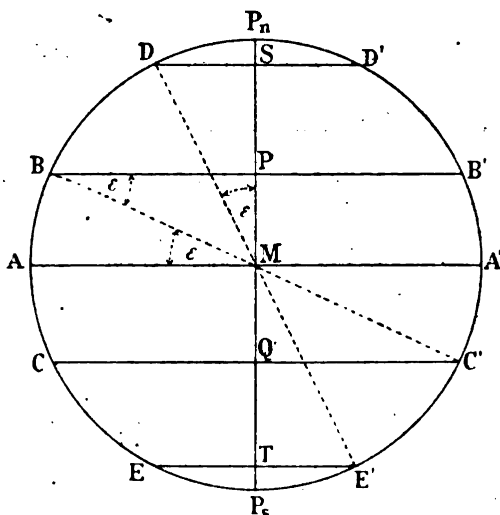
In *Fig. 64* haben die Buchstaben M, A, A', P_n, P_s die uns längst geläufige Bedeutung, BB' ist der Wendekreis des Krebses, CC' der des Steinbockes, DD' der nördliche, EE' der südliche Parallelkreis. Die Mittel-

[1]) Die Einteilung in Klimate dürfte sich allem Anscheine nach auf den Knidier Eudoxus zurückführen lassen. Derselbe gab als Kennzeichen desselben, was er „κλίμα" oder „ἔγκλιμα τοῦ κόσμου" nannte, das Verhältnis der Tag- und Nachtlänge von jenem Tage an, an welchem für den fraglichen Ort die Sonne die größte Mittagshöhe erreicht hatte (Künßberg, a. a. O., S. 26). Von Eudoxus übernahm vielleicht Eratosthenes den Begriff (Berger, a. a. O., S. 191), mischte jedoch in die ursprünglich rein astronomische Bestimmung desselben auch physikalisch-geographische Momente ein, wodurch eine Annäherung an das, was die Gegenwart unter „Klima" versteht, bewirkt wurde. Nähere Nachweisungen kann man finden bei Strabon (lib. II, cap. 132 ff.), bei Plinius (lib. VI, cap. 39), bei Cassiodorius (De Astronomia, 2. Band der Garetschen Gesamtausgabe, Venedig 1729. S. 560); von neueren Schriften behandelt die Zerfällung der Erde in 2 × 48 Klimate besonders eingehend die uns mehrfach bekannte Liebknechtsche Geographie (S. 360 ff.). Gemeinhin nahm man an, daß alle Parallelkreise, für welche die Dauer des längsten Tages je um eine halbe Stunde sich unterschied, als Begrenzungskreise eines Klimas anzusehen wären. Nach den in Abschnitt IX gegebenen Aufschlüssen werden also die Grenzkreise, resp. die ihnen entsprechenden Polhöhen φ dadurch gefunden, daß man in der Gleichung $a = \frac{2}{15} \text{arc cos} (-\text{tang } 23\frac{1}{2}^0 \text{ tang } \varphi)$ der Größe a successive die Werte 12, $12\frac{1}{2}$, 13, $13\frac{1}{2}$, 14, $14\frac{1}{2}$ u. s. w. beilegt und das zugehörige φ berechnet.

[2]) Seit Kanes Reise weiß man, daß die „ἔσχατοι τῶν ἀνθρώπων", die Eskimos von Itah und Peteravik, kaum 10° vom Nordpole entfernt ihre Wohnsitze haben, daß also auch hohe Breiten der kalten Zone wirklich bewohnbar sind.

punkte P, Q, S, T dieser vier Kreise liegen mit M in der nämlichen, auf allen Kreisebenen senkrecht stehenden Graden, nämlich in der Erdachse $P_n P_s$. Ziehen wir BC' und DE', so schneiden sich diese zwei Erddurchmesser natürlich im Mittelpunkte M, und es ist $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMP_n =$ der Ekliptikschiefe ε, welche für ge-

Fig. 64.



wöhnlich zu $23\frac{1}{2}^0$ gerechnet werden darf. Wenn wir den Flächeninhalt jeder einzelnen Zone, für den Radius r der Erde, berechnen wollen, so müssen wir den Satz [1]) anwenden, daß der Inhalt gleich $2r\pi$, multipliziert mit der Höhe der Zone, zu setzen ist. Bezeichnen wir sonach den Flächeninhalt der heißen Zone ($BB'C'C$) mit Z_h, den der gemäßigten ($DD'B'B$ oder $EE'C'C$) mit Z_g und den der kalten (DP_nD' oder EP_sE') mit Z_k, so ist

$$Z_h = 2r\pi \,.\, PQ, \quad Z_g = 2r\pi \,.\, SP, \quad Z_k = 2r\pi \,.\, P_nS.$$

---

[1]) Archimedes, De sphaera et cylindro, lib. I, propos. 42.

Jede der drei Formeln muß auf ihre eigene Art und Weise bestimmt werden.

I. Heisse Zone. Es ist, da als Wechselwinkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle MBP$ gleich sind, $PQ = 2PM = 2r\sin\varepsilon$, somit $Z_h = 4r^2\pi\sin\varepsilon$.

II. Gemässigte Zone. Es ist $SP = SM - PM = r\cos\varepsilon - r\sin\varepsilon = r[\sin(90^0 - \varepsilon) - \sin\varepsilon]$. Setzt man dies oben ein und wendet die sogenannte prosthaphäretische Formel an, so wird $Z_g = 4r^2\pi\sin(45^0 - \varepsilon)\cos 45^0 = 2\sqrt{2}r^2\pi\sin(45^0 - \varepsilon) = 2\sqrt{2}r^2\pi\cos(45^0 + \varepsilon)$.

III. Kalte Zone. Es ist $P_n S = P_n M - SM = r - r\cos\varepsilon = 2r\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$ und folglich $Z_k = 4r^2\pi\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon$.

Die numerische Auswertung dieser drei Formeln [1]) ergibt, daß die Flächeninhalte zu einander in einem Verhältnis stehen, welches, unter O die Gesamtoberfläche der Erde verstanden, durch nachstehende Proportionenkette ausgedrückt wird [2]).

$$Z_h : Z_g : Z_k : O = 0{,}39875 : 0{,}26049 : 0{,}04147 : 1{,}00000.$$

Klassifikation der Erdbewohner nach geometrischen Grundsätzen. Neben der zonalen Einteilung der Erde sind noch gewisse Klassifikationen ihrer Bewohner im Gebrauch, an denen wir hier umsoweniger achtlos vorübergehen dürfen, als dieselben einen gewissen pädagogischen Wert beanspruchen können und sich sehr

---

[1]) Eine Kontrolle unserer Formeln ist gegeben durch das Bestehen der Relation $Z_h + 2Z_g + 2Z_k = 4r^2\pi$. In der That hat man $\sin\varepsilon + 2\sin(45^0 - \varepsilon)\cos 45^0 + 2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon = \sin\varepsilon + 2\sin^2 45^0\cos\varepsilon - 2\sin^2 45^0\sin\varepsilon + 1 - \cos\varepsilon$, und diese Summe wird der Einheit gleich, weil $\sin^2 45 = \cos^2 45 = \frac{1}{2}$ ist.

[2]) Vgl. auch die auf die Elliptizität Bedacht nehmende Abhandlung Klügels „Tafel des Inhaltes aller Zonen einer Kugel", abgedruckt in Bodes „Astronom. Jahrbuch" für das Jahr 1784.

gut dazu eignen, Anfänger mit dem Wesen der Sphärizität vertraut zu machen. Altgriechisch ist bereits [1]) die Aufstellung der Begriffe *Antöken* oder *Gegenwohner*, *Periöken* oder *Nebenwohner* und *Antipoden* oder *Gegenfüssler*. Die Antöken eines beliebigen Erdortes A befinden sich an einem Punkte A' der Erde, welcher mit A auf gleichem Meridiane liegt, so jedoch, daß die nördliche resp. südliche Breite von A der südlichen resp. nördlichen Breite von A' gleich ist. Die Periöken gehören zu einem Punkte A'', der mit A auf gleichem Parallel gelegen ist, aber um 180^0 in Länge von A absteht. Die Antipoden endlich sind gleichzeitig Antöken und Periöken, d. h. sie bewohnen die dem Punkte A diametral gegenüberliegende Stelle A''' der Erde. A, A', A'', A''' bilden sonach die Ecken eines dem Meridiane von A einbeschriebenen Rechteckes, welches für den Fall, daß arc $AA' = 90^0$ ist, in ein Quadrat übergeht. Die Frage, ob in A', A'', A''' wirklich Menschen wohnen könnten, hat in früheren Zeiten die Geister angelegentlich beschäftigt [2]). Wenn

[1]) Vgl. die schon zu Eratosthenes' Zeit gepflogenen Verhandlungen über Antöken u. s. w. bei Berger (a. a. O., S. 80 ff., S. 86 ff.). In streng systematische Form bringt die Sache Varenius (a. a. O., S. 548 ff.).

[2]) Pythagoras war, wenn der Bericht des Diogones von Laerte auf Wahrheit beruht, bereits von der Existenz der Gegenfüßler („εἶναι ἀντιπόδας“) überzeugt; andere allerdings wollten die Erfindung des Wortes „ἀντίποδες“ dem Platon zuschreiben (Berger, a. a. O., S. 71). Die wissenschaftlichen Geographen der hellenisch-römischen Zeit hatten die Antipoden als eine selbstverständliche Konsequenz der Kugelgestalt aufzufassen gelernt, und sogar der nicht eben tief gehende Plinius (lib. II, cap. 65) meinte schon ganz verständig, wenn man sich darüber wundern wolle, daß unsere Antipoden nicht „herabfielen“, so hätten jene genau dasselbe Recht, sich über uns zu wundern. Er war sich also, ganz in dem schon oben bezeichneten Sinne, völlig darüber klar, daß der Gegensatz zwischen Oben und Unten nur der zwischen Himmel und Erdmittelpunkt sein könne. Im Mittelalter dagegen war die Anzahl derjenigen, welche so vernünftig dachten, eine recht geringe worden; die Kämpfe, welche die Antipodenlehre zu bestehen hatte, sind geschildert in des Verf. „Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie (Halle 1879, 1. u. 2. Heft), ferner bei Draper (History of the Conflict between Re-

wir eine Thatsache hier vorwegnehmen, welche allerdings erst im dritten Kapitel zu wirklich sachlicher Erörterung gelangen kann, so können wir auch folgendes Kennzeichen angeben: *Antöken haben gleiche Tages-, aber entgegengesetzte Jahreszeiten, Periöken haben entgegengesetzte Tages-, aber gleiche Jahreszeiten, für Antipoden verhalten sich Tages- und Jahreszeiten entgegengesetzt.*

Klassifikation der Erdbewohner nach den Schattenverhältnissen. Eine andere Klassifikation der Erdbewohner ist diejenige nach ihrem *Schatten* [1]; danach können die Menschen *Ascii*, *Amphiscii*, *Heteroscii* oder auch *Periscii* sein (σκιά, der Schatten, verbunden mit dem α privativum, mit den Worten ἄμφοι, ἕτεροι und der Präposition περί). Jeder zwischen den Wendekreisen Wohnende erlebt es zweimal, jeder auf einem der beiden Wendekreise Wohnende erlebt es einmal im Jahre, daß die Sonne (um die Mittagsstunde des längsten Tages) zu seinen Häupten steht; dann wirft er also gar

---

ligion and Science, London 1875, an verschiedenen Stellen) und bei Zöckler (Gesch. d. Bez. etc., 1. Band. S. 87. S. 128. S. 338. S. 509. S. 712). Wir hören, daß einzelne Kirchenväter Wissen und Urteil an den Tag legten, so zumal Gregor von Nyssa, daß aber andere, vorab die Orientalen, sich in den sonderbarsten Phantasiegebilden ergingen, und daß zumal der „christliche Cicero", Lactantius, in den Gegenfüßlern nur ein Disputierobjekt erblicken zu sollen vermeinte. In den „Etymologien" des Polyhistors Isidorus Hispalensis (lib. XX, cap. 2) steht zu lesen: „Antipodes nulla ratione credendi sunt, quia nec soliditas patitur nec centrum terrae, sed neque hoc ulla historiae cognitione firmatum, sed hoc poetae quasi ratiocinando conjectant." So hatte denn noch im 8. Jahrhundert der Bischof Virgilius von Salzburg, ein Ire, viele Anfechtungen vom Papste Zacharias und seinem Delegierten, dem heiligen Bonifacius, zu erdulden, weil er für die angefochtene Lehre eintrat. Doch soll nicht verschwiegen werden, daß dem frommen Eifer ein Fürsprecher erstanden ist in dem durch wertvolle mathematische Arbeiten bekannteren Belgier Gilbert (Le pape Zacharias et les Antipodes, Brüssel 1882).

[1]) Auch diese Einteilung nach den Schattenverhältnissen ist antik, sie geht auf Aristoteles zurück (Meteorologie, lib. II, cap. 5); ihre moderne Einkleidung hat auch diese Lehre durch Varenius (a. a. O., S. 548) erhalten.

keinen Schatten, ist ein ἄσκιός. Solange für den Tropenbewohner die Sonne nördlich steht, fällt sein Schatten nach Süden, solange sie südlich steht, nach Norden; jener ist also, zwei Tage im Jahre ausgenommen, ein ἀμφίσκιός, weil nur zwei Möglichkeiten in Frage kommen. Wer einer der beiden gemäßigten Zonen angehört, erblickt seinen Schatten, je nachdem, bloß gegen Süden oder bloß gegen Norden gerichtet, er ist sohin ein ἑτερόσκιός. Der Polarbewohner endlich ist, solange die Sonne ganz unterhalb seines Horizontes verbleibt, ein ἄσκιός, wennschon aus ganz anderen Gründen als der Tropenbewohner; wenn dann die Sonne in die Reihe der auf- und untergehenden Gestirne getreten ist, fällt der Schatten wesentlich immer nach derselben Richtung, im Gebiete der nördlichen Polarzone nördlich, im Gebiete der südlichen Polarzone südlich, und für diese Zeit des Jahres sind also auch die Bewohner der beiden polaren Kalotten in die Reihe der ἑτερόσκιοί aufgenommen. Endlich aber verbleibt die Sonne eine Zeitlang gänzlich über dem Horizonte, sie umwandert in einem Kreise das ganze Firmament, und mit ihr beschreibt der Schattenendpunkt eine geschlossene Linie, d. h. der Polarmensch, dessen Schatten im Laufe von 24 Stunden jede mögliche Horizontalrichtung einnimmt, ist zum περίσκιός geworden [1]).

---

[1]) Aus den in Abschnitt IX über die Sphaera parallela beigebrachten Aufschlüssen erhellt zugleich, daß für die Erdpole die Sonne ein ganzes Halbjahr sichtbar und ebensolange unsichtbar ist. Was wir „Tag" und „Nacht" nennen, ist für die Endpunkte der Erdachse ein Zeitraum von $182^d, 625$. Um zu erfahren, wie lange unter der Breite φ ($\geq 66\frac{1}{2}^0$) der *ewige Tag* und die gleich lange *ewige Nacht* dauern, bestimme man, mit Rücksicht auf die wohl an sich verständliche *Fig. 65*, die für den Beginn dieser Periode charakteristische Deklination Δ mittelst der Gleichung $\Delta + \varphi = 90^0$. Wenn man aber Δ kennt, so kann man nach den früheren Formeln leicht finden, an welchem Tage des Jahres Δ erreicht wird, und die doppelte Zahl der Tage, welche zwischen diesem Tage und dem 21. Juni resp. dem 21. Dezember gelegen ist, ist der Länge des ewigen Tages und der ewigen Nacht gleich. Der erste Geograph, welcher auf Grund eigener — in Thule, d. h. auf den Shetlands- oder Fär-Öer-Inseln gemachten — Beobachtungen

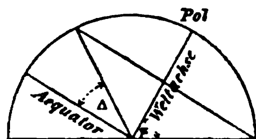
Kürzeste Distanzen auf der Erde. Wir wenden uns jetzt einer anderen Betrachtung zu. Ebenso wie in der Ebene die grade Linie die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten ist, mißt auf der Kugelfläche der kleinere Bogen [1]) des durch zwei Punkte A und B gelegten Hauptkreises deren Distanz. Wenn sonach für A und B deren Koordinaten bekannt sind, so erhebt sich die Frage: *Wie findet man aus den gegebenen Längen und Breiten zweier Erdorte deren kürzeste Entfernung?* Wenn λ_1, β_1 und λ_2, β_2 resp. diese Längen und Breiten für A und B sind, so verbindet man A und B mit dem Pole P durch Hauptkreisbogen und findet, auf das sphärische Dreieck ABP den Kosinussatz anwendend,

$$\cos AB = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

---

es für sicher erklärte, daß in sehr hohen Breiten die Sonne den Horizont nicht nur streife, sondern sogar nicht einmal unter diesen sich hinabsenke, war Pytheas von Massilia, allein der Reisebericht dieses klar blickenden Mannes, dessen Erzählung uns den allersichersten Beweis dafür liefert, daß er wirklich dorthin gekommen, wo er gewesen zu sein behauptete, fand selbst bei einem Strabon (lib. VII, cap. 295) keine günstige Aufnahme; ja derselbe mied selbst nicht den leichtfertigen Ausspruch: „Πυθέας ὁ Μασσαλιώτης κατεψεύσατο ταῦτα.“ Litterarische Angaben über jenen kühnen Forschungsreisenden gewähren die nachstehend bezeichneten Abhandlungen: Bougainville, Eclaircissements sur la vie et les voyages de Pythéas de Marseille, Mém. de l'acad. des inscriptions, vol. XIX; Lelewel, Pythéas de Marseille et la géographie de son temps, Brüssel 1836; Bessels, Ueber Pytheas von Massilien, Göttingen 1858; A. Ziegler, Die Reise des Pytheas nach Thule, Dresden 1861; A. Schmitt, Zu Pytheas von Massilia, Landau i. P. 1876; Häbler, Die Nord- und Westküste Hispaniens, Leipzig 1889.

Fig. 65.



[1]) Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß A und B keine Antipodenpunkte der Kugel sind, denn in diesem Falle sind alle zwischen denselben ausgespannten Bogen grösster Kreise als Meridianhälften einander gleich.

Diese Formel gilt auch dann noch, wenn etwa A der nördlichen, B der südlichen Erdhalbkugel angehören sollte; an die Stelle von β_2 tritt nämlich dann der Wert $-\beta_2$, da ja die südlichen Breiten als negativ in Rechnung zu bringen sind. Es ist also

$$\cos AB = \cos (90^0 - \beta_1) \cos (90^0 - \beta_2)$$
$$+ \sin (90^0 - \beta_1) \sin (90^0 - \beta) \cos (\lambda_1 - \lambda_2) = \sin \beta_1 \sin \beta_2$$
$$+ \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Wenn es sich nicht um die *angulare*, sondern um die *lineare* Distanz AB, d. h. um den durch A und B bestimmten aliquoten Teil einer Hauptkreisperipherie handelt, so hat man, unter d diese lineare Distanz verstanden,

$$360^0 : \text{arc } AB = 2 r \pi : d; \quad d = \frac{r\pi}{180} \text{ arc } AB.$$

Mit dieser Formel wird man in der großen Mehrzahl der in der mathematischen Erdkunde überhaupt vorkommenden Fälle ausreichen. Daß die Berechnung des Winkelwertes von AB dann sich erheblich vereinfacht, wenn die Punkte A und B gleiche Längen oder gleiche Breiten besitzen, bedarf wohl kaum einer ausdrücklichen Hervorhebung; aus der allgemeinen Formel [1]) leiten sich nämlich für den einen oder anderen Spezialfall die einfacheren Formeln ab:

$$AB = \pm (\beta_1 - \beta_2); \quad \cos AB = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Man hat sich natürlich, wenn $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ geworden ist, sehr davor zu hüten, nicht den Parallelkreisbogen AB für den wirklichen kürzesten Abstand der beiden

---

[1]) Natürlich verstanden sich schon die Griechen darauf, sphärische Entfernungen zu berechnen, doch waren ihre trigonometrischen Hilfsmittel noch wenig entwickelt. Die erste mehr moderne Ableitung der allgemeinen Formel haben wir in dem Kommentare gefunden, mit welchem Johann Werner (1468 bis 1528) seine Ausgabe des ersten Buches der Geographie des Ptolemäus (Nürnberg 1514) begleitete.

Punkte A und B zu halten[1]). Die drei Verbindungen von A und B, welche für die Geographie ein gewisses Interesse haben, seien mit ihren Werten zusammengestellt, wie folgt, und zwar in Linearmaß[2]):

I. Hauptkreisbogen

$$AB = \frac{r\pi}{180} \operatorname{arc} \cos [\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos (\lambda_1 - \lambda_2)];$$

II. Parallelkreisbogen

$$AB = \frac{r\pi}{180} \cos \beta \,.\, (\lambda_1 - \lambda_2);$$

III. Sehne (wirkliche kürzeste Entfernung)

$$AB = 2\, r \cos \beta \sin \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2). —$$

Sichtbarkeitsgrenzen eines erhabenen Punktes. Zum Schlusse dieses Abschnittes lösen wir noch die nachstehende Aufgabe: *Welches sind die Punkte des für den Punkt D der Erde charakteristischen Meridianes und Parallelkreises, von denen aus gerade noch die Spitze E einer von D aufsteigenden Erhebung (Berg, Turm) von*

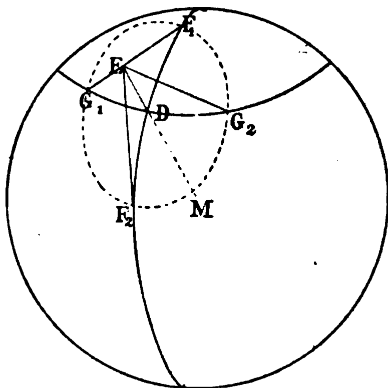
---

1) Da dieser Irrtum Anfängern als etwas ganz Gewöhnliches begegnet, so wird man gut thun, gleich anfänglich im Unterrichte daran zu erinnern und zur besseren Einsicht die Verbindung zweier Punkte mit einer Längendifferenz von 180° (Periökenpunkte) aufsuchen zu lassen. Dann nämlich fällt es auch dem ungeschulten Auge sofort auf, daß der kürzeste Weg über den Pol hinweg führt.

2) Der lineare Halbmesser eines Parallelkreises von der Breite φ ist $r_\varphi = r \cos \varphi$, die lineare Länge eines Bogengrades auf diesem Parallelkreise $= \frac{2\, r_\varphi\, \pi}{360} = \frac{r\, \pi \cos \varphi}{180}$. Eine Tabelle der Gradlängen für jeden Parallelkreis der Erde nahm der ältere Apian in seinen schon früher erwähnten „Cosmographicus liber“ auf, und diese Leistung wurde ihm von den Zeitgenossen besonders hoch angerechnet (v. Prantl, Geschichte der Ludwigs-Maximiliansuniversität zu Ingolstadt, Landshut, München, 1. Band, München 1872. S. 211). — Für $\varphi = 60°$ wird der Parallelgrad $= \frac{r\pi}{360}$, d. h. halb so groß als der Aequatorgrad.

bekannter Höhe h erblickt wird? Wir verweisen auf *Fig. 66,* worin wieder M den Erdmittelpunkt vorstellt. Wird aus E ein Tangentialkegel an die Erdoberfläche gelegt, so hat ersterer mit letzterer einen kleinen Kugelkreis gemein, dessen sphärisches Zentrum D ist, und der mit dem durch D gehenden Meridiane die beiden Punkte

Fig. 66.



F_1 und F_2, mit dem durch D gehenden Parallel dagegen die beiden Punkte G_1 und G_2 gemein hat. Der sphärische Radius $\rho = DF_1$ ist unschwer zu bestimmen; wenn nämlich noch ME, MF_1 und EF_1 gezogen werden, so ist $\sphericalangle EF_1M = 90^0$ und $\cos \rho = \frac{r}{r+h}$. Unter β_1 und β_2 die geographischen Breiten der Punkte F_1 und F_2, unter λ_1 und λ_2 die geographischen Längen von G_1 und G_2, unter β und λ endlich die geographischen Konstanten des gegebenen Punktes D verstanden, hat man zunächst:

$$\beta_1 = \beta + \operatorname{arc} \cos \frac{r}{r+h}; \ \beta_2 = \beta - \operatorname{arc} \cos \frac{r}{r+h}.$$

G_1 und G_2 haben dieselbe Breite wie D; ihre Längen

ergeben sich nach einer der zuletzt entwickelten Formeln vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\cos \rho = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos (\lambda - \lambda_1) = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos (\lambda_2 - \lambda).$$

Hieraus resultieren zum Schlusse die Werte von λ_1 und λ_2:

$$\lambda_1 = \lambda - \text{arc} \cos \frac{\frac{r}{r+h} - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta};$$

$$\lambda_2 = \lambda + \text{arc} \cos \frac{\frac{r}{r+h} - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Wir dürfen nach all diesen ausschließlich ins Gebiet der Sphärik einschlagenden Betrachtungen wohl die Lehre von der Kugelgestalt der Erde als hinreichend begründet und eingeübt erachten, um zu den im übernächsten Abschnitte an die Reihe kommenden Untersuchungen über die thatsächlichen Abweichungen der „Erdgestalt“ von der Kugel übergehen zu können. Doch soll dazwischen noch ein Abschnitt von rein pädagogischer Tendenz eingeschaltet werden.

XIV. Lehrmittel der mathematischen Geographie; Gebrauch der Globen.

Die Versuche, dem Anschauungsbedürfnisse des Menschen durch bildliche Nachahmung dessen zu Hilfe zu kommen, was uns die Natur selbst in den großartigsten Dimensionen vor Augen stellt, reichen bis ins Altertum hinauf; von den Griechen sind zwei Vorrichtungen auf uns gekommen, welche sowohl dem Unterrichte in der Astronomie und Geographie als auch der Wissenschaft selbst durch Erleichterung des Auflösens gewisser sphärischer Aufgaben zu dienen bestimmt sind. Es sind dies der *Globus* und das *Planisphär,* letzteres in späterer Zeit

auch mit dem allerdings recht wenig bezeichnenden Namen *Astrolabium*[1]) belegt.

Globen im Altertum. Daß von Einigen die Erfindung des Erdglobus dem Anaximander zugeschrieben wird, scheint auf einem Mißverständnisse zu beruhen, denn dieser Jonier war zwar (s. unsere Einleitung) der erste hellenische Kartograph, aber an die Nachbildung der Erde mit Beibehaltung ihrer wahren Gestalt konnte er schon aus dem Grunde nicht wohl denken, weil er (s. o.) von dieser noch nichts Rechtes wußte. Der erste wirkliche Erdglobenverfertiger des Altertums war Krates[2]), und wie er es dabei anfing, das wissen wir aus Strabon, welcher der kühnen Neuerung seinen allerdings nur bedingten Beifall zollte[3]). Regeln zur Konstruktion einer künstlichen Erdkugel gab zuerst Ptolemäus an[4]). Der Himmelsglobus hat ein höheres Alter als sein tellurischer Kollege, und das ist ja auch leicht begreiflich, da über die sphärische Gestalt des Firmamentes alles einig war. Ob allerdings die „Sphäre“ des um 356 v. Chr. verstor-

---

[1]) Dieselbe Bezeichnung wurde nämlich auch für ein kleines astronomisches Instrument zur Messung von Sonnenhöhen gebraucht (Peschel-Ruge, S. 237), und so hat sich in manchen Schriften eine ziemliche Konfusion der beiden verschiedenen „Astrolabien“ halber eingestellt.

[2]) M. Schmidt (Zur Gesch. d. geogr. Litter. bei Griechen u. Römern, S. 5 ff.) vindiziert das Urheberrecht energisch dem Krates, dessen Lebenszeit er in die Mitte des 2. vorchristlichen Jahrhunderts verlegt.

[3]) Strabon, lib. II, cap. 116. Berger schildert die Entstehung des ersten Erdglobus mit folgenden Worten (a. a. O., S. 9): „Krates leitete aus dem σφαιρικὸς λόγος, den Lehren der stoischen Physik und dem alten, heiligen Okeanosbegriffe in kühner Weise ein festes Bild der gesamten Erdoberfläche ab, geteilt in vier halbkreisförmige Erdinseln, die den vier Tetartemorien der Kugel entsprachen, voneinander geschieden durch einen äquatorialen und einen meridionalen Gürtelozean, die an den Polen und am Aequator rechtwinklig aufeinander trafen. Dieses symmetrische Bild drängte zur Herstellung des Globus und ist nicht wieder zu verwischen gewesen, wie die Ornamente des uns so geläufigen Reichsapfels erkennen lassen“.

[4]) Ptolemäus, Geographie, lib. I, cap. 22.

benen Eudoxus bereits eine Himmelskugel in unserem Sinne oder mehr nur eine Sternkarte war, scheint nicht entschieden werden zu können[1]), doch hatte zweifellos bereits Aratus um 270 v. Chr. die Sternbilder und Sterne auf eine wirkliche Kugel aufzutragen versucht[2]). Heis glaubt sogar aus der Lage des Widderpunktes auf einem in Neapel aufbewahrten Marmorglobus, der die Himmelsfiguren in Hautrelief darstellt, den Schluß ziehen zu sollen, daß dieses Kunstwerk dreihundert Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung angefertigt worden sei[3]). Jedenfalls pflegten während des Mittelalters einzig und allein die Araber die Globentechnik[4]); Behaims Erdglobus, mit welchem wir weiter unten die moderne Epoche dieses Kunstzweiges eingeleitet sehen werden, erschien dem Zeitalter als etwas Neues, noch nie Dagewesenes, und nicht minder wird von Augenzeugen über den großen Eindruck berichtet, den der geistvolle Wanderlehrer Konrad Celtis dadurch erzielte, daß er zum erstenmale in Vorträgen über mathematische Geographie die einzelnen Lehren am Erd- und Himmelsglobus erläuterte[5]).

---

[1]) Künßberg, a. a. O., S. 32.

[2]) Unter den mancherlei Ausgaben und Bearbeitungen, welche der allegorisierenden Sternbeschreibung des Aratus, teilweise schon im klassischen Altertum, zu teil wurden, ist wohl die beste diejenige Buhles: Ἀράτου Σολέως Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα, Leipzig 1793. Eben darin findet man eine für uns an dieser Stelle wichtige Einschaltung: Λεοντίου μηχανικοῦ περὶ κατασκευῆς τῆς Ἀρατείας σφαίρας.

[3]) Heis, Atlas coelestis novus, Bonn 1872. Einleitung.

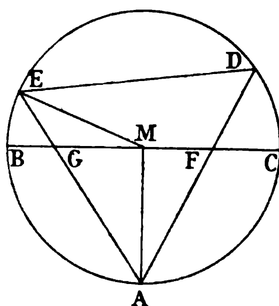
[4]) Wolf (Gesch. d. Astr., S. 195 ff.) führt drei arabische Himmelsgloben an, die bezüglich aus den Jahren 1225, 1229 und 1275 stammen. Es ist eine kleine Litteratur darüber entstanden, von welcher wir die folgenden Proben namhaft machen wollen: Assemani, Globus coelestis cufico-arabicus Veleterni Musei Borgiani, Padua 1790; Beigel, Von einem arabischen Himmelsglobus mit kufischer Schrift, Bodes Astronom. Jahrb. für 1808; Schier, Globus coelestis arabicus, qui Dresdae in museo mathematico asservatur, Leipzig 1865; Drechsler, Der arabische Himmelsglobus, angefertigt 1279 zu Maragha, zugehörig dem königl. mathematischen Salon zu Dresden, ebenda 1873.

[5]) v. Aschbach, Die Wiener Universität und ihre Humanisten im Zeitalter Kaiser Maximilians I., Wien 1877. S. 62.

Das Planisphär oder Astrolabium. Das Planisphär war nichts anderes als ein Tableau zur mechanisch-graphischen Auflösung solcher Aufgaben, welche die Neuzeit mittelst der vor achtzehnhundert Jahren noch tief in den Kinderschuhen steckenden sphärischen Trigonometrie zu bewältigen pflegt; es war im wesentlichen eine *stereographische*[1]) Abbildung der Himmelskugel

[1]) Das Wesen dieser stereographischen Projektionsart besteht darin, daß man das Auge in einen beliebigen Punkt der Kugelfläche versetzt denkt und nunmehr zentrisch die letztere auf jener Hauptkreisebene abbildet, deren Pol mit dem Projektionszentrum zusammenfällt. Da gilt denn der wichtige Lehrsatz: *Jedes stereographische Bild eines Kreises ist wieder ein Kreis.* Wir können dies durch eine sehr einfache, rein planimetrische Betrachtung nachweisen. In *Fig.* 67 ist BC Durchmesser des Kreises vom Mittelpunkte M und MA ein zu BC normaler Halbmesser. Wir ziehen aus A zwei willkürliche Sehnen AD und AE, welche von BC resp. in den Punkten F und G geschnitten werden; dann ist $\sphericalangle AGF = \sphericalangle ADE$. Bekanntlich ist der Winkel, unter welchem sich zwei Sehnen durchschneiden, halb so groß als die Summe der Zentriwinkel, welche auf den durch die beiden Sehnen bestimmten Bogen stehen; es ist mithin $\sphericalangle AGF = \frac{1}{2}(\sphericalangle BME + 90^\circ)$. Ferner ist der Peripheriewinkel halb so groß als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Zentriwinkel: $\sphericalangle ADE = \frac{1}{2}(\sphericalangle BME + 90^\circ)$. Durch Komparation ergibt sich die Wahrheit unserer Behauptung. Nehmen wir nun an, ADE sei das Achsendreieck eines schiefen Kegels von der Spitze A, dessen Basis DE ein Kreis, senkrecht zur Ebene der Zeichnung, wäre, so wäre auch die Projektionsfigur FG als sogenannter *Wechselschnitt* ein Kreis, und die Fundamentaleigenschaft der stereographischen Abbildung ist erhärtet. Für eingehendere Belehrung verweisen wir auf die nachstehenden Schriften: Reusch, Die stereographische Projektion, Leipzig 1881; Tissot, Die Netzentwürfe geographischer Karten, deutsch von Hammer, Stuttgart 1887. S. 120 ff. S. 183 ff.

Fig. 67.



und unterscheidet sich darin von dem Triedometer (Abschnitt VIII), bei welchem die *orthographische* Projektion zur Anwendung gelangte. Das Planisphär, welches in neuerer Zeit einzig in dem vortrefflichen Buche von Wolf[1]) diejenige Beachtung gefunden hat, welche es vollauf verdient, soll ursprünglich von Hipparch erfunden worden sein, wurde aber erst von Ptolemäus in die Wissenschaft eingeführt[2]). Während des Mittelalters verfeinerten die Araber[3]) die Einrichtung des In-

---

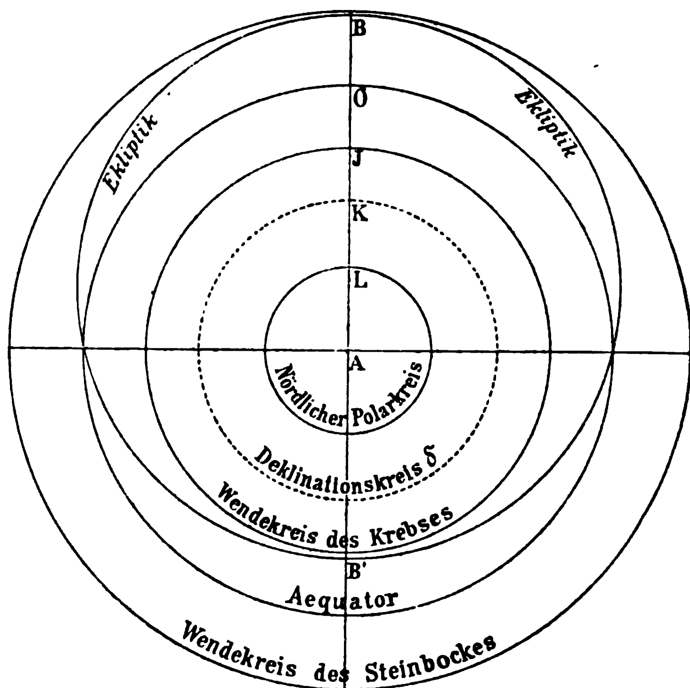
[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 162 ff.

[2]) Das Wort „*Analemma*", welches Ptolemäus zur Aufschrift für die eine seiner beiden diesem Gegenstande gewidmeten Schriften wählte, bedeutet eben stereographische Aufnahme; letzteres Wort führte erst 1613 der Jesuit Aiguillon ein (Cantor, Vorles. über Gesch. d. Math., S. 358). Die zweite jener Schriften, „*Planisphärium*" genannt, lehrte eben den neuen Zeichnungsmodus für die Astronomie nutzbar machen. Das frühere Mittelalter kannte letztere nur in arabischen Bearbeitungen, und nach einer solchen fertigte im 12. Jahrhundert, unter der Leitung des Juden Abraham Savosarda den lateinischen Text der Flamänder Rodolfus Brugensis, dessen Version dann auf lange Zeit für maßgebend gehalten wurde. Diese Bearbeitung ist von Weißenborn (Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters, Berlin 1888. S. 111 ff.) zum Gegenstande eingehender Analyse gemacht worden, und zwar hat sich der erwähnte Autor die Mühe gegeben, alle die einzelnen Sätze dieser Schrift mit in modernmathematischem Geiste gehaltenen Beweisen zu versehen. Erst 1558 erschien davon eine bessere Ausgabe in Venedig, veranstaltet von dem bekannten Commandinus.

[3]) Von arabischen Astrolabien handeln die folgenden Arbeiten: Sédillot, Description d'un astrolabe construit par Abd-Ul-Aïma, ingénieur et astronome persan, Ann. de l'observatoire de Paris, IX; Sarrus, Description d'un astrolabe construit à Maroc en 1208, Straßburg 1852; Morley, Description of a planispheric Astrolabe constructed by Shah Sultan Husain Safawi, London 1856; Wöpcke, Ueber ein in der kgl. Bibliothek zu Berlin befindliches arabisches Astrolabium, Berlin 1858; Dorn, Drei in der kaiserl. öffentl. Bibliothek zu St. Petersburg befindliche astronomische Instrumente mit arabischen Inschriften, St. Petersburg 1863; Kržiž, Beschreibung, wissenschaftliche Zergliederung und Gebrauchsweise des persisch-arabischen Astrolabiums, Archiv d. Math. u. Phys., 45. Teil. S. 289 ff. In Persien hat Olearius (s. Kästner, Gesch. d. Math., 2. Band, Göttingen 1797. S. 424) die Handhabung dieses Instrumentes noch als eine in weiten Kreisen verbreitete angetroffen. Zwei wahrscheinlich von Regiomontanus in Ofen

strumentes, aber auch im Westen verschwand es niemals gänzlich von der Tagesordnung und wurde bis ins

Fig. 68.



17. Jahrhundert herein vielfach zum Gegenstande monographischer Darstellungen gemacht[1]). Zu unterscheiden sind

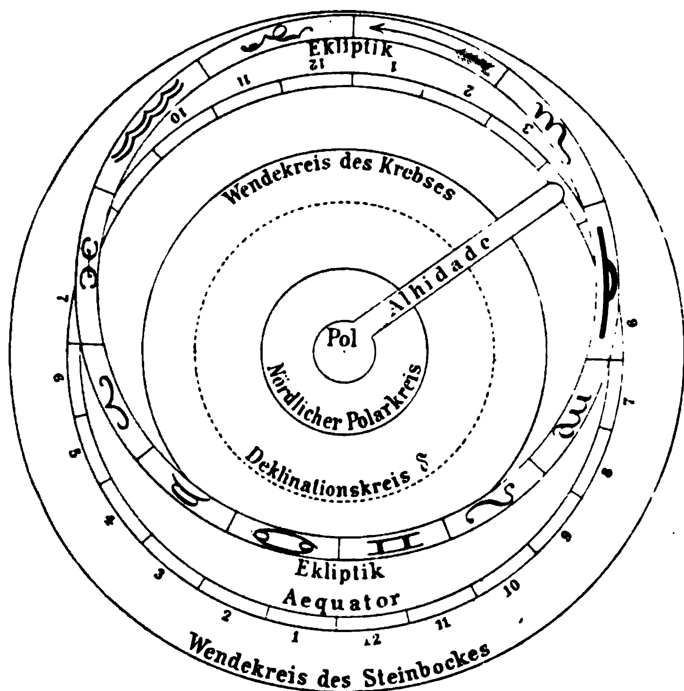
---

erworbene kufische Astrolabien befinden sich in Nürnberg (s. Günther, Die mathematische Sammlung des germanischen Museums, Leopoldina 1878. S. 95).

[1]) Eine gute Uebersicht der späteren von dem Astrolabium handelnden Litteratur gibt Wolf (Gesch. d. Astr., S. 195 ff.). Wir fügen als ein sehr altes Dokument unserer Sprache hinzu das 1525

nach dem älteren Sprachgebrauche die *Mater Astrolabii* und das *Rete Astrolabii*; eine schematische Darstellung

Fig. 69.



beider führt uns *Fig. 68,* ein getreues Bild dagegen führt uns *Fig. 69* vor[1]). In der erstgenannten Figur ist *A* der

---

bei Silvanus Ottmar in Augsburg gedruckte Büchlein „Erklärung und grundtliche unterweysung alles nutzes, so in dem edlen Instrument, Astrolabium genannt, begriffen und erfunden wirt".

[1]) Vgl. Günther, Die Kosmographie des Heinrich Schreiber von Erfurt, Zeitschr. f. wissensch. Geogr., 2. Jahrgang. S. 49 ff. Die dort analysierte, 1522 herausgekommene Schrift des Schreiber

Nordpol, die um ihn als Mittelpunkt gezogenen Kreise stellen, von innen nach außen gerechnet, den Polarkreis, den Wendekreis des Krebses, den Aequator[1]) und den Wendekreis des Steinbockes vor[2]); die Punkte, in welchen ihre Peripherien den Radius AB schneiden, sind resp. L, J, O und B. Die Ekliptik wird, wie wir wissen, ebenfalls ein Kreis, ihre Eigenschaft, die beiden Wendekreise resp. in B und B' zu tangieren, kann sie natürlich nicht verlieren, und so ist denn ihre Einzeichnung leicht genug zu bewerkstelligen. Die älteren Astrolabien waren meist nur für bestimmte Verhältnisse aptiert; später aber trug man der Sonnendeklination, unter welcher man sich gerade befand, dadurch Rechnung, daß man den — in der Figur gestrichelten — Kreis, welcher dem allenthalben um die Deklination δ vom Aequator abstehenden Parallelkreise des Himmels entspricht, erst nach der Hand in das Diagramm einzeichnete. Wir setzen den Halbmesser des Aequators $= \rho$ und haben dann, unter ε, wie immer, die Ekliptikschiefe verstanden,

$$AJ = \rho \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ AB = \rho \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$AK = \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\delta}{2}\right),\ AL = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Diese von selbst einleuchtenden Formeln gestatten sofort die Konstruktion der Radien der einzelnen Kreise, und von nun an kann jede sphärisch-astronomische Aufgabe, wie wir solche in unseren Abschnitten VIII und IX abgehandelt haben, mittelst des Astrolabiums, dessen Mater wir soeben vor unseren Augen entstehen sahen, mechanisch aufgelöst werden. Das Rete (auch „Aranea“

(Grammateus) enthält u. a. eine Abbildung des Astrolabiums, welche zur Vorlage für unsere *Fig. 69* gedient hat.

[1]) Statt Aequator heißt dieser Kreis, wie überhaupt im Mittelalter durchgängig, „*Circulus aequinoctialis*“.

[2]) Natürlich kann jeder beliebige Kreis der Südhalbkugel zur Darstellung gebracht werden; solcher entzieht sich nur der südliche Pol selbst, dem ja ein Kreis von unendlich großem Radius entsprechen würde.

genannt) war eine ausgeschnittene, den Tierkreis *(Fig. 69)* und eine Anzahl hellerer Sterne enthaltende Scheibe, welche sich konzentrisch über der Mater drehen ließ. Wegen der mit dem Astrolabium vorzunehmenden Manipulationen möchten wir vorzugsweise auf das Schriftchen des Grammateus und auf die oben zitierte Abhandlung von Kržiž verweisen.

Neuere bekanntere Globen. Den ersten Erdglobus in neuerer Zeit erstellte, wie schon erwähnt, gegen Ende des 15. Säkulums der Nürnberger Patrizier Martin Behaim, der in portugiesischen Diensten die Welt gesehen und u. a., in Gemeinschaft mit Diogo Cão, den Kongo entdeckt hatte[1]). Er führt von Kreisen bloß den Aequator, die Wende- und Polarkreise, ein eigentliches Gradnetz fehlt ihm noch, während der unmittelbar danach verfertigte „Globus von Laon" bereits mit einer Anzahl von Meridianen und Parallelen versehen ist[2]). Der nächstberühmte Globus war der des Johann Schöner[3]), eine neue Aera in der Konstruktion künstlicher Weltkugeln aber markieren der schöne Erd- und Himmelsglobus, welche beide der berühmte Gerhard Mercator resp. in den Jahren 1541 und 1551 zustande brachte[4]). Sehr verdienstlich nach der wissenschaftlichen wie künstlerischen Seite waren ferner die Leistungen des jüngeren Apian[5])

---

[1]) Vgl. Doppelmayr, a. a. O., S. 27 ff.; v. Murr, Diplomatische Geschichte des portugiesischen berühmten Ritters Martin Behaims, Nürnberg 1778; Ghillany, Geschichte des Seefahrers Martin Behaim, ebenda 1853; Ruge, Gesch. d. Zeitalters d. Entdeck., S. 104 ff. An allen vier Stellen ist auch eine Abbildung des Behaimschen „Erdapfels" zu finden, der heute noch in Nürnberg zu sehen ist.

[2]) Vgl. hierzu die Abhandlung „Die ältesten Erdgloben" (Zeitschr. f. wissensch. Geogr., 1. Jahrgang. S. 179 ff.).

[3]) Wieser, Magalhaensstraße und Australkontinent auf den Globen des Johannes Schöner, Innsbruck 1881.

[4]) Breusing, Gerhard Mercator, der deutsche Geograph, Duisburg 1869.

[5]) Günther, Die Münchener Globen Philipp Apians, Jahrbuch für Münchener Geschichte, 2. Jahrgang. S. 131 ff.

und des Engländers Emmerie Mollineux[1]. Mehr und mehr suchte man sich späterhin in ungeheuerlichen Dimensionen zu überbieten, wie denn die beiden 1683 von Coronelli für Ludwig XIV. ausgeführten Globen[2]) einen Durchmesser von 12 Fuß erreichten. Einzelne Mechaniker haben in neuerer Zeit auch diese Grenze noch überschritten[3]), doch braucht wohl kaum erinnert zu werden, daß die Wissenschaft selbst solchen Kolossalgebilden vollkommen gleichgiltig gegenübersteht. Außer der Erde und der Sternsphäre hat man auch später noch den *Mond* zum Gegenstande verkleinerter Nachbildung sich ausersehen und *Mondgloben* in teilweise ausgezeichneter Ausführung hergestellt[4]).

Beschreibung des Globus. Wenn wir im folgenden vom Gebrauche des Himmels- und Erdglobus sprechen, so ist zunächst zu betonen, daß uns der Zweck, mittelst des ersteren in die Kenntnis des gestirnten Himmels einzuführen[5]), hier ebenso ferne liegt wie die Be-

---

[1]) Zeitschr. f. wissensch. Geogr., 2. Jahrgang. S. 233.

[2]) Eine erstmalige Beschreibung dieser Globen lieferte 1704 De la Hire, eine neuere Le Tort (La Nature, 1775. Nr. 116).

[3]) Wyld soll in London (Leicester Square) einen Globus von 60 engl. Fuß Diameter aufgestellt haben. Ein angeblich noch größerer ziert die Pariser Weltausstellung.

[4]) Eine Subskription auf den Mondglobus eines gewissen J. Russell wurde 1786 eröffnet (Hindenburgs Archiv f. d. reine u. angew. Mathematik, 2. Band. S. 112 ff.). Sehr Verdienstliches leisteten später Wilhelmine Witte und Riedl v. Leuenstern (Mädler, Gesch. d. Himmelskunde, 2. Band. S. 512 ff), „und noch in neuerer Zeit versuchte sich Dickert in Bonn, unter Anleitung von Julius Schmidt, in Konstruktion eines kolossalen Mondreliefs“ (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 669).

[5]) Die *Astrognosie*, die Kunst, einzelne Gestirne mit ihren konventionellen Namen zu benennen, gehört nach unserer — wie wir sehr wohl wissen, von derjenigen mancher Fachgenossen abweichender — Ueberzeugung *nicht* in die mathematische Geographie, sondern in eine besondere astronomische Propädeutik. Wer sich in dieser Kunst üben will, mag sich an Bodes immer wieder neu aufgelegte „Anleitung zur Kenntnis des gestirnten Himmels“ (1. Auflage, Hamburg 1768) oder an Epsteins „Geonomie“ (Wien 1888. S. 57—74) halten. Am besten verhilft zu einiger Sicherheit das

nutzung des letzteren beim Unterrichte in der politischen und topischen Erdkunde. Uns dienen beide Arten von Kugeln lediglich dazu, *am Modelle die abstrakteren Wahrheiten der astronomischen Geographie zu erläutern.* Es braucht zu dem Ende nichts weiter als einer Kugel, die mit einem messingenen *Meridianringe* versehen und mit diesem in vertikaler Ebene drehbar ist, während zugleich zwei Punkte dieses Ringes als *Pole* eine Achse bestimmen, um welche die ganze Kugel frei rotieren kann. Der Meridianring hat stets zwei Punkte gemein mit einer Holzplatte, welche als *Horizont* dient und gemeiniglich eine die Zeit repräsentierende Einteilung, wohl auch mit den zwölf Tierkreiszeichen, an sich trägt. Die Kugel selbst enthält, je nach ihrer Bestimmung, ein Gradnetz und die wichtigsten Sterne, Sternbilder, Städte und Länder, wobei auf peinliche Richtigkeit der Ortsbestimmung nicht eben viel ankommt, da in der Gegenwart niemand mehr auf den Gedanken verfallen wird, sich des Globus zu einem anderen als zu didaktischem Behufe zu bedienen. Am Nordpole pflegt ein *Stundenkreis* aus Metall angebracht zu sein, dessen Ebene derjenigen des Aequators parallel sein muß, und eine mit der Himmels- oder Erdachse, in zu dieser senkrechter Stellung, fest verbundene Zeigernadel ermöglicht es, am Limbus der Stundenscheibe bestimmte Zeiten abzulesen. Am Fußgestelle sollte ein Kompaß zur Ermittlung der Nordsüdrichtung nicht fehlen [1]). So, wie wir sie eben beschrieben haben, ist die Himmels- wie die Erdkugel ohne weiteres als Lehrmittel der mathematischen Geographie

---

stete Vergleichen des Firmamentes mit Globen, *Sternkarten* oder *Sternkegeln*, wie solche Funk (Leipzig 1771) beschrieben hat. Die Sternkarten sollten mit einem Ausschnitte versehen sein, welcher so gedreht werden kann, daß in der Höhlung gerade immer die in einer bestimmten Nacht sichtbaren Sterne erscheinen. Sehr passend befanden wir die Eckhardt-Soldansche Sternkarte (6. Auflage, Gießen 1888).

[1]) Für Süddeutschland wird man genau genug die *magnetische Deklination* oder *Missweisung* mit 12° bis 13° in Rechnung bringen (Hammer, Ueber den Verlauf der Isogonen im mittleren Württemberg, Stuttgart 1886. S. 46).

verwendbar, und in dieser Form wird sie auch gewöhnlich von den Verlagshandlungen geliefert. Als besonders empfehlenswert glauben wir die Adami-Kiepertschen Globen bezeichnen zu dürfen. Der Lehrer, welcher in der Unterrichtsstunde den Globus häufig zu Rate ziehen sollte, findet in unterschiedlichen Schriften [1]) Anweisungen, wie er sich dabei verhalten soll; wir selbst müssen uns hier auf einige wenige Winke beschränken.

Lösung mathematisch-geographischer Aufgaben mit Hilfe der künstlichen Erd- und Himmelskugel. Erste Pflicht ist es in jedem Falle, den Globus zu orientieren und für den Ort, mit dem man es zu thun hat, richtig einzustellen. Zu dem Ende muß die geographische Breite φ dieses Ortes bekannt sein. Man dreht also, nachdem durch Beobachtung der Magnetnadel der Meridianring mit dem wirklichen Himmelsmeridiane in Uebereinstimmung gebracht ist, diesen Ring solange, bis der Nordpol von dem hölzernen Ringe gerade um den Bogen φ absteht. Eine Probe für die Richtigkeit der Einstellung ergibt sich, wenn man den fraglichen Ort gerade unter den Meridianring bringt; dieser Ort muß alsdann den höchsten, d. h. von der Horizontalebene am weitesten entfernten Punkt einnehmen, weil der Holzring nunmehr mit dem wahren Horizonte des fraglichen Ortes identisch geworden ist.

Um nun zunächst beim Himmelsglobus zu bleiben, so kann man mit seiner Hilfe leicht bestimmen, wie lange ein gewisser Stern bei der täglichen Umdrehung des Himmelsgewölbes oberhalb des Horizontes verbleibt, wann er aufgeht und wann er untergeht. Man dreht den Globus solange, bis dieser Stern gerade an der Westseite des Horizontalringes erscheint, und liest oben am Stundenringe die Zeit t_1 ab; dann dreht man weiter, bis der

---

[1]) Diesterweg, a. a. O., S. 127 ff.; Wollweber, Globuskunde, Freiburg i. B. 1875; Adam, Globus; Anwendung des Globus in der astronomischen Geographie, nebst einigen Zusätzen, Wien 1887.

Stern auf der entgegengesetzten Seite in den Horizontalring gebracht ist, und sieht zu, welche Zeit t_2 der Stundenzeiger nun angibt. Die Zeit der Sichtbarkeit des Sternes ist dann, in Stunden ausgedrückt, $(t_2 - t_1)$, und die Größe des Sichtbarkeitsbogens, in Graden ausgedrückt, $15 (t_2 - t_1)$. Ein Blick auf den Globus vergewissert auch darüber, welche Sterne in die Kategorie der nördlichen und welche in die Kategorie der südlichen Zirkumpolarsterne gehören.

An dem richtig orientierten Erdglobus kann man fürs erste mit Leichtigkeit die einem gegebenen Punkte entsprechenden Orte der Gegenwohner, Nebenwohner und Gegenfüßler aufzeigen, denn alle vier Punkte befinden sich bei der von uns vorausgesetzten Stellung unter dem Meridianringe. Die Tagbogen der Sonne, ihre Auf- und Untergangspunkte für die wechselnden Deklinationen dieses Himmelskörpers lassen sich an der Erdkugel ebenso zur Anschauung bringen, wie wir es vorhin, als es sich um einen beliebigen Stern handelte, an der künstlichen Himmelskugel gethan haben. Der Satz von der Gleichheit der Polhöhe und geographischen Breite tritt am Globus unmittelbar zu Tage. Indem wir nach und nach verschiedene Städte unter den Meridianring der sich drehenden Erdkugel bringen und zugleich den sich bewegenden Stundenzeiger beobachten, können wir den Zeitunterschied dieser Orte direkt ablesen und erkennen, längs welches Meridianes es Mitternacht ist, wenn man z. B. in München 12^h mittags hat. Die Lehre von der Sphaera parallela und obliqua läßt sich ohne weiteres durch geeignete Einstellung des Poles verdeutlichen, und der Versinnlichung der Sphaera recta erwächst ein rein äußerliches Hindernis einzig und allein durch den Umstand, daß der Pol, der doch etwas erhaben gearbeitet sein muß, nicht ganz genau in die Ebene des Holzringes gebracht werden kann. Auch die Dämmerungsverhältnisse sind bequem zu erläutern; man bemerkt, sobald der Globus auf Berlin eingestellt ist, sofort, daß der Wendekreis des Krebses, welchen die Sonne am längsten Tage beschreibt, nicht tiefer als um denjenigen Bogen unter den Horizont hin-

abreicht, welcher die Dämmerungsgrenze (s. Abschnitt IX) markiert, und es müssen sich deshalb gegen Ende Juni, wie es auch die Erfahrung bestätigt, in der Reichshauptstadt Abend- und Morgendämmerung die Hand reichen. Da die Sonne so gut wie unendlich weit von der Erde entfernt ist, so darf man die Gesamtheit der von ihr uns zugesandten Strahlen als ein Parallelstrahlenbündel ansehen; dasselbe bestimmt auf der Erdkugel einen größten Kreis, welchen man die *Beleuchtungsgrenze* nennt, und welchen man am Erdglobus sehr leicht auffindet: man sucht einfach auf der Ekliptik den momentanen Sonnenort, markiert ihn und richtet es so ein, daß dieser Punkt unter dem Meridianringe den höchsten Platz einnimmt, denn dann schneidet der Horizontalring selbst den gewünschten Hauptkreis aus. — Alle diese Aufgaben gehören der Sphärik an, doch entfaltet, wie wir hier antizipierend wohl bemerken dürfen, der Globus seine volle Wirksamkeit besonders auch bei der Diskussion jener Fragen, welche dem Gebiete der theorischen Astronomie angehören und uns im dritten Kapitel dieses Werkes beschäftigen werden, so vor allem bei der Erklärung der Jahreszeiten. Eine eigenartige Anwendung dieses Hilfsmittels hat ferner Adam gemacht bei der Auflösung einer Aufgabe, welche seiner Ansicht zufolge sowohl für die Meteorologie im allgemeinen als auch speziell für die Entscheidung darüber, ob einer Oertlichkeit der Charakter als „klimatischer Kurort“ zugesprochen werden dürfe, von Belang sein kann: „Wie lange wird die Nordseite und wie lange die Südseite einer vertikalen Wand, welche die Ostwestrichtung hat, an einem gegebenen Tage von der Sonne beschienen?“ [1]) Hiemit möge das-

[1]) Ungemein gründlich wird diese einfache Frage erörtert in einer andern Schrift von Adam: Bruchstück aus der mathematischen Geographie mit besonderer Berücksichtigung einiger Beleuchtungsverhältnisse, Wien 1885. Rechnerisch betrachtet, steht die Sache offenbar so. Die Wand hört auf, beleuchtet zu werden, sobald morgens die Sonne durch den ersten Vertikal hindurchgegangen ist. In dem Augenblicke, da letzteres geschieht, kennt man vom Dreieck Zenit-Pol-Stern den Winkel am Zenit = 90°, die

jenige seinen Abschluß finden, was über die Handhabung der gewöhnlichen Globen zu sagen ist [1]).

Anderweite Lehrmittel. Man hat jedoch es bei diesen letzteren nicht bewenden lassen, sondern großen

---

ihm gegenüberliegende Seite = $90^\circ - \delta$, die Seite Zenit = Pol = $90^\circ - \varphi$; es sind demnach drei Stücke bekannt, und der am Pole gelegene Winkel σ kann leicht gefunden werden. Bezeichnet man nämlich die ihm gegenüberliegende Seite mit x, so liefern uns Sinus- und Kosinussatz diese beiden Gleichungen:

$$\sin x = \sin \sigma \cos \delta, \ \cos x = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Wird hieraus x eliminiert, so bleibt $\cos \sigma = \operatorname{tang} \delta \operatorname{cotang} \varphi$. Wenn dann unter s_0 wieder der Stundenwinkel des Sonnenaufgangspunktes verstanden wird, so ist die Dauer der Besonnung, Morgen und Abend zusammengerechnet, proportional $2 (s_0 - \operatorname{arc} \cos [\operatorname{tang} \delta \operatorname{cotang} \varphi])$. Will man diese Aufgabe am Globus lösen, so bedarf man einer Zuthat, die an den meisten Apparaten angebracht ist, sonst aber wenig Verwendung findet, nämlich eines messingenen Quadranten, welchen man beliebig an den Meridianring anschrauben kann. Man schraubt ihn im Zenit ein und markiert den Punkt, in welchem der vom Aequator um δ° abstehende Parallelkreis gerade über den Horizontalring sich erhebt. Hierauf dreht man den Globus, stellt ihn, sobald der bezeichnete Punkt unter den den ersten Vertikalkreis repräsentierenden Quadranten gekommen ist, und liest am Stundenkreise die dieser Drehung entsprechende Zeit ab. Dieselbe ist proportional dem Winkel $(s_0 - \sigma)$. Es erhellt, daß sich die Lösung lediglich rechnerisch, nicht aber dem Gedankengange nach komplizieren würde, wenn die Mauer nicht in die Ebene des ersten Vertikales fiele, sondern mit dieser einen spitzen Winkel $\pm \beta$ bilden würde. Die obige Bezeichnung im übrigen beibehalten, hätte man eben aus den beiden Gleichungen

$$\sin x = \frac{\sin \sigma \cos \delta}{\sin (90^\circ \pm \beta)}, \ \sin \delta = \cos x \sin \varphi + \sin x \cos \varphi \cos (90^\circ \pm \beta)$$

die Unbekannte x wegzuschaffen und die andere Unbekannte σ zu berechnen.

[1]) Die Verfertigung der Erd- und Himmelsgloben wurde bis zur jüngsten Zeit noch genau nach Maßgabe der Regeln bewerkstelligt, welche bereits Albrecht Dürers „Underweysung der Meßung mit dem Zirckel und Richtscheyd“ (Nürnberg 1525) aufgestellt hatte. Man machte nämlich zuerst die Kugel und überzog dieselbe sodann mit Kreiszweiecken, welche um so besser sich der Kugel anzuschmiegen schienen, je kleiner der Winkel an einer ihrer beiden Ecken, je größer mithin ihre Anzahl war. Es hat

Scharfsinn in der Erfindung von Apparaten bewiesen, mittelst deren die einzelnen Wahrheiten der mathematischen Geographie sowohl dem Verständnis des Anfängers nähergerückt als auch dem mit der Sache schon Vertrauteren in einem neuen Lichte dargestellt werden sollen. Im allgemeinen ist der Gebrauch solcher Apparate beim Unterrichte wohl zu empfehlen [1]), wiewohl auf der anderen Seite nicht geleugnet werden kann, daß, je komplizierter die Bewegungsmechanismen ausfallen, um so größer auch die überhaupt nicht zu unterschätzende Gefahr wird, der Schüler möge sich in seiner Aufmerksamkeit durch die Beachtung von Nebendingen stören lassen [2]). Wir halten es aber immerhin für die Pflicht eines Handbuches, eine möglichst vollständige Uebersicht über die zahlreichen Unterrichtsmittel dieser Art zu geben, und zwar werden wir uns, wie in diesem Abschnitte überhaupt, nicht durch systematische Rücksichten beengen lassen, sondern auch solche Vorrichtungen in den Bereich unserer Darstellungen hereinziehen, bei denen es sich um die Verdeutlichung der *Bewegungen im Weltraume* handelt. Es wird diese unleugbare Inkonsequenz wohl in dem Umstande ihre Rechtfertigung finden, daß ja doch dieses Buch nicht für erste Anfänger geschrieben ist.

---

aber Höfler (Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Zylinderstutzes und der Kugel, Zeischr. f. math. u. naturw. Unterr., 18. Band. S. 1 ff.) den Nachweis geführt, daß sich der *Schlussfehler* an den Polen auch durch noch so weit gehende Vermehrung der Segmente nicht beseitigen läßt, vielmehr nur dadurch, daß man den Begrenzungslinien dieser Segmente die Gestalt von Sinuskurven gibt.

[1]) In weiterer Ausführung eines vor dem zweiten deutschen Geographentage gehaltenen Vortrages hat Krumme (Ueber den Unterricht in der astronomischen Geographie in den unteren und mittleren Klassen höherer Schulen, Pädagog. Archiv, 24. Band. S. 511 ff.) eine Fülle beherzigenswerter Ratschläge und didaktischer Winke nach dieser Richtung hin gegeben.

[2]) Diesterweg, a. a. O., S. 108. „Wie Hausmannskost die gesundeste Kost ist, und wie die selbstgezogenen Früchte dem Magen besser bekommen als die gekauften, so leisten auch die selbstersonnenen und selbstgefertigten Apparate mehr als die von anderen erdachten und ausgeführten“ — eine Behauptung, die man, freilich aber nur sehr cum grano salis, wohl gelten lassen kann.

Wir wenden uns also jetzt der Aufzählung und Kennzeichnung der einzelnen Veranschaulichungsmittel selbst zu.

I. Der Induktionsglobus [1]). Eine aus schwarzem Schiefer gefertigte Vollkugel leistet sehr gute Dienste, um daran graphisch gewisse Aufgaben, hauptsächlich die Transformation der Koordinaten betreffend, zu lösen, welche sonst die Anwendung von Rechnung erheischen würden. Gewöhnlich ist dieser Globus noch mit Halbmeridian und Stundenring ausgerüstet.

II. Anderssohns teilbarer Globus [2]). Zerlegt man die Oberfläche der Kugel, dem ihr einbeschriebenen Hexaeder entsprechend, in sechs kongruente sphärische Vielecke und denkt sich jedes zur Basis einer vierseitigen Pyramide gemacht, während die Spitzen dieser Pyramiden sämtlich im Kugelzentrum liegen, so ist die Zerteilung der ganzen Kugel in sechs kongruente Stücke angedeutet. Bei Anderssohns Globus läßt sich diese Teilung sowie die nachherige Wiederzusammensetzung leicht bewerkstelligen.

III. Die Wetzelschen Apparate [3]). Wetzel hat wohl zuerst den Versuch gemacht und mit Glück durchgeführt, Himmelsglobus, Armillarsphäre, Tellurium und Lunarium zu kombinieren. Aequator und Ekliptik sind durch feste Metallringe dargestellt, und in den Mittelpunkt der Kugel kann die Erde mit einem verstellbaren Horizonte eingesetzt werden.

IV. Goepferts Ringglobus [4]). Die Bestimmung und

---

[1]) Brandegger-Locher, Induktionsglobus, Ellwangen 1856.

[2]) Dieser Globus ist von seinem Erfinder, Aurel Anderssohn in Breslau, dem er auch patentiert ward, allerdings zu einem ganz anderen Zweck konstruiert worden, nämlich zu einer Stütze für seine zur Beseitigung der Newtonschen Gravitation ausgedachte neue Theorie (Die Theorie vom Massendruck aus der Ferne in ihren Umrissen dargestellt, Breslau 1880. S. 6 ff.). Immerhin kann, wie u. a. die Prämiierung des „Kugelsextanten“ durch den wissenschaftlichen Kongreß zu Amsterdam (1879) beweist, dieser Globus als ein überhaupt zweckdienliches Lehrmittel wohl erachtet werden.

[3]) Beschrieben bei Diesterweg, a. a. O., S. 129 ff.

[4]) Dieser Ringglobus ist ursprünglich aus der Lehrmittel-

Anordnung dieser Vorrichtung ist im wesentlichen die gleiche wie bei den Wetzelschen Apparaten, obwohl in den Einzelheiten Verschiedenheiten nicht zu verkennen sind. Sehr gut eignet sich der Ringglobus, um den Gang der Sonne durch die Ekliptik und zugleich die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne zu versinnlichen.

V. Deichmanns Chronometer [1]). „Mit einer guten Uhr (Regulatorwerk),“ so kennzeichnet Coordes in Kassel dieses Instrument, „ist hier ein Tellurium derartig verbunden, daß dasselbe die Bewegungen von Erde und Mond nicht schematisch, wie bei den gewöhnlichen Tellurien, sondern astronomisch richtig zeigt.“

VI. Der Olinsche Zeitglobus [2]). Diesem Globus fehlt der Horizontalring, doch kann man gleichwohl die in ihrem Meridianringe drehbare Kugel so einstellen, daß die — durch einen starken Pfeil sichtbar gemachte — Erdachse mit der Horizontalebene, auf welcher das Stativ des Globus steht, einen Winkel bildet, welcher der Breite des Beobachtungsortes gleich ist. An Stelle des Horizontalringes trägt der Globus, neben dem gewöhnlichen Stundenringe am Pole, auch noch einen nach Zeitmaß geteilten Aequatorring, so daß in der That alle ir-

---

fabrik von J. Felkl und Sohn zu Roztok bei Prag hervorgegangen; den obigen Namen haben wir ihm deswegen beigelegt, weil eine Schrift von Göpfert (Methodische Bemerkungen zum Gebrauche eines wertvollen Lehrmittels, Roztok-Prag 1883) dem Publikum zuerst Nachricht davon gegeben hat. — Auch von Benecke in Berlin ist übrigens eine Armillarsphäre, d. h. (s. o. Abschnitt V) ein aus den wichtigsten in der sphärischen Astronomie vorkommenden Kreisen zusammengesetztes Kugelskelett, angegeben worden.

[1]) Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates ist uns nicht bekannt außer der von der Verlagshandlung (L. Deichmann in Kassel) herausgegebenen Broschüre. Der Apparat selbst wechselt, je nach der Ausstattung, im Preise (50—95 Mark).

[2]) Der Zeitglobus wurde von Russel A. Olin am 20. Februar 1880 der wissenschaftlich-nationalen Erziehungsassociation zu Washington vorgelegt und von einer Anzahl amerikanischer Autoritäten, die allerdings mit dem schon längst in der Alten Welt auf diesem Gebiete des Anschauungsunterrichtes Geleisteten wenig bekannt sein mochten, enthusiastisch gepriesen.

gendwie von Zeitunterschieden handelnde Fragen, so zumal der Datumswechsel, sich an dem so justierten Globus in recht augenfälliger Weise illustrieren lassen.

VII. Das Picksche Tellurium[1]). Die Tendenz dieses Telluriums geht vornehmlich dahin, die Vereinigung der Erdumdrehung und Erdbewegung im Raume mit dem Parallelismus der Erdachse augenfällig nachzuweisen. Für Schulen dürfte sich dasselbe sehr empfehlen, da es leicht im großen Maßstabe auszuführen ist.

VIII. Die Modelle des Mondlaufes von Oppel und Hippauf[2]). Dieselben sind dazu bestimmt, die Thatsache ersichtlich zu machen, daß der Mond, indem er sich um die selbstbewegte Erde in einem Kreise dreht, in Wirklichkeit eine sogenannte Epizykloide beschreibt.

IX. Das Ekliptikon von Goetz[3]). Die auszeichnende Eigenschaft anderen, sonst ähnlich angelegten Tellurien gegenüber besteht — neben einer nicht unwesentlichen Vereinfachung der Führungsmechanismen — darin, daß das Ganze von einer großen, die Sternbilder tragenden Glasglocke umhüllt ist, so daß sich immer der jeweilige Stand der Erde, wenigstens annähernd, auf den gestirnten Himmel projizieren läßt.

---

[1]) H. Pick, Ein neues Tellurium, Programm des k. k. Staatsgymnasiums in Salzburg zum Schlusse des Schuljahres 1877.

[2]) Oppel, Beschreibung einiger neuer Veranschaulichungsmittel für den mathematisch-geographischen Unterricht, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 1. Jahrgang. S. 116 ff.; Hippauf, Die Mondbahn und die Veranschaulichung durch den Mondbahnzirkel, Halberstadt 1869. Auf ein von Oppel angegebenes Modell der Planetenbahnen wird im dritten Abschnitte einzugehen sein.

[3]) Der oben genannte Apparat ist seinem Autor patentiert und in Schulen mehrfach eingeführt, jedoch unseres Wissens noch nicht besonderer Beschreibung teilhaftig geworden. — In einer gewissen Hinsicht stimmt seinem Zwecke nach mit diesem Tellurium dasjenige überein, welches E. Naumann konstruiert, öffentlich aber noch nicht beschrieben hat. Die Bewegung der Erde wird nämlich durch einen Zeiger jeweils auf einer den Apparat umgebenden und das Himmelsgewölbe darstellenden Cylinderfläche abgebildet, welch letztere die Zodiakalsternbilder trägt.

X. Der Globus von Brix [1]). Derselbe hat mit dem Olinschen Zeitglobus (s. o.) das gemein, daß der Horizont, obwohl er diesmal vorhanden und mit einer Teilung in Monate und Tage versehen ist, nicht in der sonst üblichen Weise in Verbindung mit der Kugel selbst steht; diese ist vielmehr durch ein Gelenk so mit der Horizontalplatte verbunden, daß die Erdachse unter einem Winkel = ε gegen den Horizont eingestellt werden kann. Außerdem aber ist ein Vertikalkreis von Metall angebracht, welcher auf zwei festen Säulen ruht, und dessen Ebene stets, wie sich auch die Erdkugel drehen mag, durch den Mittelpunkt derselben hindurchgeht. Der so angedeutete Hauptkreis repräsentiert die Beleuchtungsgrenze. Dem Mittelpunkte des Kreises steht horizontal gegenüber ein gleichfalls mit der Horizontalscheibe fest verbundener, die Sonne vorstellender Index, und wenn man also die Horizontalplatte dreht, so beschreibt der Index an der Kugelfläche einen größten Kreis, der nach dem, was vorhin über die Neigung der Erdachse gesagt ward, kein anderer sein kann als die Ekliptik. Man sieht sofort, wie einfach durch dieses sinnreiche Arrangement die gewöhnlichen mathematisch-geographischen Aufgaben sich erledigen lassen.

X. Das Tellurium von Wilhelm Schmidt [2]). Einer der neuen Gedanken, welche bei diesem Apparate zur

---

[1]) Erläuterung und Gebrauchsanweisung zum neuen Erdglobus für mathematische Geographie von Alexander Brix, Frankfurt a. M. 1884.

[2]) W. Schmidt, Beschreibung eines Telluriums, konstruiert von W. S., Wien 1884. Die in dieser Schrift beschriebene Maschinerie stellt das Endresultat eines Entwicklungsganges dar, dessen einzelne Stadien sich in zwei älteren Programmabhandlungen des gleichen Verfassers verfolgen lassen: Ueber Methode des geographischen Unterrichtes an Gymnasien, Graz 1871; Zur Methodik des geographischen Unterrichtes, ebenda 1876. Endlich ist von Schmidt noch in neuester Zeit eine lesenswerte, in dieses Gebiet einschlagende Schrift herausgegeben worden (Ueber einige geographische Veranschaulichungsmittel, Wien-Olmütz 1889), auf welche wir nicht verfehlen wollen die Lehrer unter unseren Lesern aufmerksam zu machen. Außer dem oben erwähnten Tellurium

Realisierung gelangt sind, besteht darin, daß die Erdbahn durch einen wirklichen Drahtring vorgestellt wird, längs dessen sich, so die Revolution des Erdplaneten versinnlichend, die dabei noch mit Achsendrehung begabte Erde mühelos fortschieben läßt. Es entsteht so der große Vorteil, das gegenseitige Verhalten der drei Achsenkreise Aequator, Ekliptik und Horizont, welches auch in der nach größerem Maßstabe gezeichneten Figur (s. etwa oben *Fig. 31*) nicht so recht deutlich hervortritt, von Erdstellung zu Erdstellung bequem überblicken zu können [1]. Später hat dann Schmidt noch manche andere Bestandteile an seinem Modelle angebracht, durch welche einzelnen besonderen Wünschen des Lehrers entgegengekommen werden soll [2].

XI. Der Universalapparat von Mang [3]. Von allen

---

wird noch ein Globus vorgeführt, der ganz besonders zu Beobachtungen unter freiem Himmel eingerichtet ist und von dem Hölzelschen Lehrmittelverlage zu Wien um den geringen Preis von 11 Mark bezogen werden kann. — Den Teilnehmern des fünften deutschen Geographentages sind wohl noch die von Schmidt selbst vorgenommenen Demonstrationen seines Apparates erinnerlich (vgl. die Verhandlungen, Berlin 1885. S. 212). Eben bei dieser Gelegenheit hat auch H. Schubert einige Proben an dem Globus von Brix vorgenommen und gezeigt, daß mit Hilfe eines kleinen, dem Globus beigegebenen Theodoliten leicht die mechanische Auflösung sphärischer, auf das bekannte Dreieck Zenit-Pol-Stern sich beziehender Aufgaben erfolgen kann.

[1]) Eine nicht unwichtige Vervollkommnung dieser Neuerung rührt her von Dronke (Elliptisches Tellurium, Pädag. Archiv, (2) 29. Band. S. 101 ff.). Die Erdbahn ist bei diesem Instrumentchen nicht, wie bei dem Schmidtschen, ein Kreis, sondern eine Ellipse, und es soll auf diese Weise erreicht werden, daß der Lehrer nicht allein die bloße Thatsache des Umlaufes der Erde um die Sonne sinnenfällig zu demonstrieren, sondern auch zugleich die von Kepler gefundenen Gesetze dieses Umlaufes zu erläutern vermöge.

[2]) Hierher gehört z. B. das aus einem Brettchen oder Kartonstückchen hergestellte Abbild einer Gebirgskette, welche, wie der Globus anschaulich zu machen gestattet, je nach ihrer Achsenrichtung auf der Nordseite bald länger bald weniger lang von der Sonne bestrahlt wird.

[3]) Zu unterscheiden ist der eigentliche Universalapparat, der mit einer Sphäre von 60 cm innerem Durchmesser ausgerüstet

Unterrichtsmitteln ist wohl dieses, welches wir deshalb auch an den Schluß unserer Aufzählung gestellt haben, das umfassendste. Insbesondere eignet es sich sehr gut dazu, die bei Finsternissen sich ergebenden Erscheinungen sowie auch die Bedingungen klar zu machen, unter welchen überhaupt eine Eklipse zustande kommt. In seinem oben zitierten Aufsatze hat sich Krumme insbesondere auch über die Verwendung dieses Apparates in konkreten Fällen verbreitet [1]).

XV. Erste Zweifel an der Kugelform der Erde.

Die ellipsoidische Hypothese im Altertum und bei Kepler. Begründete Zweifel dieser Art konnten naturgemäß erst in neuerer Zeit geäußert werden [2]). Zwar wurde auch schon im Altertum da und dort die Ansicht laut, die Erde habe eine Eigestalt, allein es ist kaum möglich, mit solch flüchtig hingeworfenen Redewendungen einen bestimmten Sinn zu verbinden [3]). Der erste antike Gelehrte, welcher sich in klaren Worten hierüber ausspricht, ist, dem Zeugnis des Cassiodo-

---

ist und 175 Mark kostet, von dem zerlegbaren Tellurium-Lunarium, das schon für 50 Mark zu haben ist. Die Apparate sind von der Firma Fr. Ackermann in Weinheim (Baden) zu beziehen, in deren Verlage auch eine die Verwendung der einzelnen Vorrichtungen ausführlich beschreibende Broschüre von Mang (1883, 2. Auflage) herausgekommen ist. S. auch: Mang, der zerlegbare und verstellbare Reformglobus, Weinheim 1889.

[1]) Genaue, mit Preisangabe versehene Nachweisungen über die einzelnen Apparate enthält auch M. Geistbecks „Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie. (Freiburg i. B. 1889. S. 158 ff.).

[2]) Vgl. eine mehr ins Detail eingehende Studie des Verf.: Die sphäroidische Gestalt der Erde als Gegenstand der Hypothese in der Zeit vor den Gradmessungen, Leopoldina, 1889. S. 37 ff. S. 48 ff.

[3]) Ueber diese Gelegenheitsäußerungen eines Archelaus, Strabon, Polybius u. s. w. orientiert aufs beste Köler (Allgemeine Geographie der Alten, 1. Teil, Lemgo 1803. S. 156 ff.).

rius[1]) zufolge, der Römer Terentius Varro gewesen, der wirklich dafür gehalten zu haben scheint, daß die Erdachse länger als ein Durchmesser des Aequators sei. Später trat zuerst Kepler dieser Frage näher; er hatte in dem Werke eines französischen Geographen[2]) gelesen, daß der Erde vielleicht eine „zugespitzte" Form eigne, und erörterte sofort, in einem Briefe an seinen Freund Herwart von Hohenburg, die Möglichkeit, auf astronomischem Wege über allfallsige Unregelmäßigkeiten der Erdrundung Klarheit zu gewinnen[3]). Tiefere Wurzeln

---

[1]) S. d. Ganetsche Gesamtausgabe, 2. Band, Venedig 1729. S. 560. „Mundi quoque figuram curiosissimus Varro longae rotunditati in geometriae volumine comparavit, formam ipsius ad ovi similitudinem trahens, quod in latitudine quidem rotundum, sed in longitudine probatur oblongum."

[2]) A. Thevet, La cosmographie universelle, Paris 1575. Fol. III, 1.

[3]) Kepleri Opera omnia, ed. Frisch, 5. Band, Frankfurt a. M.-Erlangen 1864. S. 43. In seiner Antwort an Herwart (24. November 1607) legt der große Astronom, mit Bezug auf die durch Thevet empfangene Anregung, seine Auffassung dar, wie folgt: „Theveti Galli sententiam de ovi forma considera diligenter. Nam puto simile quippiam ex Hipparcho meo appariturum. Diversis enim methodis, altera ex initio et fine eclipsis totalis, altera ex eclipsium partialum magnitudine, diversae diametri umbrae prodibunt. Hoc tamen par est diligentissime prius examinari negotium, ne ex errore monstrum aestimetur opinionis." Besser freilich als diese indirekte sei eine direkte Messung eines Erdmeridianes nach demjenigen Verfahren, welches wir oben, in Abschnitt XII, als das Keplersche kennen gelernt haben, und welches der Erfinder in dem vorliegenden Briefe in dem Sinne gehandhabt wünscht, daß man längs eines Meridianes von Berg zu Berg die Winkel der Gesichtslinie mit der Zenitalrichtung messen solle. In Norwegen solle man beginnen und erst in Apulien aufhören, und, um ganz sicher zu gehen, müßte man neben dieser Messung in der Nordsüdlinie auch noch eine solche in der Ostwestlinie nebenher gehen lassen, welche etwa in Siebenbürgen ihren Anfang nähme und durch Ungarn, Steiermark, die Südschweiz, Piemont, Frankreich bis nach dem spanischen Galizien geführt werde. Unzweifelhaft hätte ein solches Messungsverfahren in zwei zu einander senkrechten Richtungen zuverlässigere Ergebnisse geliefert als die zuerst vorgeschlagene astronomische Methode; gleichwohl kommt Kepler auch auf diese letztere später (1624) noch einmal zurück mit diesen Worten: „Notandum est, hanc lunae eclipsim (instar illius, quam

vermochte aber in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts eine Hypothese nicht zu schlagen, welche von der geheiligten aristotelischen Ueberlieferung sich entfernte, und Milliet Deschales, dieser ausgezeichnete Kompendiograph, wies die betreffende Lehre ausdrücklich zurück, mit Gründen freilich, welche, an der Hand neuer Thatsachen richtig interpretiert, gerade das beweisen, was widerlegt werden soll[1]). Allein mehr und mehr breitete sich doch der Glaube aus, daß die Erde gegen die Pole hin länglich zulaufe; Childrey[2]) und Burnet[3]) sprachen sich in diesem Sinne aus, während allerdings Beckmann[4]) daran festhielt, daß die absolute Kreis-

Tycho anno 1588 observavit, totalem et proximam centrali) egregie calculum fefellisse, nam non solum mora totius lunae in tenebris brevis fuit, sed et duratio reliqua multo magis. Perinde quasi terra elliptica esset dimetientem breviorem habens sub aequatore, longiorem a polo uno ad alterum." Also auch hier wieder die gleiche Ansicht, wie bei Cassiodorius.

[1]) Nachdem nämlich dortselbst (Cursus seu mundus mathematicus, 1. Band, S. 573) auseinandergesetzt ist, weshalb die Erdfigur nicht polyedral sein könne, heißt es weiter von der Erde: „Denique ovalis non est, quia ovalis figura talis est, ut prope verticis sit portio minoris sphaerae, in medio vero ad majoris sphaerae superficiem accedat; quare ad recedendum uno gradu ab aequinoctiali ad polum, plura milliaria decurrenda essent, quam ad peragrandum unum gradum, prope septentrionales, quod hactenus notatum non fuit."

[2]) Childrey, Histoire des singularitez naturelles d'Angleterre, d'Escosse, et du pays de Galles, avec des raisonnemens qui expliquent les causes naturelles des choses qui paroissent les plus prodigieuses, Paris 1667. S. 244 ff. Um die Pole herum bildeten sich, das war die von Childrey begünstigte und an die bekannte Adhémarsche Theorie der Folgezeit anklingende Meinung, ungeheure Eishauben, durch deren stetes Wachsen die Erde sich aus einer Kugel immer mehr in ein gestrecktes Ellipsoid verwandeln müsse. Damit stand eine gleichfalls übertriebene Vorstellung von der unter dem Einflusse der tropischen Regengüsse ungeheuerlich fortschreitenden Denudation der Aequatorialgegenden in Verbindung (s. Torbern Bergman, Physikalische Beschreibung der Erdkugel, deutsch von Röhl, Greifswald 1769. S. 396).

[3]) Thomas Burnet, Theoria sacra telluris. d. i. Heiliger Entwurff oder Biblische Betrachtung des Erdreichs, deutsch von J. J. Zimmermann, Hamburg 1698. S. 174 ff.

[4]) Beckmann, Historia orbis terrarum geographica et civilis, 1. Band, Frankfurt a. O.-Leipzig 1707. S. 9.

form des Erdschattens auf dem teilweise verfinsterten Monde nach wie vor auch die reine Kugelgestalt des schattenwerfenden Körpers verbürge.

Picards Erdmessung. In ein neues Stadium konnte diese Angelegenheit erst von dem Augenblicke an gelangen, als an die Stelle vager Behauptungen und unbestimmter Vermutungen die wirkliche Messung getreten war. Gegen das Ende der sechziger Jahre unternahm der uns bereits bekannte Picard eine neue Gradmessung, ganz nach der Vorschrift des Snellius (s. o. Abschnitt XII), indem nur die Winkelmessung selbst eine erhebliche Verfeinerung dadurch erfuhr, daß jetzt Fernrohre an den Alhidaden der Quadranten angebracht waren. Der von Picard über seine Gradmessung herausgegebenen Schrift[1]) zufolge war der nördliche Endpunkt des gemessenen Bogens nahe bei Amiens, der südliche bei Malvoisine (im Süden von Paris) gelegen; die ganze Arbeit durfte ein besonderes Maß von Vertrauenswürdigkeit in Anspruch nehmen. Picard scheint aber bei dieser Gelegenheit zum erstenmale an der Sphärizität der Erde irre geworden zu sein[2]), und es mag, ihn in seinen Bedenken zu bestärken, wohl auch der Umstand das Seinige beigetragen haben, daß die Umrißfigur anderer Planeten — und an der Planeten-Natur der Erde wurde damals nur noch von wenigen gezweifelt — als nicht genau kreisrund erkannt worden war[3]). So war

[1]) Picard, La mesure de la terre, Paris 1671.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 613. Eine genaue Angabe des Ortes, wo Picard den betreffenden Ausspruch that, haben wir nicht finden können.

[3]) Wenigstens glaubt A. v. Humboldt (Kosmos, 2. Band, Stuttgart-Tübingen 1847. S. 393. S. 520), daß auf Newtons Spekulationen über die sphäroidische Erdgestalt die damals schon von Dominic Cassini — anläßlich seiner Bestimmung der Umdrehungsdauer dieses Planeten (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 400) — erkannte Abplattung des Juppiter bestimmend eingewirkt hatte. In der That beruft sich Newton darauf, daß der Aequatorialhalbmesser Juppiters größer sei als dessen Polarhalbmesser (Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre, deutsch von Wolfers, Berlin 1872. S. 400.).

denn von verschiedenen Seiten her der anerkannte Fundamentalsatz der mathematischen Erdkunde gefährdet, und gänzlich mußte er ins Wanken geraten, als man die bisher nur in einem Teile Europas betriebenen Forschungen auch auf andere Teile der Erde ausdehnte und auf diese Weise Anomalien ermittelte, welche sich mit der bisherigen Anschauung durchaus nicht mehr vereinbaren ließen. Auch jetzt wieder ging die Anregung von Frankreich aus.

Die ersten Pendelbeobachtungen in tropischen Gegenden. Der nächste Zweck, welcher 1671 den Astronomen Richer als Abgesandten der Pariser Akademie nach Französisch-Guiana führte, war allerdings ein anderer, indem hauptsächlich eine Marsopposition behufs genauerer Bestimmung der Sonnenparallelaxe beobachtet werden sollte[1]. Richer aber wußte mit diesem seinem ersten Zwecke noch eine Menge anderer Untersuchungen zu verbinden, und insbesondere erhärtete er durch sorgfältige Beobachtungen den folgenden Erfahrungssatz[2]: *Das Sekundenpendel ist in Paris um* $\frac{5}{4}$ *Linien länger als in Cayenne.* Zunächst freilich wußte niemand etwas Rechtes mit dieser auffallenden Thatsache anzufangen[3],

[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 480 ff.

[2]) Vgl. Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne par M. Richer, Paris 1676. S. 66. „L'une des plus considérables observations que j'ai faites, est celle de la longueur du pendule à secondes de temps, laquelle s'est trouvée plus courte en Caïenne qu'à Paris."

[3]) Von Wolf (Gesch. d. Astr., S. 614) wird in dieser Hinsicht folgende kaum glaubliche Geschichte erzählt: „Als der englische König Jakob II. bei einem Besuche, welchen er 1697 auf der Pariser Sternwarte machte, die Ansicht von Newton mitteilte und vertrat, wurde ihm von den Pariser Akademikern geantwortet, daß allerdings einige von ihnen, weil Juppiter zuweilen nicht vollkommen sphärisch erscheint, ebenfalls daran gedacht hätten, es möchte die Erde abgeplattet sein, daß dies aber durch die kreisrunden Schatten, welche die Erde auf den Mond werfe, hinlänglich widerlegt sei und daß die scheinbar notwendige Verkürzung des Pendels gegen Süden eigentlich nur eine Korrektion

als aber auch aus anderen Tropenländern analoge, wiewohl quantitativ verschiedene Messungen der Pendellänge gemeldet wurden[1]), da trat doch die zwingende Notwendigkeit an die Fachmänner heran, sich kausale Rechenschaft von einer so unerwarteten Erscheinung zu geben.

Wir behalten uns vor, in Abschnitt XX die aus den Pendelbeobachtungen sich für die Beurteilung der Erdgestalt ergebenden Anhaltspunkte näher zu prüfen. Vorläufig nur so viel. Man hatte von Huygens[2]) gelernt, daß ein sogenanntes mathematisches Pendel von der Länge l, unter π die Ludolphsche Zahl, unter g die Beschleunigung der Schwere verstanden, eine volle Schwingung in einer Zeit t zurücklegt, welche durch die Relation $t = \pi \sqrt{l : g}$ bestimmt ist. Handelt es sich also um ein Pendel, welches Sekunden zu schlagen bestimmt ist, so hat man zur Berechnung der Pendellänge l_s die aus der vorigen folgenden Gleichungen:

$$\pi \sqrt{\frac{l_s}{g}} = 1, \; l_s = \frac{1}{\pi^2} \cdot g.$$

l_s und g sind folglich proportionale Größen, und daraus, daß l_s in Guiana kürzer als in Frankreich gemacht werden mußte, um seine Eigenschaft, ein Sekundenpendel zu

---

der Ausdehnung des Pendels infolge der größeren Luftwärme sei.“ Wäre dem so, dann würde der Temperaturunterschied auf 44 Breitengrade etwa 200 Temperaturgrade ausmachen!

[1]) Die neuen Beobachtungen waren von Varin, Deshayes und De Glos an der westafrikanischen Küste angestellt worden, und zwar fand sich in Gorée die Länge des Sekundenpendels geringer als in Paris, aber größer als in Cayenne, „ce qui confirme la variation que le pendule fait en divers lieux entre les tropiques“ (Recueil d'observations faites en plusiers voyages par ordre de sa Majesté, pour perfectionner l'astronomie et la géographie, Paris 1693. S. 65 ff.). Zwischen 43° und 56° n. Br. scheine es solche Unregelmäßigkeiten nicht zu geben. Eine ausführliche Schilderung der von den französichen Forschungsreisenden vorgenommenen Pendelmessungen gibt auch Montucla (Histoire des mathématiques, 2. Band, Paris, An VII. S. 576 ff.).

[2]) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873. S. 127 ff.

sein, beizuhalten, folgt weiter, daß auch g kleiner geworden, daß also der südamerikanische Beobachtungsort vom Mittelpunkte der Anziehung weiter als der europäische entfernt sein muß. Die Gesamtheit der bekannten Pendelbeobachtungen nötigte somit zu einer Aenderung der bisherigen Anschauungen von der reinen Kugelform der Erde, und zwar in folgendem Sinne:

Es muss der Erde eine am Aequator aufgetriebene und in der Nähe der Pole sich einsenkende Gestalt zukommen.

Darüber, ob diese oder aber die zu Beginn dieses Kapitels geschilderte, gerade entgegengesetzte Hypothese das Richtige treffe, entbrannte nunmehr ein hitziger Streit. Wir werden dessen einzelne Phasen im nächsten Abschnitte zu schildern haben.

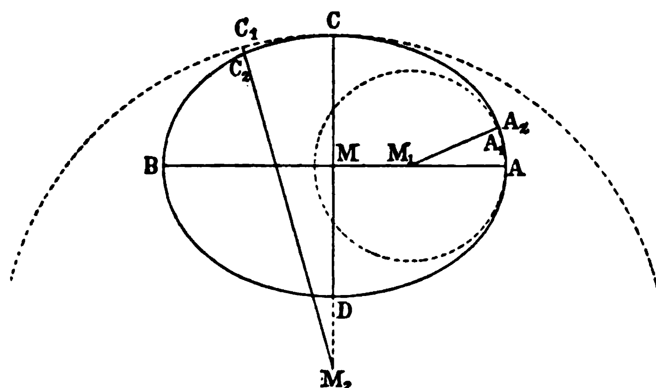
XVI. Theoretische und empirische Beweise für die sphäroidale Gestalt der Erde.

Kriterien für die ellipsoidische Gestalt der Erde. Den endgültigen Beweis für die Richtigkeit der einen der beiden sich befehdenden Hypothesen vermochte einzig und allein die *direkte Messung* zu erbringen. Vorausgesetzt nämlich, daß ein Meridian der Erde eine geometrisch regelmäßige Ovallinie ist — und diese Voraussetzung mußte doch als die nächst einfache an die Stelle der älteren treten, so kann man die Frage, ob der äquatoriale oder polare Durchmesser dieser Ovale der größere sei, folgendermaßen zur Entscheidung bringen. M *(Fig. 70)* sei der Mittelpunkt der mit den beiden *Achsen* oder *Symmetrielinien* AB und CD versehenen Kurve. Wir konstruieren für den Endpunkt A der *grossen* und für den Endpunkt C der *kleinen* Achse den sogenannten *Krümmungskreis*[1]; M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der

[1]) Mit dieser Benennung belegt man denjenigen Kreis, welcher durch drei einander benachbarte Punkte einer Kurve hindurchgeht. Versteht man unter ρ seinen Halbmesser, den Krümmungsradius, unter ξ und η die Koordinaten seines Mittelpunktes und sind die

beiden genannten Kreise. Da schon nach dem, was früher von der Krümmung gesagt ward, die Krümmung

Fig. 70.



in A größer als in B ist, so war auch zu erwarten, daß der Krümmungsradius M_1A kleiner als der Krüm-

---

Koordinaten der drei Punkte, welche er mit der Kurve gemein hat, resp. $(x + dx)$ und $(y + dy)$, x und y, $(x - dx)$ und $(y - dy)$, während $y = f(x)$ die Kurvengleichung vorstellt, so berechnen sich die drei unbekannten Größen ρ, ξ, η mittelst der nachstehenden drei Gleichungen:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2; \quad (x - \xi) + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Ableitung derselben enthält jedes Lehrbuch der höheren Analysis (vgl. wegen besonders einfachen Verfahrens Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 1. Band, Leipzig 1884. S. 303 ff.). Bei den drei Kegelschnitten ist das obige $f(x)$, wenn man den Ursprung des Koordinatensystemes in den Scheitel der Kurve verlegt und als Ordinatenachse die Scheiteltangente gelten läßt, gleich $\sqrt{2px + qx^2}$, wo p den sogenannten Parameter bedeutet. Wenn man (a. a. O., S. 317) zweimal nach y die rational gemachte Kurvengleichung differentiiert, so erhält man:

mungsradius M_2C ausfallen würde. Demgemäß ist auch $2\pi . M_1A < 2\pi . M_2C$ und ebenso $\frac{2\pi . M_1A}{360} < \frac{2\pi . M_2C}{360}$, d. h. die lineare Größe eines Grades ist für den Krümmungskreis des Punktes A kleiner als für den Krümmungskreis des Punktes C. Nun schmiegt sich aber der Krümmungskreis einer Kurve im Oskulationspunkte so innig an, daß es keinen irgend nennenswerten Fehler verursacht, ob man die Länge eines Bogens, dessen Endpunkte eine Polhöhendifferenz von 1^0 bedingen würden, auf der Kurve selbst oder auf dem Krümmungskreise abgemessen denkt, d. h. wenn A_2 und C_2 auf der Kurve so gelegen sind, daß die Verbindungslinien A_2M_1 und C_2M_2 die Kreisperipherien in zwei Punkten A_1 und C_1 treffen, für die resp. $\sphericalangle AM_1A_1 = \sphericalangle CM_2C_1 = 1^0$ ist, so muß Bogen $AA_1 <$ Bogen CC_1 und zugleich Bogen $AA_2 <$ Bogen CC_2 sein. Allgemein kann man dies so ausdrücken:

Die lineare Länge eines Grades auf einer Ovalkurve vom Ellipsencharakter ist am kleinsten bei den Endpunkten

---

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx, \quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q.$$

Multipliziert man mit der zweiten dieser Gleichungen die Gleichung $y^2 = 2px + qx^2$ und subtrahiert vom Produkte die Gleichung $\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 = (p+qx)^2$, so folgt $y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2$. Den hieraus entfließenden Wert des zweiten Differentialquotienten in der aus den ursprünglichen drei Gleichungen zu ermittelnden Relation

$$\rho = \frac{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

einsetzend, findet man

$$\rho = \frac{\mp y^3}{p^2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3},$$

d. h. es ist der Krümmungsradius einer Kurve zweiter Ordnung dem Quadrate des Parameters umgekehrt proportional. Einen anderen Ausdruck für ρ leitet u. a. Epstein her (Geonomie, S. 151 ff.).

der grossen, am grössten bei den Endpunkten der kleinen Achse.

Nimmt man also einstweilen an, die Erde sei keine vollkommene Kugel, sondern ein durch die halbe Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer beiden Achsen entstandener Rotationskörper, und will man sich durch Messung darüber vergewissern, welche Achse zugleich die Umdrehungsachse war, so hat man folgendes Verfahren einzuschlagen:

Man sucht zwei Punkte A_1 *und* B_1 *nahe beim Aequator und zwei Punkte* A_2 *und* B_2 *nahe bei einem der Pole der Erde so auf, dass die Zenitalpunkte von* A_1 *und* B_1 *ebenso wie die Zenitalpunkte von* A_2 *und* B_2 *in dem durch diese beiden Punkte gelegten Meridiane am Himmel je um einen Bogengrad voneinander abstehen. Werden dann die linearen Distanzen* A_1B_1 *und* A_2B_2 *ausgemessen, so wird, da ja jetzt die Möglichkeit* $A_1B_1 = A_2B_2$ *als ausgeschlossen gelten kann,* $A_1B_1 \lesseqgtr A_2B_2$ *sein. Im ersteren Falle ist die Erde am Aequator aufgetrieben und an den Polen eingedrückt, d. h. die Erde ist ein abgeplattetes Sphäroid, im zweiten Falle ist die Erde gegen die Pole hin zugespitzt und am Aequator eingedrückt, d. h. sie ist ein verlängertes Sphäroid.*

Die Gradmessungen der Cassinischen Periode. Ziel und Aufgabe der Gradmessungsarbeit war es, nachdem man zu dieser — bereits von Deschales (s. o.) angedeuteten — Erkenntnis vorgedrungen war, den Erfahrungsbeweis für die eine oder andere dieser beiden Möglichkeiten zu liefern, und noch im Laufe des 17. Jahrhunderts konnte damit rüstig ans Werk gegangen werden[1], da sich zum Glücke Ludwigs XIV. geistvoller

[1]) Unsere geschichtlichen Darlegungen stützen sich, neben den Originalschriften, auf die folgenden Werke: Wolf, Gesch. d. Astr., S. 615 ff.; Epstein, Geonomie, S. 95 ff.; Artikel „Erde" in der zweiten Auflage von Gehlers Phys. Wörterbuch; Posch, Geschichte und System der Breitengradmessungen, Freising 1860; Nagel, die Hauptmomente der Entwicklungsgeschichte der Gradmessungen, Dresden 1873.

Minister Colbert persönlich für die Sache interessierte und freigebig die erforderlichen Mittel anwies. Im Jahre 1680 begann Dominic Cassini, unterstützt durch Maraldi und De la Hire, eine Meridianmessung von der Nordgrenze Frankreichs bis an die Pyrenäen[1]; der gemessene Bogen umfaßte (6° 18′ 57″ + 2° 11′ 20″ =) 8° 30′ 17″, indem von Paris aus einerseits bis Collioure, andererseits bis zum Parallel von Dünkirchen gemessen wurde. Die Berechnung der Resultate schien zu ergeben, daß ein Grad südlich von Paris eine Länge von 57097 Toisen und ein Grad nördlich von Paris eine solche von 56960 Toisen besitze, und damit war dann anscheinend der Sieg des verlängerten Ellipsoides entschieden. Eisenschmid[2] wenigstens und Jacques Cassini[3], Dominics Sohn und Nachfolger in der Leitung der Pariser Sternwarte, zogen diesen Schluß, und ganz Frankreich hielt ihn aufrecht gegen die Engländer, welche aus den später (Abschnitt XX) genauer zu erörternden, aber schon bei der Expedition Richers im Prinzipe dargelegten Motiven nach wie vor an der abgeplatteten Gestalt des Erdellipsoides festhielten. Mehrere Jahrzehnte standen sich die beiden Seiten des Aermelkanales, da die wissenschaftliche Streitfrage zur Nationalsache geworden war,

---

[1]) D. Cassini, De la méridienne de l'observatoire royale de Paris, prolongée jusqu'aux Pyrénées, Mém. de l'acad. royale de Paris, 1701.

[2]) Eisenschmid, Diatribe de figura telluris elliptico-sphaeroide, Straßburg 1691. Dieser Autor hegt keinen Zweifel mehr, indem er folgende Zusammenstellung — die eingeklammerte Zahl gibt die geographische Breite — vorführt: Eratosthenes (27°) fand für den Meridiangrad 100, Riccioli (44° 30′) fand 80, Picard (49°) fand 74, Fernel (49° 30′) fand 73½ und Snellius (52°) fand 71⅓ römische Meilen. Diese Resultate seien nur mit einem gestreckten Ellipsoide vereinbar, welches eine Polarachse von 10890 und eine Aequatorialachse von 8288 solchen Meilen habe. Auch ist Eisenschmid wohl mit den uns aus dem vorigen Abschnitte bekannten Antizipationen vertraut: „Caeterum hanc eandem figuram ovalem, aut potius pruniformem telluri attribuerunt varii passim auctores.“

[3]) J. Cassini, Traité de la grandeur et de la figure de la terre, Paris 1720.

in Wehr und Waffen gegenüber[1]). Auch einige andere Messungsmethoden wurden von französischen Astronomen in Vorschlag gebracht, und in ihren Ergebnissen erblickte man gleichfalls Bestätigungen der bereits fest gewurzelten Lehre[2]).

Die peruanisch-lappländische Gradmessung. Erst gegen die Mitte der dreißiger Jahre trat in Frankreich eine Wendung ein. Einsichtige Männer hatten schon längst gefühlt, daß eine Messung auf verhältnismäßig kleinem Gebiete, wie es eben Frankreich allein im Verhältnis zur Erde selbst darstellt, keine Bürgschaft der Sicherheit zu gewähren vermöge. Auf Maurepas' Anregung wurde von König Ludwig XV. der Befehl erteilt, daß zwei Gesellschaften von Mathematikern und Naturforschern beziehungsweise nach den Tropen und nach der nördlichen Polarzone entsendet werden sollten, um in möglichster Nähe von Aequator und Pol je eine Breitengradmessung auszuführen und zugleich die Natur der betreffenden Länder zu studieren. Im Mai 1735 reiste die nach dem Süden bestimmte Gruppe ab, die außer den beiden Dirigenten Bouguer und De la Condamine noch aus sieben Personen bestand, und als sie das spanische Südamerika erreicht hatte, wurden ihr von der spanischen Regierung noch die beiden Astronomen Don Antonio de Ulloa und Don Jorge Juan zugewiesen. In den peruanischen Anden begannen sie ihr

---

[1]) Um jene Zeit soll Voltaire die scherzhafte Aeußerung gethan haben: ein Pariser, der nach London komme, müsse sich erst daran gewöhnen, daß die Erde, welche er zu Hause als Zitrone sich vorzustellen gewohnt gewesen sei, nun plötzlich die Gestalt einer Apfelsine angenommen habe.

[2]) Die eine dieser Methoden zielte bereits auf die erst später zu wirklicher Geltung gelangten Längengradmessungen ab; vgl. J. Cassini, De la perpendiculaire à la méridienne de Paris prolongée vers l'orient, Mém. de Paris, 1744. S. 541 ff.; Clairaut, Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par Cassini, ebenda, 1739. S. 109 ff. Gelegenheit zur Besprechung der zweiten, rein astronomischen Methode wird sich uns im ersten Abschnitte des zweiten Kapitels darbieten.

Messungswerk, und im Verlaufe von sechs Jahren war etwas südlich vom Aequator (unter der mittleren Breite — 1° 31′) ein Meridianbogen von 3° abgesteckt und durch Triangulation bestimmt worden; daraus fand sich, nachdem die Verarbeitung der Resultate ihren Abschluß erreicht hatte[1]), für die lineare Größe eines Meridiangrades der Betrag von 56734 Toisen. Ungleich rascher war die lappländische Expedition mit ihrer Aufgabe fertig geworden, freilich aber auch auf Kosten der Gründlichkeit. Ihr Anführer war der bekannte Maupertuis, nachmals Friedrichs des Großen Freund und Präsident der Berliner Akademie; beigegeben waren ihm Clairaut, Camus, Lemonnier und Outhier, und wiederum hatte Schweden, da auf seinem Gebiete die Operationen vorgenommen werden sollten, den Physiker Celsius[2]) beauftragt, sich den Franzosen anzuschließen. Man maß zwischen 1736 und 1737 auf dem zugefrorenen Torneå-Elf eine Grundlinie und ermittelte[3]) für einen Meridiangrad unter der mittleren Breite + 66° 20′ eine Länge von 57438 Toisen. Freilich stellte sich, als später eine schwedische Gelehrtenkommission unter Svanbergs Leitung[4]) eine neue und gründlichere Gradmessung in

[1]) Die Hauptwerke über die äquatoriale Gradmessung sind: Bouguer, La figure de la terre, Paris 1749; De la Condamine, Journal du voyage fait par ordre du roi à l'équateur, Paris 1751 und Mesure de trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère australe, Paris 1751. Aber auch Ulloa hat sich über seine Beteiligung an dem großen Werke öffentlich vernehmen lassen (Observaciones hechas en los regnos del Perù, de las quales se deduce la figura y magnitud de la tierra, Madrid 1748).

[2]) Andreas Celsius (1701—1744), allgemein bekannt durch die Einführung der hundertteiligen Thermometerskala.

[3]) Vgl. Maupertuis, La figure de la terre, Paris 1738 (deutsch von Samuel König, Zürich 1741; auch Nürnbergers „Populäres astronomisches Handwörterbuch“, Kempten 1846, enthält im Anhang zum ersten Bande eine deutsche Version des eigentlichen Reiseberichtes); Outhier, Journal d'un voyage au Nord en 1736/7, Paris 1744. Von Celsius im besonderen sind die folgenden hierher gehörigen Schriften zu verzeichnen: Bref om jordens figur, Upsala 1736; De observationibus pro figura telluris determinanda in Gallia habitis, Upsala 1738.

[4]) Die Resultate dieser Kontrollarbeit, welche freilich in jeder

Lappmarken ausgeführt hatte, das als wahr heraus, was schon längst von einsichtigen Leuten gemutmaßt worden war: der lappländische Meridiangrad umfaßte nicht 57 438, sondern 57 196 Toisen. Immerhin war an sich der Maupertuissche Grad größer als der Bouguersche, und so durfte von 1740 an die alte Streitfrage als in einem für Newton und seine Anhänger günstigen Sinne entschieden betrachtet werden. Noch war freilich der Widerspruch, der aus den Messungen der beiden Cassini folgte, nicht gehoben, und so entschloß man sich denn, auch für Frankreich mit den seit fünfzig Jahren doch beträchtlich vervollkommneten Hilfsmitteln eine neue Gradmessung durchzuführen. Dies geschah durch den dritten in der Reihe der Cassini, C. F. Cassini de Thury, der namentlich die Entfernung zwischen den Parallelkreisen von Paris und Amiens aufs neue maß[1]), dazu aber auch die Messung auf außerfranzösische Länder ausdehnte[2]). So war denn eine große und wichtige Er-

---

Hinsicht die Leistungen der Vorgänger weit übertraf, finden sich zusammengefaßt in dem von dem obengenannten berühmten Geometer selbst redigierten Werk: Exposition des opérations faites en Lapponie pour la détermination d'un arc de méridien en 1801—3 par Oefverbom, Svanberg, Holmquist et Palander, Stockholm 1805. Eine speziell der Kritik gewidmete Vorläuferin des großen Werkes war die Abhandlung „Historisk öfversigt at problemet om jordens figur, jemte anledningarne till den nya Lappska gradmättningen“ (Abhandl. der k. schwed. Akad. der Wissensch., 1804).

[1]) Cassini de Thury, La méridienne de l'observatoire royal de Paris, vérifiée dans toute l'étendue du royaume par de nouvelles observations, Paris 1744; Observations faites pour la vérification du degré du méridien compris entre Paris et Amiens par Mm. Bouguer, Cassini, Camus et Pingré, Paris 1757. Vorher schon war (in den Akademie-Abhandlungen für 1754) von den vier Genannten ein Bericht über die Revision der grossen Vermessungsbasis erstattet worden, welche man auf der Hochfläche südlich von Paris, bei Villejuif, abgesteckt hatte.

[2]) Cassini de Thury, Relation de deux voyages faits en Allemagne qui comprennent les opérations relatives à la figure de la terre, à la géographie et à l'astronomie, Paris 1775. Eines der bereisten Länder war Bayern, welches so zum erstenmale seit Philipp Apian (1570) einer gründlichen Vermessung teilhaftig wurde, freilich ohne direkten Nutzen für das Land selbst.

rungenschaft glücklich unter Dach gebracht. Die weiteren Gradmessungen, welche noch im laufenden Jahrhundert und vor der einem wesentlich anderen Zwecke dienenden französischen vorgenommen wurden, konnten nur bei der Bestätigung und Verfeinerung des feststehenden Ergebnisses in Betracht kommen; wir entwerfen deshalb von ihnen, deren es im ganzen zehn waren, im folgenden eine summarische, chronologisch geordnete Skizze.

Die sekundären Gradmessungen des 18. Jahrhunderts. *I. Die südafrikanische Gradmessung.* Nachdem man über die Krümmungsverhältnisse am Aequator, in der Nordpolarzone und in europäischen Breiten sich vergewissert hatte, erschien es wünschenswert, auch die südliche gemäßigte Zone einer Prüfung zu unterwerfen. Zu dem Ende ging La Caille nach dem Kap der guten Hoffnung und maß daselbst unter — 33° 18′ Breite einen Meridiangrad. Dessen Länge von 57037 Toisen fügte sich qualitativ ganz gut in das ellipsoidische Schema, quantitativ freilich wollte er sich dem aus den vorliegenden Bestimmungen erschlossenen abgeplatteten Sphäroide nicht recht einfügen, und La Caille glaubte sich infolgedessen zu der Annahme berechtigt, daß die Krümmung der Erde keine nach strenger Regel geometrische sei[1]).

II. a, b. Die mittel- und oberitalienische Gradmessung. Die erstere ward zu Anfang der fünfziger Jahre auf Anordnung des Papstes von den beiden Jesuiten Boscovich und Maire im Kirchenstaate vorgenommen und lieferte für die Breite 43° einen Meridiangrad von 56979 Toisen. Die Veranstalter der zweitgenannten waren Beccaria und Canonica[2]).

---

[1]) La Caille, Journal historique du voyage fait au cap de Bonne-Espérance, ed. Carlier, Paris 1763. S. auch Mém. de Paris 1751 und 1754, sowie Röhl, Einleitung in die astronomischen Wissenschaften, 2. Teil, Greifswald 1779. S. 139 ff.

[2]) Boscovich-Maire, De litteraria expeditione per pontificam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam jussu et auspiciis Benedicti XIV. Pont. Max. suscepta, Rom 1755. Die appische Straße bot eine

III. Die pfälzische Gradmessung. Sie war das Werk Christian Mayers, des bekannten Entdeckers der Doppelsterne[1]).

IV. Die Revision der französischen Gradmessung. Wichtig für die ganze Prozedur wurde diese Revision deshalb, weil Le Monnier bei dieser Veranlassung die für die ausübende Geodäsie folgenreiche Entdeckung machte, daß die hölzernen, nur an den Enden mit Eisenschutz versehenen Stäbe, durch deren Aneinanderlegen bisher stets die Basismessung bewerkstelligt worden war, nichts weniger als gleichbleibend in ihrer Länge seien[2]). Man hat deshalb später die hölzernen durch die hygroskopischer Veränderung in keiner Weise unterworfenen und auf Temperaturveränderungen leicht zu prüfenden metallenen Meßstäbe ersetzt.

V. Die nordamerikanische Gradmessung. Zwei aus Altengland stammende Feldmesser, Mason und Dixon, benutzten die durch eine Grenzregulierung zwischen Maryland und Virginien sich darbietende gute Gelegenheit, um unter 39° 12′ Breite einen Meridiangrad zu bestimmen; sie fanden denselben gleich 56 888 Toisen[3]).

VI. Die österreichisch-ungarische Gradmessung. Liesganig maß in Südungarn (45° 57′) einen Breitengrad = 56 881 Toisen und in Niederösterreich (48° 13′) einen solchen von 57 086 Toisen[4]). Gegen die Zuverlässigkeit

---

gradlinige Strecke von ungewöhnlicher Länge dar. — Beccaria, Gradus Taurinensis, Turin 1774.

[1]) Chr. Mayer, Basis Palatina anno 1762 ad normam Acad. R. Parisianae Scientiarum exactam bis dimensa, Mannheim 1763.

[2]) Vgl. wegen dieser Wahrnehmung und der näheren Begleitumstände Wolf, Gesch. d. Astr., S. 620.

[3]) Die beiden Amerikaner, von denen sich Mason auch als Astronom anderweit bekannt gemacht hat, veröffentlichten über ihre Messung selbst nichts, doch that dies für sie der Royal Astronomer Maskelyne: Observations for determining the Lenght of a Degree of Latitude in the Provinces of Maryland and Pennsylvania, Phil. Transact., 1768.

[4]) Liesganig, Dimensio graduum meridiani Viennensis et Hungarici, Wien 1754. Die kritischen Gegenbemerkungen brachten die Bände 4 bis 9 von v. Zachs „Monatl. Korresp. z. Beförderung d. Erd- und Himmelskunde“.

dieser Zahlen ist schon bei Liesganigs Lebzeiten mancher Zweifel laut geworden[1]).

VII. Der französisch-englische Dreiecksanschluss. Die Verbindung der beiden Hauptsternwarten von Frankreich und England war mehr und mehr als ein Bedürfnis erkannt worden und wurde gegen Ende des vorigen Jahrhunderts durch eine große Triangulation vollzogen. Die beiden Gelehrten, deren Oberleitung jeweils von ihrem Staate das Geschäft anvertraut war, haben sich darüber in besonderen Schriften und Abhandlungen verbreitet: der Franzose J. D. Graf von Cassini, der vierte Träger dieses berühmten Namens, und der englische General Roy[2]).

VIII. Die bengalische Gradmessung, ausgeführt von Burrow[3]).

IX. Die lappländische Gradmessung. Von diesem Werke Svanbergs und seiner Gefährten das Nötige zu sagen, haben wir uns oben schon veranlaßt gesehen.

Die Einführung des Gradmaßsystemes. Der Wunsch, sogenannte *Naturmasse* ausfindig zu machen, war schon zu wiederholten Malen rege geworden, hatte

---

[1]) Eine Revision der Liesganigschen Arbeit ist deswegen leicht durchzuführen gewesen, weil (Frischauf-Meyer, Deutsche Alpen, 3. Teil, Leipzig 1887. S. 140) südlich von Wiener-Neustadt die Endpunkte der bezüglichen Basis, durch kleine Pyramiden ausgezeichnet, noch heute gut erkennbar sind. Näheres über die vom k. k. milit.-geogr. Institute vorgenommene Revision ward nicht bekannt.

[2]) Cassini, Exposition des opérations faites en France en 1787, pour la jonction des méridiens de Paris et de Greenwich, Paris 1792 (im Anhange ist eine Beschreibung des hier zum erstenmale in größerem Stile angewendeten Repetitionskreises von Borda gegeben); Roy, An Account of the Trigonometrical Operations, whereby the Distance between the Meridians of the R. Observatories of Greenwich and Paris are determined, Phil. Trans, 1790. Die Basis zu seinen Dreiecken hatte Roy schon 1775 auf der aus der Geschichte der englischen Revolution bekannten Hounslow-Heide bei London festgelegt gehabt.

[3]) Dalby, A short Account of the late R. Burrows Measurement of a Degree of Longitude and another of Latitude near the Tropic in the Years 1791 and 1792, London 1790.

aber noch nicht zu irgend brauchbaren Reformvorschlägen geführt [1]). Als jedoch beim Ausbruche der französischen Revolution auf allen Gebieten mit dem Bestehenden gebrochen und jeder kühnen Neuerung die Aussicht auf Erfolg eröffnet wurde, da kam man auch auf jene Idee zurück [2]). Der in allen Sätteln gerechte Talleyrand war es, welcher 1790 in der Nationalversammlung einen auf die gründliche Umgestaltung des Maß- und Gewichtssystemes abzielenden Antrag stellte, und die von der Pariser Akademie auf Befehl der Kammer eingesetzte, aus Borda, Condorcet, Monge, Laplace, Lagrange — lauter Zelebritäten ersten Ranges — bestehende Kommission stellte in ihrem am 19. März 1791 eingereichten Berichte das Prinzip auf, welches von den maßgebenden Gewalten angenommen und heutigestages das Leitprinzip für die Maßeinteilung bei sämtlichen zivilisierten Völkern, nur leider mit Ausnahme Großbritanniens, geworden ist. Die Vorschläge des Ausschusses hatten folgenden Inhalt:

---

[1]) Vortrefflich klärt über die älteren und neueren Bestrebungen solch natürlicher, auch durch die größten Erdrevolutionen nicht zu zerstörender Maße auf Karstens Beitrag „Vom Maße und Messen" zum ersten Bande der „Allgem. Encyklopädie der Physik", Leipzig 1869. S. 242 ff. Wie unklar es bei solchen Weltverbesserungen oft zuging, mag daraus hervorgehen, daß Andreas Böhm (De visione erecta, Acta phil. med. Hassiaca, 1771) den scheinbaren Sonnendurchmesser, in bestimmter Distanz gesehen, zum Normalmaße erhoben wissen wollte, völlig übersehend, daß doch diese Distanz selber erst in einer gewissen Maßeinheit auszudrücken wäre. In Summa ist das Problem des Naturmaßes nichts anderes als eine wohlgemeinte Chimäre.

[2]) Das Quellenwerk für das Studium der unter der ersten Republik ausgeführten Gradmessung wird repräsentiert durch die drei 1806, 1807 und 1809 erschienenen Bände des Delambreschen Originalberichtes: Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc de méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone. Für deutsche Leser hat Epstein (Geonomie, S. 101 ff.) eine für ein Lehrbuch ungewöhnlich ausführliche Darstellung des Messungsverfahrens bis in seine Einzelheiten gegeben, wobei sogar die damals neu eingeführten Basis- und Winkelmeßinstrumente, sowie die mancherlei eben bei jener Gelegenheit ins Leben getretenen Verbesserungen der mathematischen Hilfsmittel Berücksichtigung gefunden haben.

Es soll der durch Paris gelegte Erdmeridian dadurch aufs genaueste ausgemessen werden, dass man zwischen den Parallelkreisen von Dünkirchen und Barcelona, die um $9^2/_3{}^0$ voneinander abstehen, eine grossartige Triangulation ausführt. Alsdann soll $^1/_{40000000}$ des gesamten Meridianes, d. h. $^1/_{10000000}$ des Meridianquadranten zur Einheit des künftigen Masssystemes unter dem Namen „mètre" erhoben, seine Vielfachen und aliquoten Teile sollen nach dem Dezimalsysteme gebildet und mit besonderen (lateinischen und griechischen) Bezeichnungen versehen werden.

Im wesentlichen wurde nach diesem Plane verfahren; allerdings fehlte es nicht an zu überwindenden Schwierigkeiten, worunter nicht eben die geringste die war, daß der Konvent in seiner Ungeduld das Messungswerk überhasten ließ und sich mit einem *provisorischen Meter* begnügen zu wollen erklärte. Doch ordnete man, nachdem die Schreckensmänner gestürzt waren, 1795 die Wiederaufnahme der Arbeiten an, mit deren Vollzug hauptsächlich Delambre und Méchain betraut wurden. Später knüpften J. Biot und Arago noch die spanische Insel Formentera an das französische Dreiecksnetz [1]). Nach letztgenanntem Forscher teilen wir nachstehend eine die wichtigsten Resultate in sich vereinigende Tabelle mit:

Ort	Geogr. Breite	Breiten-differenz	Länge eines Grades in Toisen	Polhöhe der Gradmitte
Greenwich . .	51° 28′ 40,00″	0° 26′ 31,50″	57097,62	51° 15′ 24,25″
Dünkirchen .	51 2 8,50		57087,68	
Pariser Pantheon . . .	48 50 49,37	2 11 19,13	57069,31	49 56 28,93
Evaux	46 10 42,54	2 40 6,83	56977,36	47 30 45,95
Carcassonne .	43 12 54,30	2 57 48,24	56960,46	44 41 48,42
Montjouy . .	41 21 46,58	1 51 7,72	56955,38	42 17 20,44
Formentera .	38 39 53,17	2 41 53,41		45 4 16,58

[1]) Das oben erwähnte Werk Delambres hat als Nachtrag den folgenden vierten Band erhalten: Biot-Arago, Recueil d'ob-

Mit Rücksicht auf diese Daten fand sich schließlich das bei der Neubegründung des Metersystems als maßgebend zu Grunde gelegte Ergebnis [1]:

Ein Meridiangrad = 40000000 : 360 Meter ist unter der mittleren geographischen Breite von 45° 4′ 16″,58 = 57012,44 Toisen, wobei für letzteres Mass die sogenannte peruanische Toise Bouguers zu Grunde gelegt ist.

Im Jahre 1799 erfolgte die endgiltige, bis auf den heutigen Tag nachwirkende Regulierung, für welche auch aus den unter dem Protektorate des damaligen Frankreich stehenden Staaten Sachverständige beigezogen worden waren [2], und durch diese ward folgendes festgesetzt:

Ein Meter ist gleich 443,296 Linien der peruanischen Toise, vorausgesetzt, dass der Normalmassstab bei einer Temperatur von 13 Reaumur-Graden beobachtet wird [3].

Wahrer Charakter des metrischen Systemes. Ob die ausgezeichneten französischen Mathematiker, wohl vertraut mit all den Fallstricken, welche die

---

servations géodésiques, astronomiques et physiques, exécutées par ordre du bureau des longitudes de France, Paris 1821. Vgl. auch die von Hankel besorgte deutsche Ausgabe der Gesamtwerke Aragos, 15. Band.

[1] Epstein, Geonomie, S. 136.

[2] Dabei war u. a. (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 623) die helvetische Republik durch Tralles, die batavische durch van Swinden, die cisalpinische durch Mascheroni vertreten.

[3] Jeder Staat besitzt einen solchen Normalmaßstab oder *Etalon*, der aus Metall gefertigt ist und an den Enden abgestumpfte Kegel aus einem anderen Metalle zu tragen pflegt. Gegenwärtig empfiehlt man für solche Zweke das *Iridium*, weil es der härteste, am mindesten angreifbare von allen bekannten Stoffen sein soll. Da jedoch mit wachsender Temperatur ein Stab sich ausdehnt, bei sinkender aber kleiner wird, so muß auch, wenn andere Maßstäbe am Etalon geprüft werden sollen, die *Normaltemperatur* angegeben sein; wäre im Momente der Vergleichung der Temperaturstand ein anderer, so würde man, da ja für jedes Metall der *lineare Ausdehnungskoeffizient* bekannt ist, die *Temperaturkorrektion* rechnerisch anzubringen haben. Welches Maß von Vorsichtsmaßregeln und Korrektionsarbeiten eine solche Vergleichung erheischt, erhellt am besten aus der Schrift von Pernet: Comparaison des mètres dans l'air à la température ambiante, Paris 1886.

Unvollkommenheit der Instrumente sowie die Unmöglichkeit, bei ausgedehnten Beobachtungen und Berechnungen jedweden Fehler zu vermeiden, einem so gigantischen Messungswerke bereiten müssen, dieses letztere für absolut gelungen hielten, wissen wir nicht; wäre dem wirklich so gewesen, so hielt jedenfalls die optimistische Anschauung nicht sehr lange vor. Denn nachdem schon Puissant seine Zweifel nicht verschwiegen hatte, nahm Bessel, auf die von den Franzosen selbst noch nicht angewandte neue Gaußsche Fehlerausgleichungsmethode sich stützend, eine Kontrolle des Kalküls vor und wies nach [1]), daß die Zahl 443,296 eigentlich durch 443,334 ersetzt werden müßte. Mit gutem Grunde warnte aber eben auch wieder Bessel [2]) davor, wegen eines solchen Rechnungsversehens nun etwa das ganze Metersystem über Bord werfen zu wollen, denn nicht darauf komme es an, daß dasselbe an ein angebliches Naturmaß sich anschmiege, sondern einzig und allein darauf, daß die schöne Harmonie erhalten bleibe, in welcher die einzelnen Linear-, Flächen- und Raummaße unter sich sowie mit der Gewichtseinheit und mit dem die neuere Rechenkunst beherrschenden Zehnersysteme verknüpft seien. Auch andere Fachmänner haben sich in letzterem Sinne vernehmen lassen, besonders Listing [3]). Wenn in unseren Tagen tausende vom Meter reden, so denken sie nicht mehr daran, daß dieses Maß in inniger Beziehung zu den Größenverhältnissen der Erde stehen sollte; das

---

[1]) Bessel, Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde, Astr. Nachr., Nr. 438.

[2]) Bessel, Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände, herausgeg. von Schumacher, Hamburg 1848. S. 283.

[3]) Listing, Ueber unsere jetzige Kenntnis von der Gestalt und Größe der Erde, Göttinger Nachrichten, 1873. S. 76 ff. Dortselbst werden die vier physikalischen Maßeinheiten besprochen, welche man mit einer gewissen Berechtigung als die natürlichen bezeichnen darf, und es wird gezeigt, daß keine derselben so genau bekannt und meßbar ist, daß nicht die Unsicherheit bei den sehr minimalen Größen, um welche es sich bei der Vergleichung von Maßstäben handelt, störend ins Gewicht zu fallen vermöchte.

metrische System ist aus einem *natürlichen*, als welches es geplant war, ein *konventionelles* geworden und trägt seine Berechtigung in sich selbst, in seinem Gefüge und in seiner Uebereinstimmung mit dem Systeme des dekadischen Stellenwertes.

XVII. Mathematische Folgerungen; genauere Berechnung der Dimensionen des Erdkörpers.

Durch die im vorigen Abschnitte geschilderten Operationen war man also zu der festen Ueberzeugung gelangt: *Die Erde ist keine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Umdrehungsellipsoid* [1]). Aus dieser That-

---

[1]) Strenge genommen ist der Beweis, daß die Meridiankurve der Erde gerade eine Ellipse sein müsse, daß dies nicht auch eine der Ellipse verwandte Ovale sein könne, durch die Gradmessungen als solche nicht erbracht, und in der That ist die Identität, wie sich später herausstellen wird, auch keine vollkommene. Indes stellen wir uns vorläufig auf den von den Geodäten des 18. Jahrhunderts eingenommenen Boden. Danach ist *(Fig. 71)* $ACBD$ ein elliptischer Meridian; nehmen wir MA als positive X-Achse, MC als positive Y-Achse an, und hat der willkürlich auf der Ellipse gelegene Punkt E die Koordinaten $MJ = x$, $EJ = y$, so gilt für E die als *Gleichung der Ellipse* zu bezeichnende Relation ($AB = 2a$, $CD = 2b$ gesetzt):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Verbindet man irgend zwei symmetrisch zum Zentrum M auf der großen Achse AB gelegene Punkte F_1 und F_2 mit E, so ist im allgemeinen $EF_1 + EF_2 \gtrless AB$; nur ein einziges Punktepaar, durch L_1 und L_2 charakterisiert, hat die Eigenschaft, daß $EL_1 + EL_2$, wo auch immer E gelegen sein möge, $= AB$ wird. Diese ausgezeichneten Punkte nennt man *Brennpunkte*, die Verbindungslinien EL_1 und EL_2 nennt man *Brennstrahlen*. Die Geometrie lehrt, daß $ML_1 = ML_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$ und daß, wenn in E die Tangente hh' an die Ellipse gelegt wird, $\sphericalangle h'EL_1 = \sphericalangle hEL_2$ sein muß. Auf dieser letzteren Eigenschaft beruht es, daß eine spiegelnde Ellipse alle aus dem einen Brennpunkte kommenden Strahlen nach dem anderen zurückwirft.

sache ergaben sich sofort einschneidende Konsequenzen für die mathematische Geographie.

Begriff der Abplattung. Zunächst ist zu fragen: Was versteht man unter der *Abplattung* („applatissement") der Erde? Man ist übereingekommen, als Abplattung den echten Bruch $\alpha = \frac{a-b}{a}$ zu bezeichnen, wo a die große, b die kleine Achse der Meridianellipse vorstellt. Auch die *Exzentrizität* dieser Ellipse, d. h. der Bruch $\sqrt{a^2 - b^2} : a$ oder e, würde zur Kennzeichnung des Gegensatzes zwischen Ellipse und reinem Kreise zu verwenden sein. Beide Größen sind durch die Proportion $\alpha : e = \sqrt{a-b} : \sqrt{a+b}$ untereinander verknüpft. Die numerische Größe beider Brüche wird weiter unten angegeben werden.

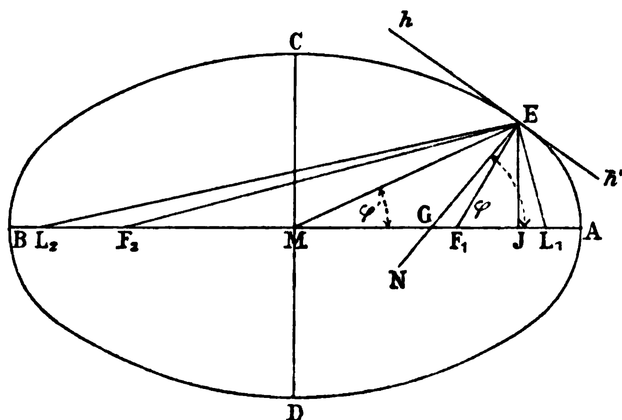
Geographische und geozentrische Breite. Wir haben auf der kugelförmigen Erde die Breite definiert als den Neigungswinkel, welchen der Radius des betreffenden Ortes mit der Aequatorebene einschließt. Zu messen jedoch vermochten wir nach dieser Definition die Breite nicht, zu dem Ende mußten wir ihr vielmehr den Winkel substituieren, welchen eine auf der Horizontalebene des Ortes lotrecht stehende grade Linie, eine *Normale,* mit der fraglichen Ebene bildet. Für die Kugel freilich sind diese beiden Bestimmungen tautologisch, für das Ellipsoid dagegen hören sie auf, den gleichen Sinn zu haben, und wir müssen uns deshalb zu einer Zweiteilung des Begriffes Breite in folgendem Sinne verstehen:

Geozentrische Breite ist der Winkel zwischen Radiusvektor und Aequatorebene, geographische Breite ist der Winkel, den die im Bestimmungsorte an das Ellipsoid, d. h. an die durch den Ort gehende Meridianellipse gelegte Normale mit der Ebene des Aequators einschliesst.

Zum Belege verweisen wir auf *Fig. 71;* die Buchstaben A, B, C, D, M sollen hier das Gleiche bedeuten

wie in *Fig. 70.* Die Horizontalebene von E durchschneidet die Meridian- (und zugleich Papier-) Ebene längs der Graden hh', EN ist die Normale, welche die große

Fig. 71.



Achse in G trifft, so daß mithin $\sphericalangle EGA = \varphi$ die geographische, $\sphericalangle EMA = \varphi'$ die geozentrische Breite darstellt. Es gilt, φ und φ' durch eine Gleichung miteinander zu verbinden. Der Winkel zwischen Normale und X-Achse ist, wofern (s. u.) wieder $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ die Kurvengleichung vorstellt, dieser: $\varphi = \text{arc tang}\left(-\frac{dx}{dy}\right)$. Da man aber auch die Form $y = \text{tang}\,\varphi' . x$ herstellen kann, so ist

$$\text{tang}\,\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x} = \frac{a^2}{b^2}\,\text{tang}\,\varphi'.$$

Hiermit ist die Möglichkeit geschaffen, aus der geographischen Breite die geozentrische und umgekehrt zu berechnen [1]).

[1]) Die frühere Bezeichnung für die beiden Winkel, welche wir resp. geographische und geozentrische Breite nennen, scheint

Berechnung der Exzentrizität. Wie aus den gegebenen Achsen die Exzentrizität sich ergibt, haben wir bereits erfahren. Man kann dieselbe aber auch finden, wenn nur zwei Fahrstrahlen r_1 und r_2 samt den zugehörigen geozentrischen Breiten φ_1' und φ_2' vorliegen. Da nämlich die Endpunkte der Fahrstrahlen, gekennzeichnet durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2, auf der Ellipse liegen, so müssen die beiden Gleichungen

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 y_2{}^2 + b^2 x_2{}^2 = a^2 b^2$$

erfüllt sein. Es ist aber

„scheinbares“ und „wahres“ Zenit gewesen und von Leonhard Euler eingeführt worden zu sein. Im 14. Bande der „Novi Commentarii Ac. Scient. Petropolitanae“ hat Euler eine „Tabula pro computandis distantiis inter Zenit verum et Zenit apparens pro data elevatione poli“ gegeben; diese Distanz würde den oben gegebenen Aufschlüssen zufolge mit der Differenz

$$\text{arc tang}\,\frac{a^2 y}{b^2 x} - \text{arc tang}\,\frac{y}{x} = \text{arc tang}\,\frac{e^2 x y}{b^2}$$

sich decken, da ja die geographische Breite den Außenwinkel des Dreieckes *MEG (Fig. 71)* darstellt, dessen entgegengesetzt liegende Winkel bezüglich die geozentrische Breite und der von der wahren und scheinbaren Zenitalrichtung, d. h. von den Graden *EM* und *EG* gebildete $\sphericalangle$ *MEG* sind. — Eine für schnelle Uebersicht sehr bequeme Tabelle der Beziehungen zwischen φ und φ' ist von Jordan (Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885. S. 3) ausgearbeitet worden. Dieselbe hat folgende Gestalt:

Für $\varphi = 0^0$	ist $\varphi - \varphi' = 0'$.	Für $\varphi = 60^0$	ist $\varphi - \varphi' = 10'$.
„ $\varphi = 15^0$	„ $\varphi - \varphi' = 6'$.	„ $\varphi = 75^0$	„ $\varphi - \varphi' = 6'$.
„ $\varphi = 30^0$	„ $\varphi - \varphi' = 10'$.	„ $\varphi = 90^0$	„ $\varphi - \varphi' = 0'$.
„ $\varphi = 45^0$	„ $\varphi - \varphi' = 12'$ (fast).		

Was das Maximum der Differenz $(\varphi - \varphi')$ anlangt, so ergibt sich dasselbe nach Epstein (a. a. O., S. 179) leicht aus der inhaltlich mit unserer obigen übereinstimmenden Gleichung

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{e^2}{2 - e^2}\sin(\varphi + \varphi').$$

Es muß also $\varphi + \varphi' = 90^0$, d. h. tang φ' = cotang φ und tang φ sonach gleich $\sqrt{\frac{1}{1 - e^2}}$ sein. Es findet sich hiernach $\varphi = 45^0\,5'\,49''$, $\varphi' = 44^0\,54'\,11''$, also die bewußte Differenz gleich $11'\,38''$.

$x_1 = r_1 \cos\varphi_1'$, $y_1 = r_1 \sin\varphi_1'$, $x_2 = r_2 \cos\varphi_2'$, $y_2 = r_2 \sin\varphi_2'$; setzt man diese beiden Paare von Koordinatenwerten oben ein, so erhält man

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{r_2^2 \cos^2\varphi_2' - r_1^2 \cos^2\varphi_1'}{r_1^2 \sin^2\varphi_1' - r_2^2 \sin^2\varphi_2'}; \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$$

$$= \frac{(\sin^2\varphi_1' + \cos^2\varphi_1')\, r_2^2 - (\sin^2\varphi_2' + \cos^2\varphi_2')\, r_1^2}{r_2^2 \cos^2\varphi_2' - r_1^2 \cos^2\varphi_1'};$$

$$e = \sqrt{\frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{(r_2 \cos\varphi_2' + r_1 \cos\varphi_1')(r_2 \cos\varphi_2' - r_1 \cos\varphi_1')}}.$$

Da für sämtliche Punkte des Aequators ebenso wie für die beiden Pole der Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite sich annulliert, so geht für $\varphi_1' = 90^\circ$ der Fahrstrahl r_1 in b, für $\varphi_2' = 0^\circ$ der Fahrstrahl r_2 in a über, und wir erhalten e in der uns bereits bekannten Form $\frac{1}{a}\sqrt{(a+b)(a-b)}$.

Berechnung der Gradlänge. Um die lineare Länge λ eines Bogens der Ellipse, dessen Endpunkte resp. durch die Abszissen x_1 und x_2 $(x_1 > x_2)$ bestimmt sind, in aller Strenge zu ermitteln, hat man von der allgemeinen Rektifikationsformel auszugehen; setzt man für $\frac{dy}{dx}$ den uns von oben bekannten Wert $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$ ein, so wird

$$\lambda = \int_{x=x_2}^{x=x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x=x_2}^{x=x_1} \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_{x=x_2}^{x=x_1} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Ein solches irrationales Integral in geschlossener Form auszuwerten, besitzt die Mathematik keine Mittel, und sie hat auch auf deren Auffindung derart verzichtet,

daß sie vielmehr solche Formen unter der Bezeichnung *elliptische Integrale* als selbständige Transzendenten aufzufassen sich entschloß. Um aber eine wesentliche Vereinfachung herbeizuführen, setzen wir $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, $x = a \sin \psi$, $dx = a \cos \psi \, d\psi$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \psi$ und bekommen so

$$\lambda = \frac{1}{a} \int\limits_{\psi_2 = \text{arc sin} \frac{x_2}{a}}^{\psi_1 = \text{arc sin} \frac{x_1}{a}} \sqrt{a^4 - a^4 e^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = a \int\limits_{\psi_2 = \text{arc sin} \frac{x_2}{a}}^{\psi_1 = \text{arc sin} \frac{x_1}{a}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} \, d\psi.$$

Hier läßt sich die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe entwickeln, und zwar ist

$$(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \psi - \frac{1}{8} e^4 \sin^4 \psi - \ldots;$$

diese Reihe gilt es, gliedweise zu integrieren, was mittelst der Reduktionsformel [1])

$$\int \sin^n \psi \, d\psi = - \frac{\sin^{n-1} \psi \cos \psi}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} \psi \, d\psi$$

leicht geschehen kann. Werden die Koordinaten der Endpunkte des Bogens so gewählt, daß der Gleichung $\text{arc tang} \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \text{arc tang} \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} = 1^0$ Genüge geschieht, so ist das Problem gelöst, einen Meridiangrad der sphäroidischen Erde seiner Länge nach mit beliebiger Annäherung an die Wahrheit zu berechnen.

In der Praxis hat man allerdings diesen immerhin mühsamen Weg gewöhnlich nicht eingeschlagen, sondern sich mit einer allen Anforderungen entsprechenden Näherung begnügt. Man identifiziert nämlich einfach für den Mittelpunkt des zu messenden Grades die Meridianellipse mit dem Krümmungskreise des fraglichen Punktes. Wie

---

[1]) Minding, Sammlung von Integraltafeln zum Gebrauche für den Unterricht etc., Berlin 1849. S. 118.

man den Krümmungshalbmesser bestimmt, haben wir bereits oben erfahren; nennen wir ihn ρ und verstehen unter φ den der geographischen Breite gleichen Winkel, welchen die in dem Oskulationspunkte an das Erdellipsoid gelegte Normale mit der Aequatorebene bildet, so ergibt sich den früher entwickelten Relationen zufolge unschwer

$$\rho = \frac{b^2 x^3}{a^4 \cos^3 \varphi} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-e^2}{a^2} . n^3 = p . \left(\frac{n}{a}\right)^3.$$

Hier bedeutet p den uns bekannten Parameter, n die Strecke der Normale zwischen Ellipsoid und Aequatorebene. Wenn also (s. o.) der Punkt, von dem die den Winkel φ mit der großen Achse einschließende Normale ausgeht, genau in der Mitte des Meridiangrades G_φ gelegen ist, dessen Länge man zu kennen wünscht, so reicht es vollkommen aus, $G_\varphi = \frac{\rho \pi}{180}$ zu setzen.

Berechnung der Erdgröße und Erdgestalt aus einer Anzahl von Gradmessungen. An und für sich müßten *zwei* Gradmessungen hinreichen, um die große Halbachse a und die Exzentrizität e, also die beiden für Größe und Gestalt des Erdsphäroides maßgebenden Faktoren, zu bestimmen [1]. Hat man nämlich für die zu den Breiten φ_1 und φ_2 gehörigen Punkte als Gradmitten die zugehörigen Gradlängen G_{φ_1} und G_{φ_2} durch Triangulation erhalten, so bestehen folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{180\, G_{\varphi_1}}{\pi}, \quad \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{180\, G_{\varphi_2}}{\pi}.$$

---

[1]) Die Hauptformel, welche wir nachstehend herleiten, führt ihren Ursprung zurück auf Maupertuis (Sur la figure de la terre et sur les moyens que l'astronomie et la géographie fournissent pour la déterminer, Mém. de Paris, 1734. S. 93 ff.); die elegante Formel für ρ scheint dagegen das Eigentum Bohnenbergers zu sein (Astronomie, Tübingen 1811. S. 187 ff.). Eine übersichtliche Zusammenstellung des ganzen einschlägigen Formelnkomplexes s. bei R. Wolf (Handbuch etc., 1. Band. S. 196 ff.).

Dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite, so bekommen wir

$$\left(\frac{1-e^2\sin^2\varphi_2}{1-e^2\sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{G_{\varphi_1}}{G_{\varphi_2}},\quad e=\sqrt{\frac{G_{\varphi_1}^{\frac{2}{3}}-G_{\varphi_2}^{\frac{2}{3}}}{G_{\varphi_1}^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi_1-G_{\varphi_2}^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi_2}}.$$

Hieraus wird e berechnet, und es ist dann a durch eine der beiden folgenden, sich zur gegenseitigen Kontrolle dienenden Formeln

$$a=\frac{180\,G_{\varphi_1}(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{\frac{3}{2}}}{\pi(1-e^2)}=\frac{180\,G_{\varphi_2}(1-e^2\sin^2\varphi_2)^{\frac{3}{2}}}{\pi(1-e^2)}$$

gegeben.

Wenn die Anzahl der Gradmessungen, aus denen a und e gefunden werden sollen, die Zahl 2 übersteigt, so kann man irgend zwei beliebige derselben miteinander kombinieren, und wird unter zwei Voraussetzungen, die in aller Strenge freilich unerfüllbar sind, stets die nämlichen Werte für a und e erhalten. Diese beiden Voraussetzungen aber sind die nachstehenden: *Die Erdoberfläche ist wirklich die eines Umdrehungsellipsoides, und die Messungen, welche die in die Formeln eingegangenen Werte für* G_{φ_1} *und* G_{φ_2} *geliefert haben, sind absolut fehlerfrei.* Darüber, daß die erste Bedingung nicht zutrifft, werden später eingehende Untersuchungen zu pflegen sein; fürs erste wollen wir annehmen, die Bedingung sei erfüllt, und es handle sich lediglich darum, aus den beliebig vielen vorhandenen Werten G_{φ_1}, G_{φ_2}, $G_{\varphi_3}\ldots G_{\varphi_n}$ die *wahrscheinlichsten Zahlen für* a *und* e herauszurechnen. Man sieht sofort, daß die Aufgabe damit jetzt auf ein anderes Gebiet, nämlich auf dasjenige der *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* hinübergespielt ist.

Das Verfahren, welches sich für den vorgedachten Zweck als das beste empfiehlt, führt den Namen *Methode der kleinsten Quadrate* [1]). Wir geben im folgenden eine nur die allereinfachsten algebraischen Kenntnisse bedin-

---

[1]) Diese Methode ist, ziemlich gleichzeitig und in vollster gegenseitiger Unabhängigkeit, von Gauß und von Legendre

gende Darstellung des Grundgedankens, wie sie für unsere nächsten Zwecke ausreichend erscheint. Gesetzt, es seien irgend zwei Größen x und y miteinander durch eine Gleichung des ersten Grades $ax + by = c$ verknüpft, und man habe durch wirkliche, $n$mal wiederholte Messung die Größen a, b und c zu bestimmen gesucht[1]). Dann hat man also n Gleichungen von folgender Form:

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \; a_2 x + b_2 y = c_2 \; \ldots \; a_n x + b_n y = c_n.$$

Welches die *wahren Werte* von x und y sind, das läßt sich hieraus nicht ohne weiteres entnehmen, denn wie wir auch zwei Gleichungen auswählen und aus ihnen in bekannter Weise x und y berechnen würden, immer kämen abweichende Werte heraus. Denken wir uns also diese wirklichen Werte oben eingesetzt, so wird im allgemeinen keine der n Gleichungen befriedigt sein, vielmehr wird regelmäßig ein *Fehler* sich herausstellen, und zwar haben diese Fehler die folgenden Werte:

$$F_1 = c_1 - a_1 x - b_1 y, \; F_2 = c_2 - a_2 x - b_2 y \ldots$$
$$F_n = c_n - a_n x - b_n y.$$

Wenn man wüßte, daß diese F sämtlich gleiche Vorzeichen hätten, so würde man einfach suchen, ihr *arithmetisches*

---

aufgefunden worden; vgl. Gauß, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Göttingen 1821—26. Von späteren Werken empfehlen wir: Gerling, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg 1843; Dienger, Die Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen, Braunschweig 1857; Helmert, Die Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1872; A. O. Forti, La teorica degli errori e il metodo dei minimi quadrati con applicazioni alle scienze di osservazione, Neapel-Mailand-Pisa 1880; Vogler, Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, Braunschweig 1883; Koppe, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie, Braunschweig 1885. Speziell für geodätische Fragen ist diese letztere Schrift ein guter Führer.

[1]) Zuerst begegnet uns in der Geschichte die Auflösung eines Gleichungssystemes, welches mehr Gleichungen als Unbekannte enthält, bei dem älteren Tobias Mayer (Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Achse und die scheinbare Bewegung der Mondflecke, Kosmographische Nachrichten und Sammlungen, Nürnberg 1750).

Mittel $\frac{1}{n}(F_1 + F_2 + \ldots + F_n)$ so klein wie möglich zu machen; da jedoch positive und negative Fehler gleichmäßig zu erwarten sind, so erheben wir, um bloß positive Größen zu erzielen, jedes F ins Quadrat [1]) und setzen

$$f(x,y) \equiv F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 \equiv (c_1 - a_1 x - b_1 y)^2 + (c_2 - a_2 x - b_2 y)^2 + \ldots + (c_n - a_n x - b_n y)^2 = \textit{Minimo}.$$

Damit dieses Minimum erreicht werde, müssen der Differentialrechnung zufolge die beiden Gleichungen $\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dy} = 0$ bestehen; differentiiert man wirklich und wendet der Kürze halber mit Gauß die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
[aa] &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \\
[ab] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \\
[ac] &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n, \\
[bb] &= b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2, \\
[bc] &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n, \\
[cc] &= c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2
\end{aligned}$$

an, so erhält man als Bestimmungsgleichungen die beiden folgenden:

$$2[aa]x + 2[ab]y - 2[ac] = 0; \, 2[bb]y + 2[ab]x - 2[bc] = 0.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{[ac]\cdot[bb] - [ab]\cdot[bc]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]^2}, \quad y = \frac{[aa]\cdot[bc] - [ab]\cdot[ac]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]^2}.$$

---

[1]) Wenn darin, daß die Fehler gerade zur zweiten Potenz und nicht zu einer anderen erhoben werden sollen, eine gewisse Willkürlichkeit erblickt würde, so könnten wir darauf verweisen, daß sich dieser Vorgang bei tieferem Eindringen als aus den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Notwendigkeit entfließend rechtfertigen läßt. Vgl. dazu: Mees, Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20. Band. S. 145 ff.; Helmert, Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler, ebenda, S. 300 ff.

Diese Werte von x und y dürfen als die wahrscheinlichsten angesprochen werden. Welche Werte sonst für das Paar von Unbekannten angenommen werden, es wird immer die Summe der Fehlerquadrate größer sein, als wenn man die soeben berechneten einführt.

Sollte man mit mehr als zwei Gleichungen, mit einem beliebigen *überbestimmten* System zu thun haben, stets wird der Gang der Rechnung sich analog gestalten. Allerdings läßt sich für gewöhnlich nicht voraussetzen, daß die die unbekannten Größen untereinander in Verbindung setzende Gleichung $f(x, y, z) = 0$ eine algebraisch-lineare sein werde, allein da nach dem sogenannten Taylorschen Lehrsatze stets

$$f(x+h, y+i, z+k) = f(x, y, z) + h\frac{df}{dx} + i\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dz} + \ldots$$

gesetzt werden kann, so vermag auch stets approximativ jene Form eines Gleichungssystemes hergestellt zu werden [1]), auf welche unmittelbar die Methode der kleinsten Quadrate Anwendung findet.

Wir wenden uns jetzt der besonderen Aufgabe zu, mittelst des erwähnten Verfahrens aus einer Reihe von Gradmessungen die wahrscheinlichste Exzentrizität der Meridianellipse unserer Erde herzuleiten, und zwar nehmen wir dabei die durchsichtige Darstellung bei Epstein [2]) zur Richtschnur. Die zur Verfügung stehenden Werte liefert die nachstehende Tabelle [3]):

---

[1]) Wegen eingehenderer Begründung dieser Reduktion auf die lineare Form verweisen wir besonders auf Brünnow (a. a. O., S. 43 ff.). Es versteht sich von selbst, daß die Aenderungen $h, i, k \ldots$ als hinreichend klein vorausgesetzt werden, um von ihren höheren Potenzen ein für allemal absehen zu dürfen. Die Beweise für die Richtigkeit des Taylorschen resp. des ihm subordinierten Maclaurinschen Lehrsatzes enthält jedes Lehrbuch der Analysis.

[2]) Epstein, a. a. O., S. 159. S. 167.

[3]) Die Zahlwerte erscheinen unserer Tabelle gegenüber der genaueren von Epstein etwas abgerundet, indem die Sekundenbruchteile, eventuell unter Erhöhung der letzten Ziffer, beiseite gelassen wurden.

	Wert von φ_i	Wert von $G\varphi_i$ in Toisen	$\log G\varphi_i^{\frac{2}{3}}$	$2 \log \sin \varphi_i$
Lappland . .	66° 20′ 10″	57195,83	3,1715763	9,9237110 — 10
Rußland . . .	58 0 7	57144,29	3,1713152	9,8568596 — 10
England . . .	55 21 36	57123,30	3,1712089	9,8305257 — 10
Preußen . . .	54 58 26	57144,45	3,1713160	9,8264515 — 10
Dänemark . .	54 8 14	57093,09	3,1710557	9,8174218 — 10
Hannover . .	52 32 17	57126,44	3,1712247	9,7993740 — 10
Frankreich . .	45 4 17	57012,44	3,1706464	9,7000490 — 10
Ostindien . .	18 50 10	56795,97	3,1695450	9,0180328 — 10
Peru	—1 31 0	56737,00	3,1692433	9,8454877 — 10

Je einen von diesen Werten von $G\varphi_i$ kombinieren wir nunmehr mit einem Meridiangrade, durch dessen Mittelpunkt der Aequator hindurchgeht; dieser Grad habe die Länge G_0; dann ist

$$e^2 = \frac{G\varphi_i^{\frac{2}{3}} - G_0^{\frac{2}{3}}}{G\varphi_i^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi}, \quad G_0^{\frac{2}{3}} + e^2\, G\varphi_i^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi = G\varphi_i^{\frac{2}{3}}.$$

Der durchlaufende Buchstabe i variiert zwischen 1 (Lappland) und 9 (Peru); es stehen uns also zur Berechnung der beiden Unbekannten $x = G_0^{\frac{2}{3}}$ und $y = e^2$ die folgenden 9 linearen Gleichungen zu Gebote [1]):

$$x + 1245{,}3383\, y = 1484{,}4868,$$
$$x + 1067{,}0255\, y = 1483{,}5945,$$
$$x + 1004{,}0019\, y = 1483{,}2313,$$

[1]) Die Koeffizienten von y ergeben sich aus der Tabelle. Um z. B. denjenigen zu erhalten, welcher in der fünften Gleichung vorkommt, addieren wir $\log G\varphi_5^{\frac{2}{3}}$ und $2 \log \sin \varphi_5$ und finden als Summe $3{,}1710557 + 9{,}8174218 - 10 = 2{,}9884775$. Suchen wir in der Logarithmentafel den zugehörigen Numerus auf, so ist derselbe $= 973{,}8172$. Ferner ist $\frac{2}{3} \log G\varphi_5 = 3{,}1710557$, und hieraus folgt ganz ebenso durch Delogarithmierung der rechts des Gleichheitszeichens stehende Wert 1482,7083.

$$x + 994{,}8726\, y = 1483{,}5972,$$
$$x + 973{,}8172\, y = 1482{,}7083,$$
$$x + 934{,}5418\, y = 1483{,}2856,$$
$$x + 742{,}4982\, y = 1481{,}3117,$$
$$x + 154{,}2025\, y = 1377{,}5596,$$
$$x + 1{,}0345\, y = 1476{,}5367.$$

Wir haben die fünf Größen $[aa]$, $[bb]$, $[ab]$, $[ac]$, $[bc]$ zu bilden und finden bei wirklicher Ausrechnung

$$[aa] = 9{,}0000;\ [ab] = 7117{,}3325;\ [ac] = 13336{,}3117;$$
$$[bb] = 7083917{,}3500;\ [bc] = 10555930{,}4100.$$

Wenn wir diese Werte in unsere oben aufgestellte Endformel einsetzen, so erhalten wir $G_0 = x^{\frac{3}{2}} = 56721{,}73$ Toisen und $y = e^2 = \frac{84408{,}7}{13098831{,}7}$, und hieraus die Abplattung

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 0{,}0032272.$$

Dieser Wert, der, wie wir gleich sehen werden, nicht als ein endgiltiger gelten darf, ist immerhin der relativ beste, der sich aus den gegebenen neun Gradmessungsresultaten abstrahieren läßt. Uebrigens haben wir, indem wir von diesen Resultaten Gebrauch machten, eine Vorwegnahme in geschichtlicher Hinsicht uns zu schulden kommen lassen und müssen deshalb zurückgreifend erst erörtern, wie man zu diesen Werten von $G_{\varphi_1} \ldots G_{\varphi_9}$ gelangt ist.

Die älteren Gradmessungen des neunzehnten Jahrhunderts. Von der peruanischen und von der lappländischen Gradmessung waren wir bereits unterrichtet. Wir registrieren aber hier alle seit 1800 in den verschiedenen Teilen der Erde vorgenommenen Gradmessungsarbeiten — nicht bloss die, auf welche sich unsere obige Tafel bezieht —, indem wir wiederum den historischen Gang einhalten und als Endziel jene Neugestaltung betrachten, welche das ganze Erdmessungsgeschäft durch

die fundamentale Reform v. Baeyers erfahren hat. Unsere Liste dieser einzelnen Gradmessungen ist trotz dieser zeitlichen Beschränkung eine ziemlich umfangreiche.

I. Die Fortführung der britischen Gradmessung. Ursprünglich noch im 18. Jahrhundert begonnen, ward dieselbe später durch Mudge von 50° 37′ 8″ (Insel Wight) bis 53° 27′ 31″ n. Br. (Cliston) ausgedehnt [1]). Ohne daß ihr bestimmte Fehler nachzuweisen wären, ergab diese Messung das sehr unerwartete Resultat, daß Englands Anteil an der Erdoberfläche sich besser einem verlängerten als einem abgeplatteten Rotationsellipsoide anzupassen scheint [2]).

II. Die zweite ostindische Gradmessung. Dieselbe, von Lambton und Everest geleitet, begann bereits 1802 und fand erst 1843 ihren Abschluß [3]); sie erstreckte sich über nicht weniger denn 21 Breitengrade. Aus ihr ergab sich 1 Breitengrad gleich 56796 Toisen.

III. Die dänische Gradmessung. Seit 1765 hatte man im Königreiche Dänemark Triangulationen vorgenommen; zunächst allerdings hatte man dabei bloß kartographische Zwecke im Auge, allein bereits Bugge dachte an eine wirkliche Gradmessung, und seit 1816, nachdem Schumacher die Direktion übernommen hatte, nahm das Vermessungswerk wirklich diese vervollkommnete Gestalt an [4]). Bis 1818 war die Dreiecksverbindung

---

1) Mudge, Account of the Measurements of an Arc of the Meridian from Dunrose to Cliston, Philos. Transact., 1803. S. 383 ff. Später ward dieser Meridianbogen durch Mudge, Kater und James noch bis zu den Shetlandsinseln verlängert.

2) Angaben über die englischen Resultate findet man u. a. in v. Zachs „Monatl. Korrespondenz“ (23. Band. S. 241 ff.; 25. Band. S. 497 ff.).

3) Everest, An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian, London 1830; An Account of the Measurement of two Sections of the Meridional Arc of India, London 1847. Ueber Lambtons ältere Arbeiten geben Auskunft die „Philosophical Transactions“ der Jahre 1818 und 1823.

4) Die älteren Stadien des dänischen Anteiles an der europäischen Gradmessung sind gekennzeichnet in der Einleitung zum ersten Bande des Werkes von Andrae: Den danske Gradmaaling,

von Lysabbel auf der Insel Alsen bis Lauenburg an der Elbe eine vollendete Thatsache geworden, und an letzterem Orte sollte der Anschluß an die damals bereits projektierte hannöversche Gradmessung erfolgen. Neues Leben kam in die längere Zeit nur schwach betriebene dänische Gradmessungsthätigkeit mit dem Jahre 1839, und von da ab bis 1850 wurde die trigonometrische Verbindung zwischen den drei skandinavischen Königreichen hergestellt. Schumachers für 54° 8′ 14″ bestimmter Breitengrad maß 57093 Toisen.

IV. Schwerds Gradmessung auf kurzer Basis. Während im allgemeinen jede Gradmessung den Stempel eines Nationalunternehmens an sich zu tragen und grosse Anstrengungen und Kosten zu erfordern pflegt, setzte ein deutscher Gelehrter, der auch durch seine optischen Arbeiten bekannte Lyzealprofessor Schwerd in Speier, seinen Stolz darein, mit eigenen Mitteln eine solche Bestimmung auf seinem heimischen pfälzischen Boden durchzuführen. Natürlich reichten seine Mittel nicht aus, eine Grundlinie von der üblichen Länge zu messen; die seinige war nur 860 m lang, allein Schwerds Veröffentlichung [1]) bewies, daß auch mit einer so kleinen Basis, bei Anwendung aller Vorsicht, ein sehr gutes Ergebnis sich erzielen lasse. Wie trefflich Schwerd, ohne mit der Methode der kleinsten Quadrate bekannt zu sein, gleichwohl die Ausgleichung seines Netzes bewerkstelligte, ist neuerdings erst von Jordan anerkannt und durch eine nach modernen Grundsätzen vorgenommene Revision erhärtet worden [2]).

V. Die grosse russisch-finnische Gradmessung. Im

Kopenhagen 1867—72. Schumacher selbst hat über seine Arbeiten nur eine einzige selbständige Schrift veröffentlicht: Nachricht über den Apparat, der 1820 zur Messung der Basis bei Braak diente. Altona 1821.

[1]) Schwerd, Die kleine Speierer Basis, oder Beweis, daß man mit einem geringen Aufwande an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine, genau gemessene Linie die Grundlage einer großen Triangulation bestimmen kann, Speier 1822.

[2]) Jordan, Handbuch etc., 1. Band. S. 207 ff. S. 356 ff.

gleichen Jahre, wie Dänemark, trat auch der große Kaiserstaat im Osten in die Konkurrenz der für die Messung der Erdgestalt thätigen Völker ein. Sie wurde von W. v. Struve und Tenner geleitet und reichte im Süden bis zur Donau, während sie im Norden durch die Mitwirkung dreier skandinavischer Fachmänner — Woldstedt von Helsingfors, Selander von Stockholm, Hansteen von Christiania — bis zu den Ufern des nördlichen Eismeeres fortgeführt werden konnte. Nachdem die 259 Dreiecke, in welche das gigantische Netz zerfiel, und welche durch 10 sich gegenseitig kontrollierende Grundlinien zusammengehalten waren, ihre Ausgleichung erfahren hatten, war ein Meridianbogen von 25° 20′ Breitenausdehnung genau bekannt, und für die Mitte dieses Bogens hatte sich eine Gradlänge von 57144 Toisen gefunden [1]). Noch höhere Wichtigkeit erhielt die osteuropäische Gradmessung durch den Umstand, daß aus ihr die Anregung zu dem umfassenden Werke hervorging, welches wir in Abschnitt XIX schildern.

VI. Die hannöversche Gradmessung. Obwohl diese nur zwei Meridiangrade umspannt, hatte sie doch eine große Bedeutung, weil sie von einem Gauß ausgeführt und weil bei dieser Gelegenheit die Technik des Gradmessungsverfahrens in mehrfacher Hinsicht verbessert wurde [2]). Zumal die Einführung des mit dem Namen *Heliotrop* belegten Signalgebers [3]) verdient hierbei ver-

---

[1]) F. G. W. v. Struve, Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands, Dorpat 1831; Exposé historique des travaux exécutés jusqu'à la fin de l'année 1851 pour la mesure de l'arc du méridien entre Fuglenaes 70° 40′ et Ismaïl 45° 20′, St. Petersburg 1852.

[2]) Gauß, Nachricht von der hannöverschen Gradmessung, Bodes astron. Jahrb. f. 1826; Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona, Göttingen 1828.

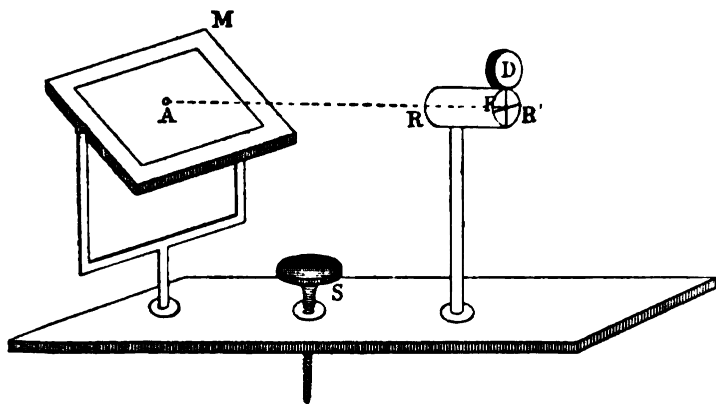
[3]) Gauß, Vom Heliotropen und den ersten damit angestellten Versuchen, Göttinger Gelehrte Anzeigen 1821; s. auch Band 9 und 17 der „Annalen d. Physik u. Chemie". Wegen der Entstehungsgeschichte des Apparates ist zu vergleichen: Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, Leipzig 1856. S. 52 ff. — Statt der ursprünglichen Form, welche der Erfinder selbst seinem

zeichnet zu werden. Gauß ermittelte für eine Breite von 52° 32′ 16 1/2″ eine Meridiangradlänge von 57126 Toisen.

VII. Die ostpreussische Gradmessung. Genau dasselbe, wie von der unter VI besprochenen, kann auch von dieser gesagt werden. Die Männer, welche das Werk begannen und zu Ende führten, waren der berühmte Astronom Bessel und der spätere General (damalige Major)

Apparate gab, ist jedoch gegenwärtig mehr eine Modifikation v. Baeyers (Die Küstenvermessung, Berlin 1849) in Verwendung, welche *Fig. 72* erläutert. Ueber dem Visierpunkte ist mittelst der Schraube S ein Brett horizontal angebracht, welches einen um

Fig. 72.



zwei Achsen drehbaren, also beliebig verstellbaren Spiegel *M* trägt. In der Mitte, bei *A*, ist dieser Spiegel durchbrochen, und zwar liegt *A* in der (horizontalen) Achse des Rohres *RR'*, welches an der entgegengesetzten Seite ein Fadenkreuz *F* trägt und durch einen Deckel *D* verschlossen werden kann. Man dreht nun den Apparat so, daß die Verlängerte *AF* durch den Ort hindurchgeht, welcher ein Lichtsignal empfangen soll; alsdann fällt der Deckel vor, und *S* wird so lange gedreht, bis der reflektierte Sonnenstrahl in die Richtung *AF* gelenkt ist. In diesem Augenblicke wird der Verschluß aufgeklappt, und die Empfangsstation wird von dem zurückgeworfenen Sonnenlichte getroffen.

v. Baeyer[1]). Das Ergebnis der Arbeit war, daß unter 54° 58′ 26″ n. Br. ein Breitengrad 57144½ Toisen umfaßt.

VIII. Die Gradmessung am Kap. Maclear maß einen Meridianbogen zwischen 34° 22′ 6″ und 29° 44′ 18″ s. Br. mit dem ausgesprochenen Zwecke, die Messung von La Caille (s. o.) nachzuprüfen[2]). Für einen Breitengrad, dessen Mittelpunkt auf 32° 2′ 42″ s. Br. fällt, wurde die Länge von 56891 Toisen ermittelt. —

Durch alle diese Messungen, denen allenfalls noch diese oder jene kleinere zugezählt werden könnte[3]), war eine genaue Berechnung der Dimensionen des Erdkörpers ermöglicht. Wir teilen im folgenden die wichtigeren Berechnungsresultate mit.

Dimensionen des Erdsphäroides. Nachdem im Anschlusse an die zu seiner Zeit vorliegenden, also insbesondere die von den französischen Geometern erhaltenen Gradmessungsresultate schon von Walbeck[4]) ein gelungener Versuch gemacht worden war, die ellipsoidischen Hauptabmessungen der Erde *rein mathematisch, ohne Rücksicht auf physikalische Beobachtungen*, zu berechnen, begann Bessel jene großartige Arbeit[5]), in welcher auf Grund von zehn Messungen einzelner Meridiangrade die Bestimmung der für Größe und Form des Erdellipsoides maßgebenden Bestimmungsstücke durchgeführt ward. Mit derjenigen Bessels kann nur noch die Arbeit Clarkes[6]) in Wettbewerb treten, welche

[1]) Die Gradmessung in Ostpreußen, ausgeführt von Bessel und Baeyer, Berlin 1838.

[2]) Maclear, Verification and Extension of La Caille's Arc of Meridian at the Cape of Good Hope, London 1866.

[3]) Hierher wäre z. B. Bohnenbergers sehr exakte Triangulierung Württembergs zu rechnen, beschrieben in Band 5 und 6 der „Monatl. Korrespondenz“.

[4]) Walbeck, Dissertatio de forma et magnitudine telluris ex dimensionibus arcus meridiani dimetiendis, Åbo 1819.

[5]) Bessel, Bestimmung der Achsen des wahrscheinlichen Rotationssphäroides der Erde, Astron. Nachr., Nr. 333.

[6]) Clarke, Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulations and of the Figure of the Earth, London 1858.

einem etwas neueren Datum angehört. Wir stellen nunmehr die von Bessel und die von Clarke gefundenen Werte tabellarisch zusammen, indem wir drittens noch die von Listing[1]) für sein *typisches Sphäroid* ermittelten Zahlen hinzufügen[2]):

	I	II	III
log e	8,9122052 — 10	8,9152558 — 10	8,9196901 — 10
Abplattung . . .	$\frac{1}{299,1528}$	$\frac{1}{294,979}$	$\frac{1}{289,000}$
Große Halbachse	3272077,14 Toisen = 6377397,16 m	20926062 engl. Fuß = 6378206,51 m	6377365 m
Kleine Halbachse	3261139,33 Toisen = 6356078,96 m	20855121 engl. Fuß = 6356583,88 m	6355298 m
Aequatorialquadrant	10017596 m	10018862 m	10017542 m
1° desselben . .	111306,6 m	111320,7 m	111194,9 m
1 geogr. Meile .	7420,44 m	7421,38 m	7420,40 m
Wert von G_0 (s. o.)	110563,74 m	110567,20 m	
Meridianquadrant	10000855,76 m	10001887,00 m	10000218,00 m
Mittlerer Meridiangrad . . .	57013,109 Toisen	57019,000 Toisen	57009,470 Toisen.

Welche Kugel kann dem Erdsphäroid mit der größten Berechtigung substituiert werden? Man sieht, daß, welches dieser drei Zahlensysteme auch zur Norm gewählt wird, die Abweichung des Erdellipsoides von einer Kugel keine sehr beträchtliche ist. Welche Kugel aber, sobald die Vernachlässigung der Größe e erlaubt erscheint, für das Sphäroid zu setzen wäre, das

[1]) Listing, Ueber unsere jetzige Kenntnis von der Gestalt und Größe der Erde, Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1873. S. 76 ff. „Typisch" nennt der Autor sein Sphäroid deshalb, weil es sich am besten zur Vergleichung der bisherigen wie künftigen Sphäroidformen eigne. Allerdings haftet an unserer Aufnahme des Listingschen α in die obige Tabelle eine kleine Inkonsequenz insofern, als dieser Wert auf physikalischem Wege gefunden ward.

[2]) I bedeutet Bessel, II Clarke, III Listing.

steht vorläufig noch dahin, und zwar können zwei Annahmen als gleichberechtigt gelten.

I. Die mit dem Sphäroide inhaltsgleiche Kugel. Wie gleich nachher gezeigt werden wird, ist der Kubikinhalt eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides von der äquatorialen Halbachse a und von der polaren Halbachse b gleich $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Nennen wir R_1 den Halbmesser der Kugel, welche mit dem Ellipsoide gleiches Volumen hat, so wird

$$\frac{4}{3} R_1^3 \pi = \frac{4}{3} a^2 b; \quad R_1 = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Aus Listings Zahlenwerten ergibt sich $R_1 = 6370000$ m, und diesen Betrag haben wir oben schon für den Erdradius in Rechnung gebracht [1]).

II. Die Kugel, deren Halbmesser der mittlere Radius der Meridianellipse ist. Unter den unendlich vielen Halbmessern, die sich in einem elliptischen Quadranten ziehen lassen, und die offenbar sämtlich unter sich an Größe verschieden sind, kann einer als das *arithmetische Mittel aller* betrachtet werden; er soll R_2 heißen. Ihn zu bestimmen, ist eine Aufgabe der Integralrechnung [2]). Es läßt sich darthun, daß

---

[1]) Der Winkel, den ein Radiusvektor der Meridianellipse von der Größe R_1 mit dem Aequatorhalbmesser einschließt, wird von Epstein (a. a. O., S. 186) = 35° 24′ 5″ gefunden. Ungefähr in derselben geographischen Breite liegt der Parallelkreis, unter welchem die von der neueren Meteorologie für höchst wichtig befundene Umkehr in der Richtung der in unserer Atmosphäre angenommenen Vertikalströmungen stattfindet (Ferrel, Recent Advances in Meteorology, Washington 1886; Oberbeck, Ueber die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre, D. Meteor. Zeitschr., 5. Jahrgang. S. 305 ff.).

[2]) Die Aufgabe kommt zuerst in dem volkswirtschaftlichen Werke v. Thünens „Der isolierte Staat“ (2. Auflage, Berlin 1844, 2. Band. S. 433 ff.) vor und ist seitdem durch Grunert, Drobisch, Schlömilch u. a. nach allen Seiten hin mathematisch diskutiert worden. Neuerdings hat sich Bermann eingehend mit ihr beschäftigt (Zur Lehre vom mittleren Radius, Liegnitz 1888), und in dieser Schrift ist auch die Formel näher begründet, welche oben im Texte Verwendung gefunden hat.

$$R_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab}{\pi} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega}}$$

ist. Um dieses Integral auf die sogenannte *Normalform* zu bringen, setzt man für ω den Wert $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ und findet dann

$$R_2 = \frac{2b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2b}{\pi} \mathbf{F}(e, \varphi).$$

Konsequenzen der nicht-sphärischen Erdgestalt; sphäroidische Distanzbestimmung. So ziemlich alle die mathematisch-geographischen Folgerungen, welche wir im XII. und XIII. Abschnitte aus der dortselbst erkannten Kugelgestalt des Erdkörpers gezogen haben, müssen sich jetzt eine entsprechende Abänderung gefallen lassen. Der Radius des zur geographischen Breite φ gehörigen Parallelkreises ist, wie eine einfache Rechnung zeigt [1]), aus

$$a \cos\varphi \text{ in } \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

übergegangen. Der von einem oberhalb der Erdoberfläche befindlichen Punkte an die erstere gelegte Tangentialkegel hat mit ihr nicht mehr einen Kreis, sondern — im allgemeinen wenigstens — eine Ellipse gemein, und danach modifizieren sich auch die früher gefundenen

[1]) Epstein, S. 181 ff.

Werte für die *Sehweite* von einem erhabenen Punkte aus[1]). Drobisch hat vorgeschlagen[2]), mit dem Worte *optischer Horizont* eines jenseits der konvexen Seite einer gekrümmten Fläche gelegenen Punktes jene Kurve zu belegen, längs welcher der vom fraglichen Punkte ausgehende Tangentialkegel die Fläche berührt, und ebenderselbe hat auch die allgemeinen Eigenschaften der fraglichen Kurve angegeben, welche im allgemeinen doppelt gekrümmt ist, für eine Fläche zweiter Ordnung aber in einen Kegelschnitt übergeht[3]).

Einschneidender noch ist der Umstand, daß auf einer nicht-sphärischen Fläche der *Distanzbegriff* sich von Grund aus ändert. Für zwei Punkte des Aequators repräsentiert allerdings nach wie vor der zwischen ihnen liegende (kleinere) Aequatorbogen, für zwei Punkte des Meridianes repräsentiert der elliptische Meridianbogen die kürzeste Entfernung; im übrigen aber ist die *kürzeste Linie* auf einer krummen Fläche, für die wohl auch der Name *geodätische Linie* in Gebrauch ist[4]), eine Kurve für sich, die stets einer besonderen Betrachtung unterzogen werden muß[5]). Speziell für die Rotationsflächen kann eine Fun-

---

[1]) Hierüber verbreitet sich ausführlich Riccardis schon früher zitierte Abhandlung „Sopra un antico metodo per determinare il semidiametro della terra“; dort sind sogar die genauen Formeln abgeleitet, welche die Erdexzentrizität durch gewisse, auf einem erhabenen Punkte zu messende Größen auszudrücken gestatten.

[2]) Drobisch, De horizontibus sphaeroidum specimen analytico-geometricum, Leipzig 1831. S. 2.

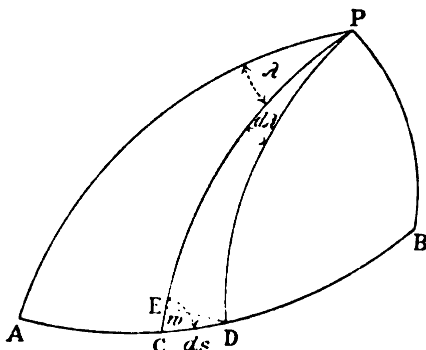
[3]) Ebenda, S. 9.

[4]) Wegen eines manch Beherzigenswertes enthaltenden Vorschlages, zugleich mit der geodätischen noch eine gewisse andere Kurve von doppelter Krümmung, die sogenannte *Feldlinie*, in Betracht zu ziehen, vgl. Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1865.

[5]) In ein System gebracht wurde die bereits von Euler bei seinen Studien über Variationsrechnung mehrfach gestreifte Lehre von den kürzesten Linien durch Gauß: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Abhandl. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 2. Band (1845) und 3. Band (1847). Vgl. auch im 4. Bande der von Schering besorgten Gesamtausgabe

damentaleigenschaft der geodätischen Linien relativ leicht bewiesen werden[1]). Fällt man von irgend einem ihrer Punkte ein Perpendikel r auf die Umdrehungsachse und

Fig. 73.



multipliziert es mit dem Sinus des Azimuts w dieses Punktes, so ist das Produkt $r \sin w$ eine Konstante.

Ueber den einer Rotationsfläche angehörigen Bogen AB *(Fig. 73)* ist zunächst noch nichts vorausgesetzt. P ist der Pol, C und D sind zwei unendlich benachbarte

aller Gaußschen Werke die „Disquisitiones generales circa superficies curvas". Für das allgemeine (dreiachsige) Ellipsoid wurde dann die Integration der Kurve ermöglicht durch Jacobis genialen Griff, geodätische und Krümmungslinien zu einander in engste Beziehung zu setzen (Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid, Journal f. d. reine und angew. Mathem., 19. Band. S. 314 ff.); die weitere Ausführung dieses Gedankens enthält eine Dissertation von Beucke (Die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid, Halle 1885). Die Ueberdeckung einer Fläche mit einer Schar geodätischer Linien und mit den Orthogonaltrajektorien dieser Schar führt zu einer neuen Ortsbestimmung auf der Fläche; s. Brill, Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreieckes, Abhandl. d. k. bayr. Akad. d. Wissensch., math. Klasse, 14. Band, 2. Abteilung; v. Braunmühl, Ueber die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens, ebenda, 14. Band, 3. Abteilung.

[1]) Dieses mehr elementare Verfahren entdeckt zu haben, ist eines der vielen Verdienste v. Baeyers (Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862).

Punkte von AB, somit PC und PD zwei um die unendlich kleine Längendifferenz $d\lambda$ abstehende Meridianbogen ($=\varphi$). Wird $PE=PD$ gemacht, so ist DE ein *geodätischer Parallel,* dessen Radius unserem r gleich ist. Den unendlich kleinen Bogen CE dürfen wir als kreisförmig betrachten, sein Radius sei R, dann gilt dem pythagoreischen Lehrsatze zufolge, da $\sphericalangle\, CED = 90^\circ$ ist, folgendes:

$$ds = CD = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{R^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}$$
$$= d\lambda \sqrt{R^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + r^2}.$$

Wir setzen den unter der Wurzel stehenden Differentialquotienten $= p$ und finden durch Integration $s = \int U d\lambda$, wo $U = \sqrt{R^2 p^2 + r^2}$ ist. Nun gehe φ in $(\varphi + z)$ über, wo z eine willkürliche, für A und B aber verschwindende Funktion von φ ist; dadurch ist eine neue Verbindung von der Länge s' zwischen A und B hergestellt, und es ist $s' = \int U' d\lambda$, $p' = \dfrac{d(\varphi + z)}{d\lambda} = p + \dfrac{dz}{d\lambda}$. Es ist aber nach der Taylorschen Reihenentwicklung

$$U' = F\left(\varphi + z,\ p + \frac{dz}{d\lambda}\right)$$
$$= U + \frac{dU}{d\varphi}\cdot z + \frac{dU}{dp}\cdot\frac{dz}{d\lambda} + \ldots$$

Multipliziert man beiderseitig mit $d\lambda$ und integriert, so wird

$$\int U' d\lambda - \int U d\lambda = s' - s$$
$$= \int \frac{dU}{d\varphi}\cdot z\, d\lambda + \int \frac{dU}{dp}\, dz + \ldots$$

Unsere Bedingung ist, daß s, als kürzester Verbindungsweg, ein Minimum werden soll; dies kann, da z willkürlich war, nur eintreten, wenn (teilweise Integration)

$$0 = \int \frac{dU}{d\varphi} \cdot z d\lambda + \int \frac{dU}{dp} dz$$

$$= \frac{dU}{d\varphi} \cdot z + \int z \left[\frac{dU}{d\varphi} \cdot d\lambda - d\left(\frac{dU}{dp}\right)\right].$$

Unsere Voraussetzung, daß z in den Grenzpunkten verschwinde, führt weiter zu den Gleichungen

$$0 = \frac{dU}{d\varphi} \cdot d\lambda - d\left(\frac{dU}{dp}\right),\ 0 = \int \frac{dU}{d\varphi} \cdot d\lambda - \frac{dU}{dp},$$

$$\text{Konst.} = U - p \cdot \frac{dU}{dp}.$$

Wird wieder $U = \sqrt{R^2 p^2 + r^2}$, $\frac{dU}{dp} = \frac{R^2 p}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}}$ gesetzt, so ist auch

$$\text{Konst.} = \sqrt{R^2 p^2 + r^2} - \frac{R^2 p^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 p^2 + r^2}}.$$

In unserer Figur ist $\sphericalangle PCD = w$, $\operatorname{tang} w = \frac{ED}{EC} = \frac{r\, d\lambda}{R\, d\varphi}$ somit $p = \frac{r}{R} \operatorname{cotang} w$ und

$$\text{Konst.} = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \operatorname{cotang}^2 w + r^2}} = r \sin w,$$

womit unsere oben aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Oberfläche und Volumen des Erdellipsoides. Unter Annahme rein sphärischer Gestalt der Erde wurden deren Oberfläche und Kubikinhalt oben angegeben. Anders stellt sich wiederum die Sache im gegenwärtigen Falle [1]).

---

[1]) Sehr kurz und elegant führt die Integration durch Serret (Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 2. Band, 1. Hälfte, deutsch von Harnack, Leipzig 1885. S. 338 ff.).

Wäre die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid von der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, so wäre die Oberfläche O gegeben durch das Doppelintegral

$$4\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{\frac{1+\frac{(c^2-a^2)x^2}{a^4}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{b^4}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dy\,dx.$$

Die Auswertung führt auf elliptische Integrale; wenn jedoch das Ellipsoid, wie wir es von der Erde annehmen, ein durch Umdrehung um die b entstandenes, wenn also $a=c$ ist, so kann die Integration in geschlossener Form erfolgen; es wird

$$O=4\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Wäre $a=b$, so wäre $O=4\pi a^2+\frac{0}{0}$, . und die genaue Untersuchung lehrt, daß diesmal der unbestimmte Wert $\frac{0}{0}$ in der That der Null selbst gleich ist. — Genaue Tabellen für die Größe der einzelnen Gradlängen und Zonenflächen der Erdoberfläche sind auf Grund der Annahme, daß diese sphäroidisch sei, von H. Wagner und Steinhauser ausgearbeitet worden (Geogr. Jahrb., 7. Band; Wien 1885).

Sehr einfach gestaltet sich die Kubatur. Nach bekannten Formeln hat man allgemein das Volumen

$$V=8\int\limits_{x=0}^{x=a}\int\limits_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int\limits_{z=0}^{z=c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}}dz\,dy\,dx=\frac{4}{3}abc\pi.\text{[1]}$$

---

[1]) Wenn man ein nach Baltzer (Historische Bemerkungen, Ber. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1865. S. 5) in den Vor-

Das Erdellipsoid hat somit den kubischen Inhalt $\frac{4}{3} a^2 b \pi$, wie wir schon erfuhren, und für $a = b$ erhalten wir das bekannte Kugelvolumen $\frac{4}{3} a^3 \pi$.

Das Erdprofil von Lingg. Nicht leicht kann ein Erdglobus groß genug gemacht werden, um auch den Betrag der Abplattung in richtiger Proportion dem Auge ersichtlich zu machen. Trotzdem besitzt die Wissenschaft seit kurzer Zeit ein ganz ausgezeichnetes Lehrmittel für den Anschauungsunterricht, in welchem die ellipsoidische Gestalt unseres Wohnkörpers zum richtigen Ausdruck gelangt; es ist dies das *Erdprofil*, welches der bayrische Ingenieurhauptmann a. D. Ferdinand Lingg zustande gebracht hat [1]). Ein Meridianbogen, der bei Trondjem beginnt und am nördlichen Rande der Sahara sein Ende findet, ist hier in absolut genauem Verhältnisse abgebildet worden; da für eine Reihe ausgesuchter Punkte der Profillinie die nach dem Erdzentrum, sowie nach den beiden Brennpunkten gezogenen geraden Linien wirklich verzeichnet sind, so lehrt ein flüchtiger Blick, daß einerseits die Meridiankurve der Erde kein Kreis, sondern eine Ellipse, andrerseits aber die Abweichung dieser Ellipse von einem Kreise nur eine sehr geringe ist. Da zudem auch ein mit der großen Halbachse um den Erdmittelpunkt beschriebener Kreis punktiert angedeutet ist, so kann man mittelst eines Maßstabes sich von Punkt zu

---

lesungen von Möbius gelegentlich ausgesprochenes Prinzip zu Grunde legt, so kann man ohne Integration diese Formel leicht folgendermaßen gewinnen. Die Größe V muß eine symmetrische, algebraische Funktion dritten Grades der drei gleichberechtigten Halbachsen a, b, c, also $=$ Konst. abc sein. Zur Bestimmung der Konstanten dient der Spezialfall der Kugel; für $a = b = c = 1$ wird dieselbe gleich $\frac{4}{3}\pi$, und demnach muß auch $V = \frac{4}{3} a b c \pi$ sein.

[1]) Das Erdprofil (der Zone von 31° bis 65° nördlicher Breite) ist in meisterhafter Detailausführung im Verlage der bekannten Münchener Kunstanstalt Piloty & Löhle erschienen.

Punkt überzeugen, um wie viel ein gegebener Erdort dem Zentrum näher liegt, als er unter der Voraussetzung wirklicher Sphärizität liegen würde. Mit diesen Hinweisen ist übrigens der Wert des Linggschen Profils noch lange nicht ausreichend gekennzeichnet.

XVIII. Die europäische Gradmessung.

Notwendigkeit der Längengradmessungen. Wenn die Fläche, an welche wir bei dem Worte *Erdgestalt* denken, in aller Strenge ein Rotationsellipsoid ist, so müssen Breitengradmessungen — an und für sich sind deren zwei *notwendig* und auch *hinreichend* — die Gestalt dieses Ellipsoides und nicht minder dessen Größe zu liefern imstande sein. Allein schon sehr frühe erhoben sich Zweifel gegen die ersterwähnte Annahme; man wollte behaupten, daß namentlich die Nord- und die Südhälfte der Erde nicht einem und demselben Sphäroide sich anpassen ließen, und vor allem war es La Caille, der für diese letztere Vermutung eine Stütze in der von ihm in Südafrika ausgeführten Gradmessung erblickte (s. o.). Wie Gerlach[1]) anführt, hätte auch D'Alembert in solchem Sinne sich ausgesprochen[2]). Wenn aber die Erdoberfläche überhaupt *keine Rotationsfläche* wäre, so könnten nicht sämtliche Längengrade von gleicher linearer Größe sein; *Längengradmessungen* liefern mithin das Kriterium dafür, ob überhaupt die Oberfläche des ruhenden Meeres als durch Umdrehung entstanden ge-

---

[1]) Gerlach, Die Bestimmung der Gestalt und Größe der Erde, Wien 1782. S. 36 ff.

[2]) Auch Pasquich machte (Ueber die Krümmungsellipsoide für die nördliche Hälfte unserer Erde, v. Zachs Monatl. Korrespondenz, 8. Band. S. 411 ff.) den für jene Zeit sicherlich merkwürdigen Vorschlag, man solle sich nicht vergeblich abmühen, ein und dasselbe Sphäroid mit sämtlichen Teilen der Erdoberfläche in Einklang setzen zu wollen, vielmehr solle man für verschiedene Länder auch verschiedene, sich möglichst genau anschmiegende Flächen dieser Art auswählen.

dacht werden kann. Man mußte sich, wollte man hierüber ins klare kommen, dazu entschließen, neben den Breitengradmessungen auch noch Gradmessungen längs verschiedener Erdparallele ins Werk zu setzen[1]).

Die erste zielbewußte Messung dieser Art ward, auf Laplaces Anregung hin, vom Jahre 1811 an durch Brousseaud und M. Henry vorgenommen[2]); dieselbe erstreckte sich von der Mündung der Garonne bis an das Ufer des Adriatischen Meeres bei Fiume und folgte somit dem 45. Breitenparallel. Natürlich mußten an der gewaltigen Arbeit, welche erst in den zwanziger Jahren ihre Beendigung fand, auch die Nachbarstaaten sich beteiligen, und es waren insbesondere von schweizerischer Seite Gautier und Pictet, von piemontesischer Plana, von österreichischer Carlini, die in Verbindung mit Generalstabsoffizieren der einzelnen Staaten die erforderlichen astronomischen und geodätischen Beobachtungen machten[3]). Man fand, daß sich allerdings die an den einzelnen Stationen gemessenen Daten nicht völlig genau der sphäroidischen Hypothese einfügen wollten, der astronomische Längenunterschied der beiden Hauptobservatorien von Mailand und Turin ergab sich z. B. um mehr denn 31 Bogensekunden kleiner, als wenn man seinen Wert durch Triangulation feststellte. Auch wenn man alle

---

[1]) Eine gute geschichtliche Orientierung über das, was bei den älteren Längengradmessungen erstrebt und erreicht wurde, sowie über das aus ihnen nach und nach herausgewachsene großartige Gradmessungswerk gewähren die beiden folgenden Schriften: J. J. v. Baeyer, Ueber die Größe und Figur der Erde, Berlin 1861; Sadebeck, Entwicklungsgang der Gradmessungsarbeiten und gegenwärtiger Stand der europäischen Gradmessung, Berlin 1876.

[2]) Brousseaud, Mesure d'un arc du parallèle moyen, Limoges 1839. Des ferneren ist wegen des auf die französischen Gelehrten entfallenden Anteiles noch zu verweisen auf Puissant: Nouvelle description géométrique de la France, Paris 1832. Vgl. auch Wolf, Gesch. d. Astr., S. 627 ff.

[3]) Die Arbeiten der sardinisch-lombardischen Kommissionsmitglieder sind niedergelegt in einer Schrift, welche den gleichen Titel, wie die Brousseaudsche führt und 1825 zu Mailand herausgekommen ist.

Fehlermöglichkeiten, das Bestehen einer von den Gebirgen bewirkten Lotablenkung und bedeutender persönlicher Gleichungen (s. S. 111) in Rechnung zog, blieben doch noch Differenzen übrig, welche man einzig den Unregelmäßigkeiten der Erdgestalt zur Last legen durfte. In Deutschland hatte v. Müffling schon 1816 den Plan zu einer Längengradmessung entworfen[1]), welche die Seeberger Sternwarte (bei Gotha) mit Dünkirchen, als dem Endpunkte der großen französischen Meridianmessung, in Verbindung setzen sollte, allein dieser Plan wurde, da die Zeitumstände ihn eher hinderten als förderten, nur in sehr kleinem Umfange zur Ausführung gebracht. England führte, unter Airys Direktion, eine Parallelmessung zwischen Greenwich und der Westküste von Irland durch[2]). Doch alle diese Vorarbeiten wurden in Schatten gestellt durch das großartige Unternehmen, welches W. v. Struve (s. o.) im Anschluß an seine Messung eines durch das ganze russische Reich hindurchgelegten Meridianbogens noch weiter angebahnt hatte. Man nahm nämlich die von Großbritannien (s. o.) für den 52. Parallel n. Br. begonnene Messung auf russischem Boden wieder auf und setzte sie bis Orsk an der sibirischen Grenze fort[3]), indem man die Orte Saratow, Samara, Orenburg und Orsk durch Dreiecksketten miteinander verband und zugleich mit möglichster Schärfe die Längendifferenzen dieser Punkte nach den — weiter unten, in Abschnitt IV des zweiten Kapitels, auseinanderzusetzenden — Methoden bestimmte. So waren denn in Europa zwei Parallele mit aller nur möglichen Genauigkeit aus-

[1]) Näheres über diesen Plan findet man in der von dem älteren H. Berghaus edierten geographischen Zeitschrift „Hertha“ (Jahrgang 1826, 1. Heft), sowie in Nr. 72 der „Astr. Nachrichten“. Aus der durch v. Müffling zwischen Seeberg und Dünkirchen, mit Mannheim als Zwischenstation, bewerkstelligten rein terrestrischen Dreiecksmessung folgte für die Erdabplattung der Wert $\frac{1}{315}$.

[2]) Airy, Determination of the Longitude of Valencia, London 1857.

[3]) Sadebeck, S. 19.

gemessen, und für eine dritte, sich dem Orte nach zwischen beide einschiebende Messung lagen bereits wichtige Materialien vor[1]).

Die mitteleuropäische Gradmessung v. Baeyers. Bei diesem Stande der Sache veröffentlichte Generallieutenant v. Baeyer das von uns bereits einige Male in diesem Abschnitte citierte Werkchen, welchem er selbst den Spezialtitel „Denkschrift zur Begründung einer *mitteleuropäischen Gradmessung*“ gegeben hatte. Er hob darin[2]) hervor, daß sich an einzelnen Punkten doch sehr beträchtliche Abweichungen herausgestellt hätten, zu deren Erklärung, wenn nicht auf die Vorstellung einer absolut exakt-geometrischen Außenseite des Erdkörpers überhaupt Verzicht geleistet werden wolle, nur drei Möglichkeiten in Betracht gezogen werden könnten: „die Anziehung der Bergmassen, akkumulierte Dichtigkeiten im Inneren und geognostische Lagerungsverhältnisse“. Den einzelnen Ländern scheine jeweils eine ganz besondere Erdabplattung zuzukommen, diejenige für Italien müsse, wenn man sich lediglich an die vorliegenden Messungsresultate halte, eine von der für England berechneten ganz verschiedene sein u. s. w. Allein solange man es bloß mit isolierten Thatsachen zu thun habe, vermöge man sich kein Gesamtbild zu machen, vielmehr sei dies

---

[1]) Hierüber spricht sich v. Baeyer (a. a. O., S. 68 ff.) in folgender Weise aus. Es existierten zur Zeit drei Längengradmessungen, nämlich die französisch-sardinisch-österreichische, die englisch-russische und die französisch-bayrisch-österreichische. „Sie beginnt,“ fährt er fort, „bei Brest am atlantischen Ozean und geht im Parallel von Paris über Straßburg und München bis Wien. Ihre Verlängerung nach Osten würde die russische Gradmessung in der Nähe der astronomischen Station Ssuprunkowzi (48° 45′ n. Br.) treffen und eine zweite Verbindung der großen Meridianbogen im Herzen von Europa abgeben, die, nicht minder als die erste wichtig, ihrer dereinstigen Ausführung gewärtig ist.“

[2]) v. Baeyer, a. a. O., S. 72. Der Autor läßt es unentschieden, ob diese drei Möglichkeiten, deren er oben gedenkt, einzeln oder kombiniert vorkommen, sich wohl auch teilweise neutralisieren können.

nur zu erreichen durch eine ganz Mitteleuropa nach den beiden Hauptfortschreitungsrichtungen überdeckende Gradmessung. Der fragliche geographische Begriff wurde, wie die beigegebene Uebersichtskarte zeigt, von dem Urheber des Vorschlages im denkbar weitesten Sinne genommen; Mitteleuropa erscheint bei ihm als ein sphärisches Trapez, dessen parallele Nordseite Christiania und Upsala, dessen parallele Südseite Palermo in sich aufnimmt, während die Westseite durch Bonn, die Ostseite durch Elbing hindurchgeht. Innerhalb des Trapezes sind die astronomisch bestimmten Fixpunkte durch Dreiecke miteinander verknüpft, und des besseren Anschlusses halber sind auch noch einige nicht im strengen Wortsinne mitteleuropäische Orte in das Netz mit einbezogen, nämlich im Westen Leyden, Brüssel, Genf und die Station des Mont Cenis, im Osten Königsberg i. Pr., Memel, Warschau und Krakau. Durch geeignete Verbindung der geodätischen und der astronomischen Messung werde man in die Lage versetzt werden, zu einem gegebenen Punkte die Krümmungshalbmesser des in ihm sich durchschneidenden Parallels und Meridianes zu ermitteln, und da beide Radien, geeignet rechnerisch vereinigt, das Maß der Krümmung bestimmen, so muß es sich zeigen, ob im konkreten Falle dieses Krümmungsmaß mit dem aus der sphäroidischen Hypothese theoretisch entfließenden übereinstimmt oder nicht.

Der Wunsch des berühmten Geodäten, auf der Grundlage des von ihm entworfenen Programms eine mitteleuropäische Gradmessung zustande kommen zu sehen, ging nicht bloß in Erfüllung, es erweiterte sich vielmehr der Kreis von Aufgaben, welche im Interesse einer schärferen Bestimmung der Erdgestalt gelöst werden sollten, in überraschender, von dem geistigen Vater des Unternehmens zunächst kaum geahnter Weise. Bei den meisten Regierungen, denen die natürlich zuerst gewonnene preußische den Baeyerschen Plan vorlegte, fand derselbe vollen Anklang, und so durfte der Genannte bereits im Jahre 1862 einen sehr befriedigenden Bericht über den Erfolg der bis dahin gepflogenen Verhandlungen ab-

statten[1]). Frankreich hatte zwar die direkte Teilnahme abgelehnt, weil sein Gebiet nur mit einem sehr kleinen Teile von dem Projekte getroffen werde, doch war von seiner Seite die Benutzung aller vorhandenen und der Sache förderlichen Materialien gestattet worden. Dänemark erklärte bereitwilligst seinen Beitritt, nicht minder thaten dies Holland, Rußland (für das vorläufig allein in Betracht kommende Königreich Polen), die meisten deutschen Bundesstaaten, Italien und Belgien. Von der Schweiz, von Schweden-Norwegen, Oesterreich und Bayern war in jenem frühen Stadium noch keine eigentliche Beitrittserklärung, wohl aber die Zusage abgegeben worden, die Angelegenheit in wohlwollende Instruktion nehmen zu wollen. Nachdem man so weit gediehen, setzte v. Baeyer — in dem erwähnten Schriftstücke — gleich auch seine Ansichten über die zweckmäßigste Geschäftsordnung für das große Unternehmen auseinander, und da seine Vorschläge im wesentlichen durchdrangen, so müssen dieselben auch von uns an dieser Stelle wiedergegeben werden. Sämtliche Arbeiten zerfallen in drei Klassen. Die erste derselben umfaßt solche Geschäfte, welche die von ihrer speziellen Landesregierung ernannten Kommissäre im Bereiche ihrer eigenen Grenzen auszuführen in der Lage sind und sich etwa unter folgenden Rubriken zusammenfassen lassen: Prüfung und Verifizierung der Maßeinheit[2]), Ausführung von Dreiecksmessungen zur Ausfüllung bestehender Lücken oder zur Beseitigung älterer ungenügender Operationen dieser Art, Messung von Polhöhen, Azimuten, Längenunterschieden und Pendellängen u. dgl. mehr. In die zweite Klasse gehören diejenigen Aufgaben, welche nur von den Beauftragten

---

[1]) v. Baeyer, Zur Entstehungsgeschichte der europäischen Gradmessung (sine dato); Generalbericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung, Berlin 1862.

[2]) Man hat sich hier zu vergegenwärtigen, daß vor einem Vierteljahrhundert der Gedanke, sämtliche Kulturnationen — leider eine der wichtigsten ausgenommen — würden noch im Laufe des 19. Jahrhunderts ein einheitliches Maß- und Gewichtssystem besitzen, utopisch erscheinen mußte.

zweier oder mehrerer Staaten an der Grenze letzterer gelöst werden können, als da sind: Aneinanderschließung der beiderseitigen Dreiecksketten, Ausgleichung der sich beim Anknüpfen ergebenden Unterschiede, telegraphische Verknüpfung der einzelnen Hauptstationen u. s. w. Endlich aber werden noch Arbeiten übrig bleiben, deren erfolgreiche Erledigung nur dann zu erhoffen ist, wenn die einzelnen Kommissäre auf periodisch wiederkehrenden *Konferenzen* ihre Gedanken über die zunächst anzustrebenden Ziele miteinander austauschen und über gewisse für notwendig erachtete Erweiterungen des Programmes sich verständigen. Das über die Verhandlungen einer solchen Konferenz aufzunehmende Protokoll wird dann am schärfsten den augenblicklichen Stand markieren, auf welchem das Erdmessungswerk angekommen ist.

Permanente Kommission und Zentralbureau. In diesem Sinne nun wurde denn auch wirklich an dieses Werk herangetreten, nachdem die oben genannten Staaten sehr bald ihren wirklichen Beitritt erklärt und vollzogen hatten. Die Durchführung der englisch-russischen Längengradmessung wurde rüstig in Angriff genommen[1]), und die einzelnen Länder begannen mit der Revision der von ihnen bereits früher, hauptsächlich zum Zwecke der Katasteranfertigung, ausgeführten Vermessungsarbeiten. Der Generalbericht für 1863 wußte bereits eine ganze Anzahl solcher Vorbereitungen namhaft zu machen, und wieder ein Jahr später war man so weit, in der Zeit vom 15. bis 22. Oktober die erste Generalkonferenz abzuhalten, zu welcher Deputierte fast von sämtlichen Traktatstaaten erschienen waren. Hier that die Organisation wieder einen tüchtigen Schritt nach vorwärts. Es wurden nämlich jene beiden Instanzen ins Leben gerufen,

---

[1]) Der „Entwurf für die astronomischen Arbeiten der europäischen Längengradmessung vom Jahre 1863“ ist erst 1882 bei dem Verleger aller auf die Gradmessung sich beziehenden Schriften (P. Stankiewicz' Buchdruckerei) publiziert worden. Argelander (Bonn) und O. Struve (Pulkowa) waren zur Abfassung des Entwurfes mit v. Baeyer zusammengetreten.

denen bis zum heutigen Tage die Weiterführung der Gradmessung obliegt: Die *permanente Kommission*, welche in jährlichem Zusammentreten die Geschäfte feststellt, und das *Zentralbüreau*, welches mit der Realisierung der gefaßten Beschlüsse beauftragt ist. Hansen (Gotha) wurde zum Vorsitzenden der — aus sieben Gliedern sich zusammensetzenden — Kommission, v. Baeyer selbst wurde zum Präsidenten des Büreaus ernannt. Von großer sachlicher Wichtigkeit war der Beschluß, daß neben den *astronomischen* und *geodätischen* Messungen auch *nivellitische* ausgeführt werden sollten, um zuvörderst für jedes einzelne Land einen einheitlichen Nullpunkt zu gewinnen und hiernächst diese Nullpunkte durch eine gemeinsame Operation einem nivellitischen Netze einzuflechten, welches auch die in den größeren Seehäfen bereits bestehenden Pegel mit in sich aufzunehmen hatte.

Ausgestaltung zur europäischen Gradmessung. Das Jahr 1866 brachte, nachdem bis dahin die Thätigkeit an den Zentralstellen wie in den einzelnen Ländern sich rege entfaltet [1]) und insbesondere die große Längengradmessung ihren erwünschten Fortgang genommen hatte [2]), dem Unternehmen eine ebenso notwendige

[1]) Eine ins einzelne gehende Analyse aller hierher gehörigen Arbeiten ist begreiflicherweise hier nicht zu geben, weil sie allein schon einen Band füllen würde. Jährlich werden die Protokolle der genannnten Kommission in dem oben genannten Verlage herausgegeben; daneben gewährt die Möglichkeit einer ganz genauen Orientierung Sadebecks „Zusammenstellung der Litteratur der Gradmessungsarbeiten" (Berlin 1881). Das von Behm begonnene, von H. Wagner fortgeführte „Geogr. Jahrbuch", welches bei J. Perthes in Gotha erscheint, bringt seit seinem Bestehen einen für die große Mehrzahl der Fachgenossen ausreichenden Bericht über die Fortsetzung der europäischen Gradmessung; in den ersten Jahrgängen erstattete denselben v. Baeyer selbst, an dessen Stelle trat, als ihm Alter und Geschäftsüberbürdung die Einschränkung seines Wirkungskreises zur Pflicht machten, Bruhns in Leipzig, und diesen ersetzte wieder Th. v. Oppolzer in Wien, nach dessen früh erfolgtem Ableben Rudolph und Hergesell (beide in Straßburg) die Referate übernommen haben.

[2]) Zunächst zum definitiven Abschluß gebracht wurde derjenige Teil der Arbeit, welcher sich auf den westlichen Bogen

wie großartige Erweiterung: aus einer mitteleuropäischen wurde eine *europäische Gradmessung.* Die erste Konferenz derselben fand vom 30. September bis 7. Oktober 1867 in Berlin statt, und es waren dabei vierzehn Staaten durch Bevollmächtigte vertreten. Dieselben teilten mit, welche Arbeiten in ihren Heimatländern abgeschlossen resp. eben in der Durchführung begriffen seien, und außerdem war dem Kongresse noch ein Programm mit elf Fragepunkten zur Durchberatung vorgelegt worden [1]). Während aber bisher die Konferenz immer nach Berlin als nach der Stadt einberufen worden war, in welcher das vollziehende Büreau seinen Sitz hatte, erschien es nachgerade als zweckmäßig, mit dem Versammlungsorte zu wechseln, und so sehen wir die permanente Kommission 1869 in Florenz, 1871 in Wien und 1873 wiederum in der österreichischen Hauptstadt zusammentreten, nachdem im Jahre zuvor die Konferenz, welche in Paris statthaben sollte, wegen des Todes des französischen Kommissärs Delaunay abgesagt worden war. Im Jahre 1874 kam man in Dresden zusammen, 1875 in Paris [2]), und bei dieser letzteren Versammlung

---

bezog; vgl. Henry James, Extension of the Triangulation of the Ordnance Survey into France and Belgium with the Measurement of an Arc of Parallel in Latitude 52° from Valentia in Ireland to Mount Kemmel in Belgium, London 1863.

[1]) Die elf Diskussionsobjekte werden nachstehend aufgezählt: Ausführung und Erfolge der für astronomische Winkelmessungen aufgestellten Vorschriften, Bestimmungen der bei den Beobachtungen benutzten Fixsterne, Messungen der Schwerkraft, Prüfung der Hauptdreieckspunkte auf etwaige Lokalabweichung, Vergleichung der Maßeinheiten und Maßstäbe, Messung neuer und Kontrollmessung älterer Grundlinien, Fehlerverteilung beim Anschlusse der Dreiecksketten und bei der Uebertragung der Azimute, Berechnung der Koordinaten der astronomisch fixierten Punkte, Höhenbestimmungen und allfallsige Festzetzung eines Normalniveaus, Vervollständigung der Dreieckskarte der europäischen Gradmessung, Erörterung der allgemeinen Grundsätze, nach denen die neuen Messungen auszuführen sind.

[2]) Beteiligt waren in erster Linie die acht Mitglieder, nämlich v. Baeyer (Berlin), v. Bauernfeind (München), Bruhns (Leipzig), Faye (Paris), v. Forsch (St. Petersburg), Ibañez (Madrid), v. Oppolzer (Wien) und de Vecchi (Florenz); dazu

wurde ein „internationales und permanentes Büreau für Maße und Gewichte" begründet. Nicht minder bedeutsam war der in Paris zur Annahme gebrachte Beschluß, daß für die europäische Gradmessung ein Basisapparat auf gemeinsame Kosten angeschafft werden und daß auf die endgültige Wahl eines für alle Länder gemeinschaftlichen und verbindlichen Meereshorizontes vorläufig noch verzichtet werden solle. Das den Mitgliedern des Kongresses vorgelegte Verzeichnis gemessener Längendifferenzen und beendigter Nivellements war, wie man aus dem Abdrucke desselben in dem Berichte von Bruhns [1]) ersehen kann, ein recht stattliches. Die nächsten Versammlungsorte waren Hamburg (1878) und Genf (1879), vom 13. bis 16. September 1880 tagte in München die „allgemeine" Konferenz, und 1881 ließ man die letztere wiederum ausfallen [2]). Um den einzelnen Fragen mehr gerecht werden zu können, bestellte man für dieselben besondere Referenten [3]): einzelne in diesen Spezialberichten berührte und vom Plenum der Konferenz in Erwägung gezogene Punkte werden von uns in den folgenden Abschnitten gelegentlich hervorgehoben werden. Als man 1883 wieder zu einer allgemeinen Konferenz in Rom zusammenkam, hatte man sich über die

---

kamen noch Adam (Brüssel), Barozzi (Bukarest), Ferrero (Florenz), Peters (Kiel), Ricci (Turin), Perrier, Saget und Yvon Villarceau (Paris) nebst mehreren anderen hervorragenden Franzosen des Gelehrten- wie des Militärstandes.

[1]) Wagners Geogr. Jahrbuch, 7. Band. S. 310.

[2]) Eine engere Beratung der ständigen Kommissionsmitglieder hatte natürlich trotzdem stattgefunden, und zwar im Haag.

[3]) Der Gegenstände, über welche gesonderter Bericht erstattet werden sollte, waren es im ganzen acht, und es sind seitdem auf den Konferenzen jeweils folgende Themen als ständig der Tagesordnung angehörig betrachtet worden: Astronomische Orts- (d. h. Längen-, Breiten- und Azimut-) Bestimmungen (Referenten zunächst Bruhns und v. Oppolzer); Untersuchungen über die atmosphärische Strahlenbrechung (Ref. v. Bauernfeind); Ausgeführte Triangulationen (Ref. Ferrero); Basismessungen und hierzu dienliche Apparate (Ref. Perrier); Präzisionsnivellements (Ref. Hirsch-Neuenburg); Mareographen, d. h. Apparate zur exakten Bestimmung des Mittelwassers eines Meeres oder Meeresteiles (Ref.

Frage des einheitlichen Meridianes, sowie über die Einführung einer allgemein gültigen Weltzeit — s. o. Abschnitt XIII — zu verständigen; auch stellte man fest — s. u. Abschnitt XXII —, daß, wenn bislang eine allseitig befriedigende Definition des Begriffes *Meereshöhe* noch nicht gewonnen sei, hierfür nicht sowohl die Unvollkommenheit unserer Hilfsmittel als vielmehr die in der Natur der Dinge begründete Thatsache verantwortlich zu machen wäre, daß eben nicht alle Meere ein und derselben Niveaufläche angehören. Der Generalbericht zeichnete sich diesmal durch besondere Reichhaltigkeit aus [1]).

Der Tod des Generals v. Baeyer (1885) hat, so fest gefügt vermochte derselbe das aus seiner Anregung hervorgegangene und unter seiner Leitung kräftig geförderte Werk der europäischen Gradmessung zu hinterlassen, keine Stockung in den Arbeiten derselben hervorgerufen. Preußen hat seitdem (1886) sein geodätisches Institut begründet, das von Helmert völlig im Geiste der neuerdings die höhere Geodäsie beherrschenden, in den nächsten Abschnitten von uns einläßlicher zu schildernden Reformideen geleitet wird, und die Teilnahme sämtlicher beteiligter Staaten ist nach wie vor eine überaus rege. So ist man denn dahin gelangt, eine durchaus neue Vorstellung von dem Wesen der *Erdgestalt* sich zu bilden und zugleich über die Mittel und Wege Klarheit zu schaffen, durch deren Anwendung allein unser

---

Ibañez); Schweremessungen durch Pendel resp. durch besonders für diesen Zweck eingerichtete Pendelapparate (Ref. E. Plantamour und Céllerier); Gradmessungslitteratur (Ref. Sadebeck). Vgl. Verhandlungen der am 13. bis 16. September zu München 1880 abgehaltenen 6. allgemeinen Konferenz der europäischen Gradmessung, redigiert von den Schriftführern Bruhns und Hirsch; zugleich mit dem Generalberichte für das Jahr 1880 herausgegeben von dem Zentralbüreau der europäischen Gradmessung, Berlin 1882.

[1]) Die Fortsetzung der von Sadebeck begonnenen verdienstlichen Zusammenstellung aller auf die Gradmessungsarbeiten bezüglichen Litteraturprodukte ist in die Hand genommen worden von Börsch, den ersten Beitrag dieser Art enthält der achte Anhang des Generalberichtes für 1883.

Wissen von der Erdgestalt zu einem immer genaueren und umfassenderen gemacht werden kann [1]).

Damit es aber hierzu kommen konnte, dazu war erstes Erfordernis, daß man nicht lediglich die *astronomisch-feldmesserischen* Operationen pflegte, sondern daß man denselben als *gleichberechtigtes Korrelat* gewisse *physikalische Beobachtungen* zur Seite stellte. Für uns erwächst sonach jetzt die Notwendigkeit, die Möglichkeit zu erwägen, ob sich über die Erdgestalt auch auf andere, von der direkten Ausmessung der Breiten- und Längengrade unabhängige Weise etwas aussagen lasse.

XIX. Physikalische Argumente zu gunsten der sphäroidischen Hypothese.

Huygens und Newton. Im XV. Abschnitte ist davon gesprochen worden, daß durch die Wahrnehmungen, welche einige französische Gelehrte unter sehr niedrigen Breiten gemacht hatten, eine gewisse Wahrscheinlichkeit für die Annahme erbracht wurde, es sei die Erde keine vollkommene Kugel, sondern ein gegen den Aequator hin ausgebauchter Körper. Der erste Forscher, welcher mit vollem Bewußtsein diese anscheinende Abnormität als eine unmittelbare Konsequenz mechanischer Sätze hinstellte, war der Niederländer Huygens. Ihm

[1]) Die letzte zur Kenntnis des Verf. gekommene Veröffentlichung der permanenten Kommission ist der 1888 ausgegebene, von Hirsch redigierte Bericht über die im Oktober 1887 zu Nizza abgehaltene Versammlung; beigegeben ist dem stattlichen Quartbande noch ein „Supplément; Rapport sur les triangulations" aus der Feder des italienischen Generals Ferrero. Natürlich weist der Personalstand diesmal manche Veränderungen auf. Die Mitglieder des permanenten Ausschusses sind Ibañez (Spanien, Präsident), Helmert und Förster (Preußen), Hirsch (Schweiz), van de Sande Bakhuyzen (Niederlande), Faye (Frankreich), Ferrero (Italien) und Zachariä (Dänemark). Ein ausführlicher Bericht über Lotablenkungen und Pendelmessungen wurde von Helmert erstattet, während der holländische Kommissär über die astronomischen und Perrier über die Basis-Messungen der Konferenz referierte.

war es soeben gelungen, die Gesetze aufzudecken, von welchen sich die bei jeder Drehung eines Körpers um eine Achse hervortretende *Zentrifugal-* oder *Schwungkraft* abhängig erweist [1]. Ein wenig später begann Newton, sich mit ähnlichen Dingen zu beschäftigen, und so kam es, daß derselbe bereits 1687 mit seiner aprioristischen Bestimmung der wahrscheinlichsten Gestalt des Erdkörpers hervorzutreten vermochte [2], während Huygens' hierauf bezügliche Veröffentlichung erst 1690 erfolgte [3]. Jedenfalls aber kommt letzterem das Verdienst zu, auch auf experimentellem Wege einen Beitrag zur Begründung der neuen Lehre geleistet zu haben [4], einen Beitrag, der in den Augen vieler wohl beweiskräftiger war als die strenge analytische Deduktion.

Newton dachte sich die Erde zunächst kugelförmig und von zwei im Mittelpunkte zusammenstoßenden, recht-

---

[1] Gute Uebersicht über die wichtigsten Phasen dieser Entdeckungsepoche gewährt Poggendorffs „Geschichte der Physik“ (Leipzig 1879. S. 627 ff.).

[2] Sir Isaak Newtons Mathematische Prinzipien der Naturlehre, deutsch von Wolfers, Berlin 1872. S. 401 ff.

[3] Die betreffende Schrift ist der „Discours de la cause de la pesanteur“, welcher später unter dem Titel „De causa gravitatis“ der Gesamtausgabe der Huygensschen Werke einverleibt wurde. W. Burckhardt hat diesen Diskurs vor einigen Jahren (Leipzig 1886) zusammen mit dem berühmteren „Traité de la lumière“ wieder abdrucken lassen. Wiewohl nicht zu leugnen ist, daß Huygens den Begriff der Gravitation minder tief auffaßte als Newton, insofern der letztere alle Massenteilchen gegeneinander schwer, der erstere hingegen alle Schwere im Erdmittelpunkte vereinigt sein ließ, so geht doch andererseits Huygens den quantitativen Beziehungen viel mehr auf den Grund, und die Auffassung der Erde als eines zentrobarischen Körpers konnte bei der Geringfügigkeit der Abplattung keinen Nachteil bringen. Vgl. in Burckhardts Neudrucke S. 109 ff.

[4] Wir meinen den Versuch mit der auf die Töpferscheibe gesetzten Thonkugel, die nach wenigen Umdrehungen schon eine deutliche Abplattung erhält. Unsere physikalischen Kabinette pflegen den Thonklumpen durch ein aus elastischen Spangen zusammengesetztes Kugelskelett zu ersetzen, welches, auf die Zentrifugalmaschine gesteckt, bald die ellipsoidische Ausbuchtung zu zeigen beginnt.

winklig aufeinander stehenden Kanälen durchsetzt, von welchen der Achsenrichtung nach der eine mit einem Aequatorialradius, der andere mit dem Polradius übereinstimmt. Beide Kanäle seien mit Wasser gefüllt. Dann wird, so argumentiert Newton, der polare Kanal von der Schwungkraft der rotierenden Erde gar nicht beeinflußt, wohl aber wird es der äquatoriale in dem Sinne, daß das Wasser in ihm, weil ja die Zentrifugalkraft der Schwerkraft hier direkt entgegenwirkt, ein geringeres Gewicht erhält. Nach Newtons Berechnung sollen 288 Wasserteile im Polschenkel 289 Wasserteilen im Aequatorschenkel das Gleichgewicht halten, und diese Annahme verhilft ihm mittelst einiger weiterer Betrachtungen, die jedoch keineswegs als einwurfsfrei anerkannt werden können, zu dem Resultate, daß die Abplattung der einstmals rein sphärischen, aber zugleich flüssigen oder doch weichen Erde gegenwärtig gleich $^1/_{230}$ — nicht etwa, wie man dem Obigen nach vielleicht erwarten möchte, $^1/_{289}$ — sei [1]).

Gleich darauf geht Newton dazu über, die Beziehungen zwischen Schwerkraft, Schwungkraft und Länge des Sekundenpendels zu erörtern, jedoch muss man gestehen, daß er nicht so klar sich über die hier obwaltenden Verhältnisse ausspricht, wie dies Huygens seinerseits thut [2]). Die Darlegung desselben ist, wenn man sie des altertümlichen Gewandes entkleidet, in der Hauptsache die gleiche, welche gegenwärtig in den Lehrbüchern der Astronomie und Physik Aufnahme zu finden pflegt, und an welche auch wir uns im folgenden zu halten gedenken [3]). Hierzu sind aber noch einige vorbereitende Untersuchungen von nöten.

---

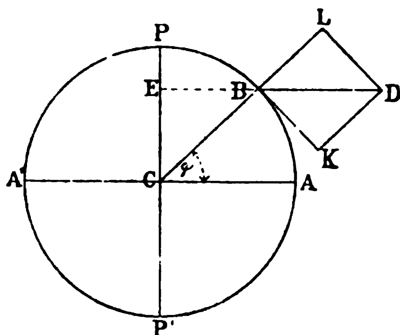
[1]) Eingehend, mit Hilfe der Integralrechnung, wird Newtons Schlußfolge zu begründen gesucht in dem uns bekannten Werk von Lulofs-Kästner (S. 12 ff.).

[2]) Huygens konnte sich eben auf seine vollkommene Beherrschung der Lehre von der Zentrifugalkraft stützen (Dühring, Kritische Geschichte der Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873. S. 120 ff.).

[3]) Vgl. z. B. Epstein, a. a. O., S. 203 ff.

Schwerkraft und Zentrifugalkraft auf der kugelförmigen Erde. Es sei AA' ein äquatorialer Durchmesser der in *Fig. 74* durch einen Meridianschnitt dargestellten Erde, PP' die Umdrehungsachse, B ein unter der Breite φ gelegener willkürlicher Punkt des betreffenden Meridianes. Die in B parallel zur Aequatorebene

Fig. 74.



wirkende, in unserer Figur also durch eine Strecke $BD \parallel AA'$ darzustellende Zentrifugalbeschleunigung wollen wir f_φ nennen, so daß sie also für A oder A' in f_0, für P oder P' in f_{90} übergeht. Die Größe der Beschleunigung hat eben Huygens (s. o.) zuerst gefunden; dieselbe ist gleich $\frac{4\rho\pi^2}{t^2}$, wenn ρ den Halbmesser des beschriebenen Kreises, t aber die Zeit darstellt, innerhalb deren der bewegte Punkt einen Weg von der Größe $2\rho\pi$ beschreibt. In unserem Falle ist, da die Umdrehungsdauer für alle Punkte der Erde die nämliche ist, unter r wie immer den Erdradius verstanden,

$$f_0 = \frac{4r\pi^2}{t^2},\ f_\varphi = \frac{4BE.\pi^2}{t^2} = \frac{4r\cos\varphi\,\pi^2}{t^2};\ f_\varphi = f_0\cos\varphi.$$

Hierbei ist mit BE das von B auf PP' gefällte Perpendikel, der Halbmesser des vom Punkte B zurückzu-

legenden Tageskreises gemeint. Nunmehr soll jener Bruchteil der für B ermittelten Zentrifugalbeschleunigung gefunden werden, welcher in die Richtung des Erdhalbmessers BC selbst fällt, der Schwere also direkt entgegenwirkt. Wir zerlegen BD in zwei Seitenkräfte, deren eine, $BK = BD \sin\varphi$, tangential angreift und somit gar nicht in Betracht kommt, während die andere, $BL = BD \cos\varphi$, eben die gesuchte ist. Man hat sonach $BL = f_0 \cos^2\varphi$. Wir bezeichnen ferner mit g_φ die unter der Breite φ wirklich bestehende Beschleunigung der Erdschwere, dann muß offenbar $g_\varphi > g_0$ und g_{90} ein Maximum sein. Bei stillstehender Erde würde die Beschleunigung für alle Punkte gleich groß, nämlich ebenso groß wie am Aequator, d. h. $= g_0 + f_0$ sein; da sich aber die Erde dreht, so müssen wir die Komponente BL in Abzug bringen und haben also:

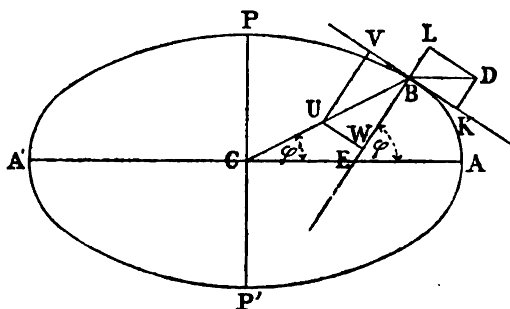
$$g_\varphi = g_0 + f_0 - f_0 \cos^2\varphi = g_0 + f_0 (1 - \cos^2\varphi);$$
$$g_\varphi - g_0 = f_0 \sin^2\varphi.$$

In Worten: *Die Vergrösserung der Schwerebeschleunigung, vom Aequator an gerechnet, ist proportional dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite.* Den größten Wert erlangt $(g_\varphi - g_0)$ dann, wenn $\sin\varphi = 1$, $\varphi = 90^0$ wird, also (s. o.) an den Polen. Da $f_0 = g_{90} - g_0$ ist, so kann g_φ durch zwei bekannte g ausgedrückt werden; es ist $g_\varphi = g_0 + (g_{90} - g_0) \sin^2\varphi = g_0 \cos^2\varphi + g_{90} \sin^2\varphi$.

Schwerkraft und Zentrifugalkraft auf der ellipsoidischen Erde. Diese Formeln gelten im wesentlichen auch dann noch, wenn wir statt einer Kugel ein abgeplattetes Sphäroid betrachten, welches nicht erheblich von ersterer abweicht. In *Fig. 75* sollen die meisten Buchstaben dieselbe Bedeutung haben wie in der vorigen; die Abweichung beider Zeichnungen tritt wesentlich darin hervor, daß die Normale LB in ihrer rückwärtigen Verlängerung nicht durch den Mittelpunkt C hindurchgeht, sondern AA' in einem näher an A gelegenen Punkte E durchschneidet. Die geographische und geozentrische Breite von B seien resp. φ und φ'. Ursprüng-

lich, als die Erde noch sphärisch war, stimmte die Fallrichtung mit BC überein; wir denken uns auf BC eine Strecke BU gleich der konstanten Fallbeschleunigung abgetragen und das Kräfterechteck $BVUW$ verzeichnet;

Fig. 75.



dann ist BW die thatsächlich zur Geltung kommende Fallbeschleunigung, während BV, wenn längs der Tangente keine Bewegung stattfinden soll, gleich BK sein muß. Wir verfügen demgemäß über die folgenden beiden Gleichungen ($\sphericalangle\, UBW = \varphi - \varphi'$):

$$g_\varphi = BU \cos(\varphi - \varphi') - f_\varphi \cos\varphi; \quad f_\varphi \sin\varphi = BU \sin(\varphi - \varphi').$$

Aus diesen beiden ist BU zu eliminieren; so findet sich

$$g_\varphi = \frac{f_0 \sin\varphi}{\sin(\varphi - \varphi')} \cos(\varphi - \varphi') - f_0 \cos\varphi$$

$$= \frac{f_0}{\sin(\varphi - \varphi')} [\sin\varphi \cos(\varphi - \varphi') - \cos\varphi \sin(\varphi - \varphi')] = \frac{f_0 \sin\varphi'}{\sin(\varphi - \varphi')}.$$

Drückt man, wofür in Abschnitt XVII die Regeln gegeben waren, φ' durch φ und die Exzentrizität e der Meridianellipse aus, so wird

$$g_\varphi = \frac{f_0 (1 - e^2)}{e^2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}.$$

Diese allgemeine Formel wollen wir nun in dem Sinne umgestalten, daß wir, wozu wir ja berechtigt sind, e als eine sehr kleine Größe betrachten und e^m $(m > 2)$ als verschwindend nicht mehr beachten. Zunächst ist durch einfache Division

$$\sqrt{\frac{1}{1-e^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{1+e^2\sin^2\varphi}$$

und für diesen Wurzelausdruck dürfen wir hinwiederum, indem wir die binomische Reihenentwicklung anwenden, $(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi)$ setzen. So wird denn also

$$g_\varphi=\frac{f_0(1-e^2)}{e^2}+\frac{1}{2}f_0(1-e^2)\sin^2\varphi.$$

Spezialisieren wir die Schlußformel, indem wir für φ successive 90^0 und 0^0 substituieren, so bekommen wir

$$g_{90}=\frac{f_0(1-e^2)}{e^2}+\frac{1}{2}f_0(1-e^2)=g_0+\frac{1}{2}f_0(1-e^2);$$
$$g_0=\frac{f_0(1-e^2)}{e^2}.$$

Man hat sonach, ganz wie oben, erhalten:

$$g_\varphi=g_0+(g_{90}-g_0)\sin^2\varphi=g_0\cos^2\varphi+g_{90}\sin^2\varphi.$$

Das Gesetz, nach welchem die Schwerkraft vom Aequator gegen die Pole hin zunimmt, ist für eine sphärische Erde ganz dasselbe wie für eine sphäroidische, vorausgesetzt, dass der Meridian der letzteren von einem Kreise wenig abweicht [1]).

[1]) Der obige, merkwürdige Satz findet sich angedeutet, wennschon nur teilweise wirklich bewiesen bei einer ganzen Reihe von Autoren des vorigen Jahrhunderts. Sehr klar drückt sich Hermann aus (Phoronomia, Amsterdam 1716. S. 364 ff.), der jedoch den umgekehrten Weg einschlägt und die Meridiankurve nach ihren vorher abgeleiteten mechanischen Eigenschaften konstruiert. Vgl. auch Frisi, Disquisitio mathematica in causam physicam figurae et magnitudinis terrae nostrae, Mailand 1752.

Das Clairautsche Theorem. Die bisher bewiesenen Sätze, so bedeutungsvoll sie auch sind, gewähren uns noch keine Möglichkeit, die Größe der Erdabplattung, welche für die Gestalt der Erde maßgebend ist, lediglich aus Schweremessungen zu berechnen. Hierzu verhilft uns vielmehr erst das berühmte *Clairautsche Theorem*. In seinem noch im jugendlichsten Alter geschriebenen Werke über die Ableitung der Erdgestalt aus hydrostatischen Prämissen [1]) legt der berühmte Mathematiker zuerst die kritische Sonde an die von Huygens und Newton (s. o.) aufgestellten Theorien und berechnet für gewisse Umdrehungsellipsoide sowohl deren Gesamtanziehung mit Rücksicht auf irgend einen außerhalb gelegenen Punkt als auch die Größe der auf dem Radiusvektor senkrecht stehenden Komponente dieser Anziehung. Die betreffenden Ellipsoide sind entweder homogen, oder es sind Schichtungskörper, in deren Kern die Ortsflächen gleicher Dichte als konzentrische und koachsiale Ellipsoidflächen erscheinen, während um den Kern eine beliebige Schale, erfüllt mit homogener Flüssigkeit, sich herumlegt [2]). Durch Entwicklungen, auf welche wir schon deshalb hier nicht im einzelnen eingehen können, weil sie dem modernen Leser fremdartig erscheinen müssen [3]), findet Clairaut, daß, wenn die

[1]) Clairaut, Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743. Eine Textauflage davon erschien nochmals in Paris 1808. Da aber desungeachtet das Buch zu den Seltenheiten gehört, war es freudig zu begrüßen, daß eine gründliche Analyse desselben von Helmert in sein eigenes großes Werk (Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, 2. Band, Leipzig 1884. S. 109 ff.) aufgenommen worden ist.

[2]) Ursprünglich hatte Clairaut hinsichtlich der Schichtungsverhältnisse eine beschränktere Bestimmung getroffen (Investigationes aliquot, ex quibus probatur, terrae figuram ad ellipsin accedere debere, Philos. Transact., 1737); die wenigen Jahre aber, welche das Erscheinen dieses Aufsatzes von dem des selbständigen Werkes trennten, hatten genügt, um ihn für eine ungleich allgemeinere Auffassung die Erweiterung seines Theoremes durchführen zu lassen.

[3]) Ein von modernen Hilfsmitteln Gebrauch machender Beweis wird weiter unten an seinem Orte, in Abschnitt XXII, nachgetragen werden.

Abplattung α sich auf die erwähnte, die Oberflächenschicht bildende Flüssigkeit bezieht, die folgende Relation statthat:

$$\alpha + \frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} \cdot \frac{f_0}{g_0};$$

Abplattung plus $\dfrac{\textit{Zunahme der Schwerkraft vom Aequator zum Pole}}{\textit{Schwerkraft am Aequator}}$

gleich $\dfrac{5}{2}$ *mal* $\dfrac{\textit{Schwungkraft am Aequator}}{\textit{Schwerkraft am Aequator}}$.

Damit ist nun die oben berührte Frage in der That gelöst, denn g_0 und f_0 können als bekannte Größen gelten; g_{90} aber kann, sobald für ein beliebiges φ das zugehörige g_φ eruiert ist, aus der uns bekannten Gleichung $\dfrac{g_\varphi - g_0 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$ hergeleitet werden.

Allerdings stellt die von Clairaut angegebene Formel nicht ein in aller Strenge zu Recht bestehendes Naturgesetz, sondern nur die Annäherung an ein solches vor, immerhin aber eine an die Wahrheit sehr nahe heranreichende Annäherung [1]). Es wird später gezeigt werden, wie sich der bezügliche Ausdruck bis zu jedem wünschenswerten Grade vervollkommnen läßt; für den von uns zur Zeit erreichten Standpunkt darf es beim Clairautschen Lehrsatze in seiner ursprünglichen Form sein Bewenden haben.

Die Pendelschwere. Natürlich kommt es jetzt noch darauf an, die Größen g_0 und g_φ bequem und zugleich scharf messen zu können. Durch *Fallversuche* würde sich dies, obwohl ein theoretisches Hindernis dem nicht entgegensteht [2]), schwerlich erreichen lassen. Wohl

---

[1]) Das wußte Clairaut selbst, denn er verlangte, daß nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt werden solle.

[2]) Unter der Voraussetzung, daß nur Fallhöhen in Frage kommen, welche dem Radius der Erde gegenüber verschwindend

aber bieten uns Pendelbeobachtungen eine in jeder Hinsicht befriedigende Aushilfe dar, denn wie wir schon in Abschnitt XV erfuhren, ist die absolute Länge des sekundenschlagenden Pendels unter der Polhöhe φ gleich $\frac{g_\varphi}{\pi^2}$, d. h.: *Die Länge des Sekundenpendels ist proportional der Intensität der Schwere und somit das natürliche Mass dieser Intensität.* Führen wir die entsprechenden Substitutionen durch, so nimmt unsere obige Formel jetzt diese Gestalt an (l_φ ist die Länge des Sekundenpendels unter der Breite φ):

$$\alpha = \frac{5}{2\pi^2} \cdot \frac{f_0}{l_0} - \frac{l_{90} - l_0}{l_0}.$$

Hier ist f_0 eine bekannte, nur von der Größe des Halbmessers abhängige Zahl; l_{90} und l_0 können dem oben Gesagten zufolge bestimmt werden, wenn man über zwei unter den Breiten φ_1 und φ_2 vorgenommene Messungen des Sekundenpendels verfügt, die bezüglich l_{φ_1} und l_{φ_2} geliefert haben. Eine einfache Rechnung ergibt nämlich, daß dann

$$l_0 = l_{\varphi_1} - \frac{(l_{\varphi_1} - l_{\varphi_2}) \sin^2 \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
$$= l_{\varphi_2} - \frac{(l_{\varphi_1} - l_{\varphi_2}) \sin^2 \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
$$l_{90} = l_0 + \frac{l_{\varphi_1} - l_{\varphi_2}}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

ist. In Wirklichkeit wird man sich freilich nicht mit zwei Spezialwerten begnügen, sondern man wird eine

---

klein sind, stellen bekanntlich die Galileischen Fallgesetze für die Fallhöhe s, die Schwerkraft g und die Fallzeit t die Gleichung $g = \frac{2s}{t^2}$ auf. Wäre $t = 1$, so wäre $g = 2s$, die Schwerkraft ist mithin gleich dem doppelten Fallraume in der ersten Sekunde. Wie schwer es jedoch ist, Fallräume mit der nötigen Genauigkeit zu messen, wird aus unseren Mitteilungen über Fallversuche im allgemeinen in Abschnitt V des dritten Kapitels erhellen.

möglichst große Anzahl derselben sich zu verschaffen suchen, um mittelst der Ausgleichungsrechnung die wahrscheinlichsten Werte für l_0, l_{90} und damit auch für α berechnen zu können.

Ehe wir in die Beschreibung der Methoden, welche für die Ermittlung der Länge des Sekundenpendels teils in Verwendung waren, teils es noch sind, einzutreten beginnen, haben wir noch daran zu erinnern, daß eine größere Reihe von Korrektionen erforderlich ist, ehe der aus der Beobachtung resultierende Wert von l_φ als ein wirklich zuverlässiger anerkannt werden darf. Wenigstens die wichtigeren unter diesen Berichtigungen müssen hier eine Stelle finden [1]).

Das mathematische und das physische Pendel. Ein wirklich mathematisches Pendel, wie es die Theorie erfordert, bestehend aus einem absolut gewichtslosen Faden, an dem ein materieller Punkt von unmeßbar geringer Ausdehnung befestigt ist, gehört der ideellen, nicht aber unserer thatsächlichen Welt an. Man kann jedoch auch für ein physisches Pendel, d. h. für einen wie immer gestalteten Körper, der sich um eine durch ihn hindurchgesteckte Achse drehen kann, die Länge eines mathematischen Pendels durch Experiment oder Rechnung ermitteln, welches genau die gleiche Schwingungsdauer besitzt [2]), und insofern ist also ein Nachteil

---

[1]) Wohl am gründlichsten, soweit es eben der damals erreichte Standpunkt gestattete, diskutiert alle die verschiedenen Kautelen und Korrektionen, welche bei Pendelbeobachtungen eine Rolle spielen, der von Muncke bearbeitete Artikel „Pendel" in der zweiten Auflage des Physikalischen Wörterbuches von Gehler (7. Band, 1. Abteilung, Leipzig 1832. S. 304 ff.).

[2]) Die Uebereinstimmung eines physischen und mathematischen Pendels hinsichtlich der Schwingungszeit kann man durch den Versuch auf folgende Weise auch dem ungeübten Auge verständlich machen. Man zieht auf der Oberfläche des ersteren, welche man der Bequemlichkeit halber plan wählen wird, vom Aufhängungspunkte aus im Ruhezustande eine vertikale Grade nach abwärts, die man am besten durch eine leichte Färbung heraushebt. Dann hängt man an die verlängerte Drehungsachse einen der Länge des berechneten reduzierten Pendels genau

mit der uns durch die Umstände aufgezwungenen Anwendung eines physischen Pendels nicht verbunden. Die von Descartes und Huygens begründete, später besonders von L. Euler geförderte Lehre vom *Agitationszentrum* oder vom *Schwingungsmittelpunkt* [1]) gipfelt in dem folgenden Satze: *Die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsachse, welche auch als Länge des gleichschwingenden mathematischen Pendels oder als reduzierte Länge des physischen Pendels bezeichnet wird, ist gegeben durch den Quotienten, den man erhält, wenn man mit dem statischen Momente der Pendelmasse, vereinigt im Schwerpunkte, in das Trägheitsmoment des Pendelkörpers, beide Momente bezogen auf die gegebene Drehungsachse, hineindividiert.* Denken wir uns, um den Satz an einem Beispiele zu erläutern, eine dünne prismatische Stange von der (homogen verteilten) Masse M und von der Länge l an einem ihrer Endpunkte befestigt und um diesen Punkt Schwingungen machend; das Trägheitsmoment ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{M}{n}\left[1^2.\left(\frac{l}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{l}{n}\right)^2 + \ldots + n^2\left(\frac{l}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{M}{n^3} l^2 (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{Ml^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} Ml^2,$$

das statische Moment des Stabes dagegen ist, da der

gleichen Faden mit einem kleinen Metallkügelchen. Physisches und mathematisches Pendel werden aus der Gleichgewichtslage gebracht, indem man Sorge trägt, daß die gefärbte Linie und der Pendelfaden in paralleler Lage verharren. Läßt man dann gleichzeitig beide Pendel ihre Schwingungen beginnen, so überzeugt man sich, daß die beiden erwähnten graden Linien ununterbrochen in der ihnen anfangs angewiesenen Lage verharren.

[1]) Vgl. Zwerger, Der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel; historisch-kritische Untersuchung, nach den Quellen bearbeitet, München 1889.

Schwerpunkt vom Aufhängepunkte um $\frac{1}{2}b$ absteht, $= \frac{1}{2}Mb$. Die Länge des reduzierten Pendels ist in diesem allerdings recht einfachen Falle sohin gleich $\frac{1}{3}Mb^2 : \frac{1}{2}Mb = \frac{2}{3}b$.

Diejenigen Pendel, welche zu dem uns an dieser Stelle beschäftigenden Zwecke in allgemeinem Gebrauche stehen, pflegen aus einer Metallstange mit unten angeschraubter Kugel oder Linse zu bestehen. Die Kombination ist eine solche, daß sie sich der Rechnung nicht entzieht. Wir werden die bezügliche Formel nachher mitteilen, müssen aber zuvor noch auf eine anderweite Verbesserung der Beobachtungsergebnisse Bedacht nehmen.

Temperaturkorrektion. Bei steigender Wärme dehnt sich die Pendelstange aus, bei abnehmender zieht sie sich zusammen, und es ist daher die Größe l_φ so lange keine exakte, als ihr Wert nicht von dem Einflusse der Temperaturänderung befreit erscheint. Dies muß auf rechnerischem Wege geschehen, da eine automatische Korrektur, wie eine solche die *Kompensationspendel*[1]) beabsichtigen, diesmal nicht die erforderliche Schärfe liefern würden. Die Länge des reduzierten Pendels wird mit

---

[1]) Das *Quecksilberpendel* ward von Graham 1722 erfunden (Philos. Transact., 1726); mit der Pendelstange ward eine Quecksilberröhre in feste Verbindung gebracht, und wenn das Metall der ersteren sich ausdehnte, so stieg das Quecksilber in der entgegengesetzten Richtung an, so daß recht wohl die Möglichkeit gegegeben war, das Oszillationszentrum unverrückt auf demselben Punkte zu erhalten. Das *Rostpendel* ist gleichfalls eine Grahamsche Erfindung, doch erkannte erst Harrison (s. die Abhandlung Shorts, Philos. Transact., 1751) den großen Nutzen dieser Vorrichtung, die aus mehreren Eisen- und Messingstangen besteht. Da die einen der Tendenz zur Ausdehnung nur nach oben, die anderen ihr nur nach unten zu folgen vermögen, so kann bei entsprechender Berücksichtigung der Ausdehnungskoeffizienten das gleiche Ziel, die Stabilisierung des Schwingungsmittelpunktes, erreicht werden.

einem Maßstabe gemessen, dessen Material in ganz ähnlicher Weise, wie dasjenige der Pendelstange, durch die Temperaturschwankungen beeinflußt erscheint. T sei die während der Beobachtung abgelesene Temperatur der Umgebung des Pendels, T' die in dem Augenblicke, als man den Maßstab zur Anwendung brachte, herrschende Temperatur, λ und λ' seien die Ausdehnungskoeffizienten der Stoffe, aus welchen resp. Pendelstange und Maßstab gefertigt sind; dann geht der auf Wärme korrigierte Wert l_φ' aus dem direkt gemessenen Werte l_φ hervor mittelst der Formel: $l_\varphi' = l_\varphi\,[1 - \lambda\,(T' - T) + \lambda'\,(T' - T'')]$. Hier bedeutet noch T'' die Temperatur, welcher die Normallänge des Maßstabes entspricht; meistenteils ist $T'' = 0^\circ$, und dadurch vereinfacht sich einigermaßen unsere Korrektionsformel. Strenge genommen müßte übrigens auch noch der Ausdehnung der Linse Rechnung getragen werden, doch ist die Berücksichtigung auch dieses Faktors durch den Beobachtungsmodus (s. u.) zum Glücke überflüssig gemacht worden.

Ohne in die Details der Ableitung selbst einzugehen, mag es sich empfehlen, die Formel hier anzuführen, mittelst deren Biot und Arago ihre berühmten Untersuchungen über die Länge des Sekundenpendels angestellt haben[1]). Eine Platinkugel war in eine Metallhülse eingeschraubt, und an dieser war ein Platinfaden angebracht, der mit seinem oberen Ende eingeklemmt werden konnte. Die Entfernung dieses oberen Endpunktes vom Kugelmittelpunkte ist L, der Halbmesser der Kugel bei 0° ist r, das Gewicht der Kugel (in Grammen) m, der Abstand zwischen der Aufhängungsachse und dem Anfange des Platinfadens b, das Gewicht des Platinfadens p, das Gewicht der Hülse n, und schließlich steht noch der Schwerpunkt der Hülse von demjenigen der Kugel um d ab. Ist dann noch $l_\varphi'' = l_\varphi'(1 + \lambda\,T')$ gesetzt, und ist Λ die

---

[1]) Biot-Arago, Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques, exécutées par l'ordre du bureau des longitudes de France en Espagne, en France, en Angleterre et en Ecosse. Paris 1821. S. 440 ff.

Ausdehnung des Platins, so gelten nach den erwähnten beiden Forschern diese beiden Relationen:

$$\varrho \equiv \frac{\frac{p}{6m}\left[L+b+r+\frac{2(br-r^2-b^2)}{L}\right]+\frac{n}{m}\left(d-\frac{d^2}{L}\right)+\frac{pr^2}{5mL^2}\left[L+b+r\right]+\frac{2nr^2}{5mL}(L-d)}{1+\frac{p}{2m}\left(1-\frac{r-b}{L}\right)+\frac{n}{m}\left(1-\frac{d}{L}\right)},$$

$$\lambda_\varphi = l_\varphi'' - r(1+AT) + \frac{2r^2}{5\,l_\varphi''} - \varrho.$$

Unter λ_φ ist dann also die reduzierte Pendellänge in ihrer völligen Unabhängigkeit von irgend einer Temperatureinwirkung zu verstehen. Man sollte meinen, daß hiermit jeder die Beseitigung störender Momente betreffenden Anforderung Genüge geschehen wäre, allein es wird sich gleich herausstellen, daß dem in Wahrheit nicht so ist.

Korrektionen mit Rücksicht auf die umgebende Luft. In neuerer Zeit hat man damit begonnen, Schwingungsbeobachtungen im luftleeren Raume anzustellen, und auch die Normaluhren unserer Hauptsternwarten werden neuerdings meist in Glaskästen untergebracht, aus denen die darin enthaltene Luft bis zu einem beliebigen Grade der Verdünnung entfernt werden kann. Bei gewöhnlichen Messungen, wie sie zumal die Aufgabe des Forschungsreisenden sind, kann von derartigen Maßnahmen keine Rede sein, vielmehr handelt es sich wieder nur darum, durch Rechnung die Einflüsse der Atmosphäre zu paralysieren. Dieser Einflüsse gibt es zwei: einen *statischen* und einen *dynamischen*. Mit dem ersteren ist man seit geraumer Zeit vertraut; er äußert sich darin, daß nach dem — für tropfbar- ebensogut wie für elastischflüssige Körper geltenden — Prinzipe des Archimedes jeder in der freien Luft befindliche Körper so viel an Gewicht verliert, als das durch ihn verdrängte Luftquantum wiegt. Das Pendel ist aus einem Stoffe gemacht, dem das spezifische Gewicht D zukommt, während die atmosphärische Luft das spezifische Gewicht d[1]) besitzen soll. Unter dieser Voraussetzung ist

[1]) Feste und flüssige Körper werden, wenn es sich um Dichtebestimmungen handelt, auf das Wasser als Norm bezogen und

die beschleunigende Kraft im luftleeren Raume im Verhältnisse $\frac{D}{D-d}$ größer als im lufterfüllten[1]), die Beschleunigung g_φ der Schwere ist durch $g_\varphi' = g_\varphi \cdot \frac{D}{D-d}$ zu ersetzen. Nun war die Länge l_φ des Sekundenpendels gleich $\frac{g_\varphi}{\pi^2}$ gefunden worden; danach hat man, unter l_φ''' die mit Rücksicht auf Gewichtsverlust verbesserte Länge verstanden, $l_\varphi''' = l_\varphi \cdot \frac{D}{D-d}$ zu setzen[2]).

Allein auch die Bewegung des Pendels vollzieht sich im widerstehenden Mittel anders als in dem luftfreien Raume. Ursprünglich hatte man sich der optimistischen Meinung hingegeben, daß der Widerstand der Luft die Schwingungszeiten nicht alteriere, weil er für jede der beiden halben Schwingungen in entgegengesetztem Sinne sich äußere[3]). Als jedoch Bessel mit seiner tief gehenden Analyse[4]) des ganzen Bewegungsphänomenes hervor-

---

diesem wird folglich das spezifische Gewicht 1 beigelegt. Gas- und luftförmige Körper hingegen werden gemeiniglich auf den Wasserstoff, als eines der leichtesten aller bekannten Gase, bezogen. Von selbst versteht es sich, daß für das obige D und d die Einheit keine verschiedene sein darf.

[1]) Epstein, a. a. O., S. 215.

[2]) Die Korrektion ist notwendig, fällt aber immer gering aus. Von Epstein wird berechnet, daß die Schwingungen eines Sekundenpendels aus Metall vom spezifischen Gewichte 8 im luftleeren und im lufterfüllten Raume erst nach Umfluß von fünfzehn Stunden um eine einzige solche Schwingung abweichen würden. — Die nahe liegende Mutmaßung, daß der der Luft beigemengte Wasserdampf sich seinerseits besonders fühlbar machen könne, hat van Galen (Disputatio mathematica de pendulo ejusque applicatione ad telluris figuram determinandam, Amsterdam 1830) widerlegt.

[3]) Gehlers Phys. Wörterbuch, a. a. O., S. 345.

[4]) Wir haben hier die wichtige, ursprünglich in den Sammelschriften der k. preußischen Akademie abgedruckte, nacher aber auch separat erschienene Abhandlung des großen Königsberger Astronomen im Auge, welche den Titel führt: Untersuchungen

trat, durch welche die Kompliziertheit desselben erst ins rechte Licht gesetzt wurde, da mußte man wohl oder übel auf jene ältere Ansicht verzichten und zugeben, daß das Pendel von einer gewissen Luftschicht umgeben wird, welche durch die Bewegung des ersteren aus dem Verbande der Lufthülle losgetrennt und zum Mitmachen der Schwingung gezwungen wird. Bessel fand für die Geschwindigkeit v des Pendellinsenschwerpunktes eine verwickelte Differentialgleichung; wenn s die Entfernung des Gesamtschwerpunktes von der Achse, m die Masse, $m\mu$ das Trägheitsmoment, u den Elongationswinkel bedeutet, so ist jenem zufolge[1])

$$v = m(\mu + s^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\pi^2 m s l_\varphi \cos u.$$

Durch verschiedene Erörterungen gelangt Bessel von dieser Gleichung zu einer neuen Beziehung zwischen der Schwingungsdauer t', der Pendellänge l_φ und der Schwerkraftsbeschleunigung g_φ; wenn nämlich noch unter m' die Masse der verdrängten Luft, unter K eine gewisse Erfahrungskonstante verstanden wird, so tritt an die

über die Länge des einfachen Sekundenpendels, Berlin 1828. Bessel nahm sich u. a. auch vor, darzuthun, daß die Schwere der Erde unabhängig in ihrer Aeußerung von der Beschaffenheit der angezogenen Körper sei; er ließ sich gleich große Pendellinsen aus den verschiedensten Stoffen, sogar — um selbst über den unmittelbaren Bereich des Erdkörpers hinauszugreifen — aus Meteoreisen verfertigen und wies nach, daß die Schwingungsformel in jedem Einzelfalle die gleiche bleibe. Nur als er in die hohle Linse Wasser gab, war eine leichte Verlangsamung der Schwingungsbewegung unverkennbar; daß dies nicht anders sein könne, ergibt sich aus einer von Lübeck gemachten „Notiz zu den Besselschen Pendelversuchen“ (Ann. d. Phys. u. Chem. 150. Band. S. 476 ff.). Wenn nämlich die Pendelstange keine bedeutende Länge hat, ist die relative Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeit im Verhältnis zum umschließenden Körper von erkennbarem Einflusse, indem eine Oszillation um eine zur Schwingungsebene normale Gleichgewichtslage eintritt. Von der inneren Flüssigkeitsreibung darf dagegen Abstand genommen werden.

[1]) Bessel, a. a. O., S. 32 ff.

Stelle der uns bekannten Gleichung $t = \pi \sqrt{\frac{l_\varphi}{g_\varphi}}$ die folgende neue:

$$\text{Schwingungsdauer } t' = \pi \sqrt{\frac{l_\varphi}{g_\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{\mu + s^2}{s^2} \cdot \frac{s\left(1 - \frac{m'}{m}\right)}{\mu + \frac{m'}{m} K + s^2}}.$$

Poisson nahm die Untersuchung von neuem auf[1], indem er zugleich die von der Pendelschwingung erzeugten Kondensationen und Dilatationen der Luft berücksichtigte, und glaubte seinem Kalkul die mit den Versuchen auch wirklich nahe übereinstimmende Thatsache entnehmen zu können, daß das Sekundenpendel durch den bei Ueberwindung des Luftwiderstandes stattfindenden Arbeitsverlust über 9 Schwingungen pro Tag verliere. Nach Sabine ist die Zahl noch um 1 größer, und zwar fand der berühmte englische Geophysiker die Verzögerungskonstante experimentell, indem er folgeweise das Pendel in gewöhnlicher atmosphärischer Luft von mittlerem Barometerstande, in Wasserstoffgas und in einem thunlichst evakuierten Raume schwingen ließ[2].

Reduktion des Pendels auf den Meeresspiegel. Bei allen unseren bisherigen Erörterungen über die Schwerkraftskonstante g_φ und die ihr proportionale Länge l_φ des Sekundenpendels war stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die Messung am Niveau des Meeres statthabe. Ist dem aber nicht so, und in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle werden die Verhältnisse nicht so günstig gelagert sein, so muß darauf Bedacht genommen

---

[1] Poisson, Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant, Paris 1831.

[2] Sabine, On the Reduction to a Vacuum of Capt. Kater's Convertible Pendulum; Experiments to determine the Difference in the Number of Vibrations of an Invariable Pendulum at Greenwich and Altona, Philos. Transact., 1829. S. Zumal S. 207 ff.

werden, daß g_φ mit der Entfernung des Beobachtungspunktes vom Erdzentrum selbst sich ändert. Dabei sind jedoch zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, deren eine besondere Erwägungen erfordert. Die Erde wird als Kugel betrachtet.

I. Der Beobachtungspunkt steht vom Erdmittelpunkte um mehr als den Radius ab, seine Meereshöhe h ist eine positive. Da die Abnahme der Gravitation bekanntlich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung sich vollzieht, so ist, unter $g_\varphi{}^h$ die Schwere in der Höhe h verstanden[1]), da h^2 nur klein ist,

$$g_\varphi{}^h = g_\varphi{}^0 \cdot \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 = g_\varphi{}^0\left(\frac{r^2}{r^2+2rh+h^2}\right) = g_\varphi{}^0 \cdot \frac{1}{1+\frac{2h}{r}}.$$

Wir brauchen somit, um von der in beliebiger Seehöhe gemessenen Konstante zu der gesuchten zu gelangen, nur eine Multiplikation auszuführen, und da die Relation $g_\varphi = \pi^2 l_\varphi$ unbeeinflußt bleibt, so haben wir auch

$$g_\varphi{}^0 = g_\varphi{}^h\left(1+\frac{2h}{r}\right);\ l_\varphi{}^0 = l_\varphi{}^h\left(1+\frac{2h}{r}\right).$$

II. Etwas verwickelter gestalten sich die Dinge, wenn der Beobachter sich in negativer Meereshöhe, d. h. in einer gegebenen Tiefe unter dem Meeresspiegel befindet. Gehört der Standort der Erdoberfläche selbst an[2]), so braucht kaum eine Aenderung in unserer Schlußformel

---

[1]) Die korrekte Reduktionsformel scheint erstmalig von Laplace angegeben worden zu sein: Sur la reduction de la longueur du pendule au niveau de la mer, Ann. de phys. et de chim., vol. XXX. S. 381 ff. Eine Andeutung darüber, daß die Formel in aller Strenge nur für die freie Luft giltig, für eine auf einem Berge befindliche Station dagegen eines die Masse und Lokalanziehung des Berges berücksichtigenden Zusatzgliedes bedürftig sei, hat Th. Young gemacht (Remarks on the Probability of Error in Physical Observations and on the Density of the Earth, Phil. Transact., 1819. S. 93 ff.).

[2]) Solcher Depressionen gibt es bekanntlich eine größere Anzahl auf der Erde: erwähnt seien nur die „Schotts" Tunesiens (teilweise — 25 m), die Oase Siwah in der libyschen Wüste (— 32 m) und das Jordanthal (— 191 m bis — 394 m).

Platz zu greifen, man kann fast fehlerlos ($-h$) statt ($+h$) setzen. Anders jedoch, wenn dieser Standort im Inneren der Erde, etwa in einem Bergwerke, sich befindet. Hier hat man nämlich darauf zu achten, daß einem sehr wichtigen, von Newton selbst herrührenden Lehrsatze die Attraktionstheorie zufolge nicht die ganze Erdkugel anziehend wirkt, daß vielmehr die ganze Kugelschale, welche durch die Außenfläche und durch eine den fraglichen Punkt selbst enthaltende Kugelfläche begrenzt wird, sich neutral verhält[1]). Man hat demnach für die beiden Größen $g_\varphi{}^0$ und $g_\varphi{}^{-h}$ diese Proportion: $g_\varphi{}^0 : g_\varphi{}^{-h} = \left(\frac{4}{3} r^3 \pi : r^2\right) : \left(\frac{4}{3} (r-h)^3 \pi : (r-h)^2\right)$, woraus sich

$$g_\varphi{}^0 = g_\varphi{}^{-h} \cdot \frac{r}{r-h}$$

berechnet[2]).

Pendelbeobachtungen auf Bergen und im Inneren von Gruben sind gewöhnlich in der ausgesprochenen Absicht angestellt worden, um die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Airy war der erste, der zu diesem Zwecke in die Eingeweide der Erde hinabstieg und daselbst auch eine umfängliche Beobachtungsreihe zustande brachte[3]); ihm folgten Reich[4]) und in jüngster Zeit v. Sterneck[5]).

---

1) Der Satz wird von Newton (a. a. O., S. 217) auch auf ein Ellipsoid ausgedehnt; der Beweis läßt sich überhaupt für alle Körper in gleicher Weise führen, die von einer ellipsoidartigen. d. h. durch eine beliebige grade Linie nur in zwei Punkten geschnittenen Oberfläche begrenzt werden.

2) Vgl. die Arbeit von Drobisch: Ueber die Pendelbeobachtungen in den Gruben von Dolcoath, Ann. d. Phys. u. Chem., 10. Band. S. 444 ff.

3) Airy, Account of Pendulum Experiments undertaken in the Harton Colliery, Phil. Trans., 1830. S. 297 ff.

4) Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage, Freiberg 1838; Neue Versuche mit der Drehwage, Abh. d. k. sächs. Ges., math.-phys. Kl., 1. Band. S. 383 ff.

5) v. Sterneck, Untersuchungen über die Schwere im Inneren der Erde, Mitteil. des k. k. militärgeograph. Instituts zu Wien, 2. Band. Wien 1882. S. 77 ff.; 3. Band, Wien 1883. S. 59 ff.

Der letztere wählte für seine Messungen den 1000 m tiefen Adalbertschacht des Přibramer Silberbergwerkes, und zwar stand der Beobachtungsapparat abwechselnd in folgenden Tiefen unter der Erde: 293,0 m; 774,4 m; 990,9 m. Es wollte fürs erste (1882) nicht gelingen, die Vergrößerung der Schwingungszahl mit zunehmender Tiefe, wie sie (s. o.) die Theorie verlangt, auch empirisch nachzuweisen, erst im Jahre darauf, nachdem auf die Ausmerzung aller Fehler erhöhte Sorgfalt verwendet worden war, glückte der Nachweis, daß die Schwingungsdauer des ungefähr halbe Sekunden schlagenden Pendels von der Schachtöffnung bis zur Sohle um 0,0000232 Sekunden abgenommen hatte, was, wenn die mit der Tiefe ebenfalls wachsende Zentrifugalbeschleunigung vorher noch ausgeschieden wird, einer Vermehrung der Schwerkraft im Verhältnisse $\frac{1}{1{,}0000885}$ gleichwertig erscheint[1]).

[1]) Die Verteilung der Schwere im Inneren unseres Planeten ist recht eigentlich eine Frage der Erdphysik und würde deshalb, unserem Grundplane gemäß, in unserem Buche nicht der Diskussion zu unterstellen sein, wenn nicht aus den oben angeführten Gründen diese Frage auch für die Bestimmung der Länge des Sekundenpendels und damit auch für die uns allerdings mehr denn alles andere interessierende Bestimmung der wahren Erdgestalt eine gewisse Bedeutung gewonnen hätte. So müssen auch wir der Sache wenigstens in einer Note näher treten. Analytisch hat das Gesetz der Zunahme der Schwere mit der Tiefe zuerst E. Schmidt in seinem uns aus der Einleitung bekannten „Handbuch der math. u. phys. Geographie" (1. Band. S. 360 ff.) darzustellen versucht, jedoch kann die in seiner Rechnung zu Grunde gelegte Annahme nicht als richtig anerkannt werden. Weit gründlicher geht Helmert zu Werke, der seine Untersuchungen in dem folgenden Satze resumiert (Die math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie, 2. Band. S. 493): „Die Schwerkraft nimmt zunächst zu, wenn man sich von der Erdoberfläche nach der Tiefe bewegt. Die Zunahme dauert bis zur Tiefe gleich 0,18 des Erdradius an, wo die Schwerkraft ein Maximum (gleich 1,05mal der Schwere an der Erdoberfläche) erreicht, um von da an stetig abzunehmen bis zum Mittelpunkte." Diesen Satz hat Weihrauch (Ueber die Zunahme der Schwere beim Eindringen in das Erdinnere, Repert. d. Experimentalphysik, 1886. S. 396 ff.) mit einem überraschend einfachen elementaren Beweise versehen, in welchem auch die Möglichkeit,

Anderweite Pendelkorrektionen. Zu den vielen Verdiensten Bessels (s. o.) gehört es auch, den Einfluß der *Messerschneiden*, auf welchen man, um die Reibung so klein als möglich zu machen, das Pendel gewöhnlich schwingen läßt, rechnerisch studiert zu haben[1]). Die Schneide ist in Wirklichkeit nie, was sie sein sollte, sondern eine gekrümmte Fläche, die mit der ebenen Unterlage nicht in kontinuierlich-einmaliger Berührung bleibt, sondern sich auf derselben wälzt[2]). Nahezu gänzlich eliminiert wird jedoch dieser Fehler, wenn man die zwei Schneiden, die, wie wir gleich nachher sehen werden, bei den meisten Pendelapparaten vorkommen, auf gegenseitige Umwechslung aptiert, da dann der Fehler jeweils das entgegengesetzte Vorzeichen erhält und bei Berechnung der Pendellänge aus zwei im einen und im anderen Sinne angestellten Versuchen fortfällt.

Als noch störender noch dürfte das erst in neuerer Zeit als Quelle mancher Trübungen des Beobachtungsergebnisses erkannte *Mitschwingen des Statives* erachtet

---

daß die Dichteänderung innerhalb der Erdmasse nicht durchweg eine stetige sein sollte, nicht außer Acht gelassen wird. Ohne mehr als die ersten Anfangsgründe der höheren Analysis vorauszusetzen, gelangt der Autor zu einem den Helmertschen Satz in sich begreifenden Resultate; er sagt nämlich: „Geht man innerhalb einer, aus konzentrischen, homogenen Kugelschalen gebildeten Kugel aus dem Zentrumsabstande $(a + da)$ in den Abstand a, so nimmt die Schwere zu oder ab $(G_a \gtrless G_{a+da})$, je nachdem die Dichte der durchmessenen Schicht kleiner oder größer ist als zwei Drittel der mittleren Dichte der Kugel $(\Theta_a \lessgtr \frac{2}{3}\Theta_{r-a})$, zu welcher man kommt." Je nachdem für die Aenderung der Dichtigkeit die eine oder andere Hypothese zu Hilfe genommen wird, findet Weihrauch, daß die Schwerkraft im Erdinneren im Maximum die Schwerkraft an der Erdoberfläche um das 1,055fache — das ist angenähert die Helmertsche Zahl (s. o.) — oder um das 1,038fache übertreffe.

[1]) Bessel, a. a. O., S. 69 ff.

[2]) Einen Auszug aus der von Laplace (Ann. de phys. et chim., vol. II. S. 92 ff.) durchgeführten Analysierung des hier in Rede stehenden verwickelten Bewegungsvorganges brachten Gilberts „Annalen d. Physik u. phys. Chemie" (57. Band. S. 225 ff.).

werden. Der Amerikaner Peirce wurde zuerst auf den Gegenstand aufmerksam und zeigte [1]), daß selbst sehr fest erscheinende Gestelle von der Schwingung des Pendels in Mitleidenschaft gezogen werden. Jedenfalls ist also darauf zu sehen, daß der Apparat eine möglichst sichere Fundierung erhalte, obwohl der größte Fleiß in dieser Hinsicht keinen völlig sicheren Erfolg verbürgt [2]). Repsold in Hamburg hat einen Support angegeben, durch welchen der erwähnte Fehler auf ein Minimum herabgedrückt werden soll [3]).

Die Messungsmethoden der Pendelschwere. Nachdem wir einige Klarheit darüber erhalten haben, daß bei Pendelmessungen auf eine Vielzahl keineswegs nebensächlicher Punkte zu achten ist, müssen wir erst in Erfahrung bringen, wie denn überhaupt die Schwingungen eines Pendels beobachtet und gezählt werden. Das ursprünglich wohl angewandte Verfahren, die Zählung der Schwingungen in der Art vorzunehmen, daß man sich neben das Instrument stellte und etwa bei jedem Durchgange der Linse durch die Gleichgewichtslage einen Stich in Papier machte, um nach Ablauf einer bestimmten Zeit alle diese Stiche zusammenzuzählen — dieses primitive Verfahren mußte bald als überaus mühselig und zudem leicht

---

[1]) Die Untersuchung ist enthalten im 14. Anhange zum „Report of the United States Coast and Geodetic Survey“ für 1881.

[2]) Nach dieser Richtung hin sehr belehrend sind die Vorsichtsmaßregeln, welche von mehreren Nordpolfahrern angewendet wurden, um ihren zur Bestimmung der Schwere g_φ für große Werte von φ mitgeführten Apparat nach Möglichkeit zu fixieren. Beschreibungen dieser Art sind u. a. nachzusehen in den folgenden Werken: Hayes, Das offene Polarmeer, deutsch von Martin, Jena 1868. S. 79 ff.; Bessels, Die amerikanische Nordpolexpedition, Leipzig 1879. S. 224 ff.; Greely, Drei Jahre im hohen Norden, deutsch von Teuschner, Jena 1887. S. 82 ff.

[3]) Diese Vorrichtung wurde von Neumayer in der physikalischen Sektion der Berliner Naturforscherversammlung demonstriert. In Hoboken (Ver. Staaten) dient, wie Helmerts Bericht in den Verhandlungen der Gradmessungskonferenz (1888, 2. Beilage, S. 16) aussagt, ein Support, in welchem sich gleichzeitig auch eine Vakuumkammer zur Aufnahme des schwingenden Pendels befindet.

zu Irrungen führend aufgegeben werden. Auf die sogenannte *Methode der Koinzidenzen* scheint zuerst Mairan verfallen zu sein[1]), doch wurde dieselbe, nachdem sich die Mitglieder der peruanischen Expedition (s. o. Abschnitt XVI) von ihrer Verwendbarkeit überzeugt hatten, erst von Borda[2]) in die heute geläufige Form gebracht. Wir hängen das Versuchspendel vor einer genau gehenden Uhr auf und visieren beide Pendel durch ein in einiger Entfernung aufgestelltes Fernrohr an[3]). Daß beide streng isochron schwingen werden, ist im höchsten Maße unwahrscheinlich, das Uhrpendel A wird vielmehr dem Versuchspendel B entweder vorauseilen oder hinter ihm zurückbleiben, bis beide, nachdem die Differenz des Bewegungszustandes von A und B auf eine volle Schwingung angewachsen ist, wieder einmal gleichzeitig die Ruhelage passieren werden. Zur besseren Erkennung dieses Zeitpunktes bringt man an A und B kleine Marken in Form von runden Scheibchen an, die in dem Ruhezustande als ein einziges erscheinen und am besten durch den vertikalen Hauptfaden des Fernrohres in zwei gleiche Teile zerschnitten werden. Hat man den Zeitpunkt genau notiert, in welchem die zweite Koinzidenz eintrat, und hat bis dahin Pendel A etwa n Schwingungen gemacht, so ist die Anzahl der von B gemachten gleich $(n \pm 2)$ zu setzen, und bezeichnen wir ferner die Anzahl der auf einen Tag entfallenden Sekunden mit s, die Anzahl

[1]) Mairan, Expériences sur la longueur du pendule à secondes à Paris, Mém. de l'Acad. Royale de Paris, 1735.

[2]) Die neue Anordnung des Mairanschen Verfahrens hatte Borda bei seiner Teilnahme an der großen französischen Gradmessung erprobt; einen auszüglichen Bericht enthalten die „Ann. d. Phys. u. phys. Chem.“, 57. Band. S. 225 ff.

[3]) Wie richtig Bessels Vorschlag ist, die beiden Pendel räumlich um eine gute Strecke zu trennen und nicht unmittelbar hintereinander zu stellen (Untersuch. etc., S. 11), das wird bewiesen durch die von dem Mechaniker Emery und dem Astronomen Bohnenberger (dessen „Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung“, Göttingen 1795. S. 165) bezeugte Thatsache, daß eine Gewichtuhr in ihrem Gange stets dann Störungen erleidet, wenn Uhrgewicht und Linse einander gerade gegenüber zu stehen kommen.

der von B im gleichen Zeitraume vollendeten Schwingungen mit p, so haben wir:

$$n : (n \pm 2) = s : p; \; p = s \pm \frac{2s}{n}.$$

Sabine stellte die Augenblicke fest[1]), in welchen das Scheibchen von A das Scheibchen von B das eine Mal rechts, das andere Mal links von außen berührte; sind t_1 und t_2 diese Zeitpunkte, während t den Moment der absoluten Koinzidenz beider Scheibenmittelpunkte vorstellt, so ist offenbar $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. — Eine sehr wichtige Vervollkommnung unserer Methode ist derselben unlängst durch die Anwendung des Telegraphen zu teil geworden. Mit dessen Hilfe kann man zwei an weit auseinander liegenden Orten aufgestellte Uhren zu synchronem Gange bringen und auch die Schwingungen zweier räumlich getrennter Pendel vergleichen, so daß das Verhältnis der beiden Stationen zukommenden Pendelschweren direkt ermittelt wird[2]).

So viel von der Beobachtung der Schwingungen; wie aber haben wir uns das die Schwingungen machende Pendel selbst zu denken? Von Galilei bis Bouguer pflegte man sich eines einfachen dünnen Fadens mit daran hängender Metallkugel zu bedienen, und nur den Faden wollte Graham durch einen feinen Kupferdraht ersetzt wissen[3]). Der erwähnte Bouguer schlug zuerst vor, allerorts die Schwingungen eines *unveränderlichen Pendels* zu beobachten und hieraus erst die Länge des Sekundenpendels zu berechnen; dem direkten, aber wenig genauen Messungsverfahren wurde ein indirektes, aber weit mehr

---

[1]) An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth, London 1825. S. 16.

[2]) Näher auf diese eben erst ans Licht getretene Einrichtung an diesem Orte einzugehen, würde uns verfrüht erscheinen. Zur vorläufigen Orientierung dienen zwei Notizen Cornus (Compt. rend. de l'acad. franç., 31. Mai und 13. Juni 1887).

[3]) Ins einzelne gehende historische Nachweisungen über den Fortschritt der Messungsmethoden bietet der mehrfach zitierte Artikel des Gehlerschen Lexikons (a. a. O., S. 356 ff.).

Präzision gewährleistendes Rechnungsverfahren substituiert[1]). Wir übergehen die vielen mehr oder minder geglückten Versuche zur Konstruktion solcher unveränderlichen Pendel und bleiben bei demjenigen stehen, welches Kapitän Kater erstellte[2]), und welches der in dem Namen liegenden Forderung denn auch ganz und voll gerecht wird. Wir meinen das sog. *Reversionspendel,* dessen Theorie allerdings noch vor Kater von dem oben genannten Tübinger Mathematiker Bohnenberger entwickelt worden war[3]). Wir haben oben gelernt, die Länge des reduzierten Pendels zu bestimmen und dieselbe gleich ($t : ms$) gefunden, wo t das Trägheitsmoment, m die Masse, s die Distanz zwischen Schwer- und Aufhängepunkt bedeutete. Denkt man sich durch den Schwerpunkt eine der früheren parallele Achse hindurch gehend und den Körper um diese schwingend, unter t' aber das neue Trägheitsmoment verstanden, so gelten für die reduzierte Länge λ zwei Gleichungen:

$$\lambda = \frac{t}{ms} = \frac{t'}{ms} + s.$$

Nunmehr durchstoßen wir den Körper mit einer dritten Umdrehungsachse im bisherigen Schwingungsmittelpunkte und bezeichnen mit λ' die sich dann ergebende reduzierte Länge. Die obigen Gleichungen bleiben bestehen; nur tritt t' an die Stelle von t, $(\lambda - s)$ an die Stelle von λ, und es wird

$$\lambda' = \frac{t'}{m(\lambda - s)} + \lambda - s = \frac{t'}{m} \cdot \frac{ms}{t'} + \lambda - s = s + \lambda - s;$$

$\lambda' = \lambda$. Wir sind damit bei einer Wahrheit angekom-

---

[1]) Bouguer, La figure de la terre etc., Paris 1749. S. 338.

[2]) Kater, Experiments for determining the Length of the Pendulum vibrating Seconds in Latitude of London, Phil. Transact., 1818.

[3]) Bohnenberger, Astronomie, Tübingen 1811. S. 448. Man kann sagen, daß die Idee des Instrumentes bereits in einem in Huygens' „Horologium oscillatorium" enthaltenen Theoreme ausgesprochen ist.

men, die wichtig genug ist, um in Worte gefaßt zu werden:

Trägt man auf einer vom Umdrehungspunkt eines physischen Pendels vertikal nach abwärts gezogenen Graden eine Strecke gleich der reduzierten Pendellänge ab, so ist es einerlei für die — ausschliesslich durch die erwähnte Länge bedingte — Schwingungsdauer des Körpers, ob man letzteren um den oberen oder um den unteren Endpunkt jener Strecke seine Schwingungen ausführen lässt.

In der Praxis wußte nun eben Kater der soeben festgestellten Thatsache dadurch gerecht zu werden, daß er in die starre Pendelstange zwei zu ihr ein für allemal parallele Drehungsachsen einsetzte, außerdem aber noch zwei verschiebbare Körper — zur Verminderung des Luftwiderstandes erhalten dieselben die Gestalt von Linsen — hinzufügte. Man schiebt beide so lange hin und her, bis das physische Pendel gleich lang schwingt, ob es sich nun um die eine oder um die andere der beiden Achsen dreht, und damit ist die Länge jenes mathematischen Pendels gegeben, welches die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie das erwähnte physische. Aus der Proportion $1 : t^2 = l_\varphi : \lambda$, worin t die dem mathematischen Pendel von der Länge λ entsprechende Schwingungszeit bedeutet, ergibt sich dann endlich die Länge l_φ des Sekundenpendels. Daß die Achsen mit Schneiden versehen und zum Vertauschen eingerichtet sein sollen, darauf ist bereits bei früherer Gelegenheit hingewiesen worden.

Mit dem Katerschen Reversionspendel nun, für welches eine Fehlertheorie von Lubbock[1]) entwickelt wurde, und über welches die theoretischen Untersuchungen heute noch nicht abgeschlossen sind[2]), sind nun seit fast

---

[1]) Lubbock, On the Pendulum, Phil. Transact., 1830. S. 201 ff.

[2]) Eine abweichende aber bemerkenswerte Fassung gibt Zetzsche (Aufsuchung der parallelen Drehachsen, für welche ein materieller Punkt die nämliche Schwingungszeit besitzt, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 16. Band. S. 445 ff.) dem Satze, auf welchem das Reversionspendel beruht. Unter ρ den Trägheitsradius, unter

hundert Jahren alle Messungen der Pendelschwere angestellt worden. Es wird auch seine Bedeutung für diesen Zweck wohl für alle Zeit beibehalten, um so mehr als die praktische Handhabung des Apparates später noch erhebliche Verbesserungen erfahren hat [1]).

Wir gedenken eine Geschichte der Pendelmessungen, selbstverständlich kurz gefaßt, in den nächsten Abschnitt aufzunehmen. Für diesmal genügt es uns, den Inhalt der letzten Paragraphen in einer kurzen These zusammenzufassen:

Das Reversionspendel, an beliebig vielen Punkten der Erde aufgestellt, gestattet die scharfe Bestimmung der Länge l_φ, welche unter der geographischen Breite φ ein Sekunden schlagendes mathematisches Pendel haben würde. Aus beliebig vielen l_φ folgt nach der Methode der kleinsten Quadrate je ein wahrscheinlichstes l_{90} und l_0, und

---

λ_1 und λ_2 die Entfernung der beiden charakteristischen Achsen von der durch den Schwerpunkt gelegten Parallelachse verstehend. stellt er als Bedingungsgleichung diese auf: $(\lambda_1 - \lambda_2)(\rho^2 - \lambda_1 \lambda_2) = 0$. Unter drei Möglichkeiten ist diese Gleichung giltig; es muß nämlich $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\rho = \pm\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ sein. — Böklen dagegen (Ueber die Aufhängepunkte und Achsen für isochrone Schwingungen eines Körpers, Journal f. d. reine und angew. Mathematik, 93. Band. S. 177 ff.) beweist, daß es, der schwingende Körper sei welcher er wolle, stets *acht* Punkte auf demselben gibt, deren bezügliche Distanzen einer bestimmten Länge des synchron schwingenden mathematischen Pendels entsprechen. — Von Finger endlich (Ueber ein Analogon des Katerschen Pendels und dessen Anwendung zu Gravitationsmessungen, Wien 1881) ist das sogenannte *Kommutationspendel* angegeben worden, dessen Theorie auf einer Erweiterung des Huygens-Bohnenbergerschen Satzes fußt.

[1]) Die Ablesung ist, um nur eines anzuführen, sehr erleichtert und verfeinert worden durch Repsolds Neuerung, welche in der Einführung des kathetometrischen Prinzipes besteht. Das *Kathetometer* aber ist eine geteilte Latte, die senkrecht gestellt ist, und längs deren sich ein Fernrohr mit Fadenkreuz wagrecht verschieben läßt. Man begreift, daß auf diese Weise Vertikaldistanzen genauer bestimmt zu werden vermögen als auf irgend eine andere. Hierüber und über andere praktische Hilfsmittel verbreiten sich E. Plantamours „Expériences faites à Genève avec le pendule à reversion“ (Genf 1866), welcher Schrift R. Wolf das Prädikat einer „Musterarbeit“ beilegt.

diese beiden Werte liefern, in die Clairautsche Formel eingesetzt, die Abplattung α. Im allgemeinen kann nach dem, was oben über die Schwere auf einem von der Kugel wenig abweichenden Ellipsoide gesagt ist, die Grösse

$$l_\varphi = a + b \sin^2 \varphi$$

gesetzt werden, wo a und b zwei für einen bestimmten Ort konstante, durch Beobachtung zu bestimmende Zahlen bedeuten.

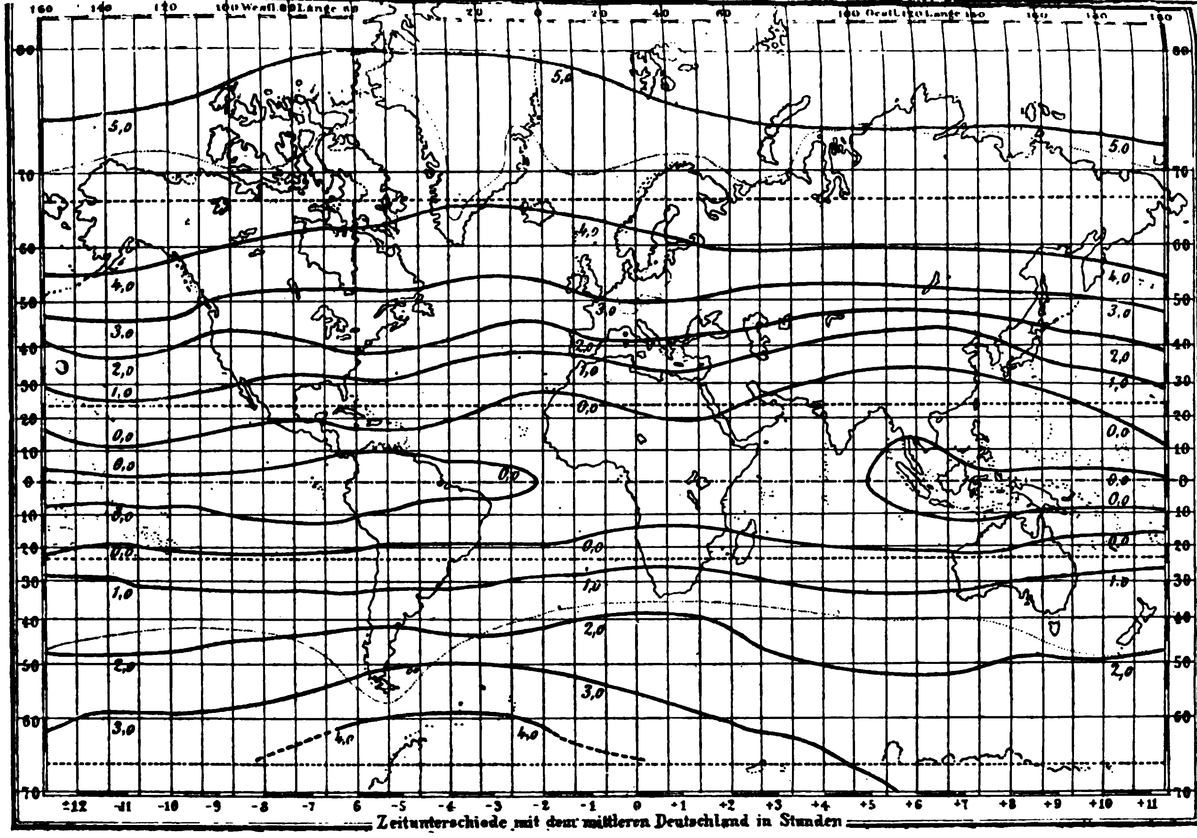
Dabei ist noch zu bemerken, daß über die Frage, ob die geognostische Beschaffenheit des Untergrundes und etwaiger Magnetismus der Instrumentbestandteile einen Einfluß äußern, die Akten noch nicht geschlossen sind [1]). — In *Fig. 76* sind die *Linien gleicher Pendelschwere* (schematisch)

---

[1]) Der Meinung, daß das Pendel nicht bloß ein *geodätisches*, sondern zugleich ein *geognostisches Beobachtungswerkzeug* sei, hat Sabine (a. a. O., S. 330 ff.) lebhaften Ausdruck gegeben. Ueber Urgestein soll das Sekundenpendel, der theoretisch erhaltenen Schwingungszahl gegenüber, voraneilen, über lockerem Boden zurückbleiben. Die folgende Tabelle gibt einige Sabinesche Resultate wieder, und zwar bedeutet $+d$ den Betrag des Voraneilens, $-d$ den der Retardation für einen ganzen Tag:

Stationen	Wert von d	Geologischer Charakter des Bodens
Insel St. Thomas	+5,58	Basaltfels
Mündung des Amazonenstromes	—4,34	Alluvium
Jamaica	+0,28	Kalkfels
London	—0,28	Kretazisch-tertiärer Kiesboden
Spitzbergen	+3,50	Quarz

So ausgemacht indes, wie Sabine und — ihm folgend — A. v. Humboldt (Kosmos, 1. Band, S. 422 ff.) die geognostische Indikationskraft des Pendels ansehen, ist dieselbe wohl noch nicht. — Betreffs des magnetischen Verhaltens wären zu vergleichen C. F. W. Peters „Beobachtungen mit dem Besselschen Pendelapparate in Königsberg und Güldenstein“ (Hamburg 1874); dazu Helmert in der Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellsch., 11. Jahrgang. S. 33 ff.



Zeitunterschiede mit dem mittleren Deutschland in Stunden

nach Steinhauser auf einer Mercator-Karte der Erde verzeichnet. Dieses Tableau ist schon ein älteres [1]), neuere Bestimmungen müßten in diesem und jenem Punkte das Bild verändern. Doch erhellt daraus jedenfalls so viel, daß die erwähnten Linien zwar obenhin, nicht aber genau dem Verlaufe der Erdparallelen folgen, daß jedoch auch um den Aequator als angenäherte Achse eine merkwürdige geschlossene Nullkurve sich herumlegt. Ueber die Ursachen dieser anscheinenden Anomalien wird im nächsten und übernächsten Abschnitte aufgeklärt werden.

Die Erde als Gleichgewichtsfigur. Von Newtons noch rudimentärem Versuche, die Gestalt der Erdoberfläche durch hydrostatische Betrachtungen zu bestimmen, ist im Eingange dieses Abschnittes die Rede gewesen. Ungleich ernster nahm das nächste, das 18. Jahrhundert diese Frage in die Hand; man stellte jetzt die Frage so [2]): *Wie kann die Oberfläche einer rotierenden Masse tropfbarer Flüssigkeit beschaffen sein, wenn auf sämtliche Teilchen einerseits die allgemeine Massenanziehung, andererseits die Zentrifugalkraft einwirkt?* Huygens hatte es schon in seiner uns bekannten „Unterredung über die Schwere“ versucht, die fragliche Oberfläche analytisch zu bestimmen,

[1]) Dasselbe war (1868) für die Pariser Weltausstellung von Steinhauser und dem verstorbenen österreichischen Feldzeugmeister v. Hauslab angefertigt worden. Die Entstehungszeit erklärt und rechtfertigt auch den Umstand, daß noch der Meridian von Ferro als Anfangskreis der Längenzählung erscheint.

[2]) Es ist, wenn diese Frage zugleich hinsichtlich der gegenwärtigen Erdgestalt etwas beantworten soll, vorausgesetzt, daß die anfänglich weiche und kugelförmige Erde nach und nach erstarrt und in ihren gegenwärtigen Zustand übergegangen sei. Bekanntlich faßt diejenige kosmogonische Hypothese, welche von allen bekannten am wenigsten den Widerstreit mit anerkannten Wahrheiten der Physik und Astronomie zu fürchten hat, die Hypothese von Kant-Laplace, die Dinge so auf, wie wir sie schilderten: erst war die Erde ein planetarischer Gasball, der gasförmige Zustand ging später, wenigstens in den äußeren Schichten, in einen tropfbarflüssigen und dieser teilweise in den festen Zustand über. Vgl. u. a. des Verf. „Lehrbuch der Geophysik und physikalischen Geographie“ (1. Band, Stuttgart 1884. S. 36 ff.).

allein die Lösung dieser Aufgabe war damals noch nicht möglich, und erst Clairaut (s. o.) und Maclaurin[1]) vermochten den Nachweis zu erbringen, daß die Oberfläche die eines abgeplatteten Sphäroides sei. Freilich aber ging aus diesen Untersuchungen zunächst nur hervor, daß die Außenseite der rotierenden Flüssigkeitsmasse sphäroidisch gekrümmt sein *könne*, nicht aber, daß sie so gekrümmt sein *müsse*. Legendre[2]) und Laplace[3]) sprachen sich zwar in diesem letzteren Sinne aus, allein die Folgezeit hat ihnen darin nicht recht gegeben; einer Abhandlung von Ivory[4]), worin manche Bedenken hinsichtlich der Laplaceschen Aufstellungen laut wurden, folgte eine zweite, rasch berümt gewordene von Jacobi[5]), und darin ward dargethan, daß unter gewissen Beschränkungen auch die *Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides* den erwähnten Bedingungen genüge. Später hat ein deutscher Physiker, Matthießen[6]), die Frage ganz allgemein behandelt; sein Ergebnis war, daß es außer den genannten *Gleichgewichtsfiguren* auch noch andere gebe, z. B. die

---

[1]) Der schottische Mathematiker stellte und löste diese Aufgabe in seiner Schrift über die Ebbe und Flut, welche er 1740 bei der von der Pariser Akademie ausgeschriebenen Konkurrenz vorlegte, und welche auch den ausgesetzten Preis — in Gemeinschaft allerdings mit drei anderen eingereichten Arbeiten — erhielt. Das Verfahren Maclaurins (De causa physica fluxus et refluxus maris, Pièces qui ont remporté la prix de l'académie royale. 4. Band, Paris 1740) zeichnet sich dadurch aus, daß es ausschließlich synthetische Entwicklungen im Sinne der Griechen anwendet und von eigentlicher Rechnung gänzlich absieht (Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, Halle 1839. S. 160).

[2]) Legendre, Sur la figure des planètes, Mém. de Paris, 1789. S. 372 ff.

[3]) Laplace, Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes, Paris 1785; Traité de mécanique céleste, vol. V, Paris 1825. S. 22 ff.

[4]) Ivory, On the Figure requisite to maintain the Equilibrium of a Homogeneous Fluid Mass that revolvs upon an Axis, Phil. Transact., 1824. S. 85 ff.

[5]) Jacobi, Ueber die Figur des Gleichgewichtes, Ann. d. Phys. u. Chem., 33. Band. S. 229 ff.

[6]) Matthießen, Neue Untersuchungen über frei rotierende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichtes, Kiel 1859.

sogenannten *Mondfiguren* [1]), Ringe mit elliptischem Querschnitte. Daß solche Gebilde, die immerhin eine kosmische Existenzberechtigung haben können [2]), mit der Erdgestalt nichts zu thun haben, braucht nicht ausdrücklich betont zu werden. Aber auch das dreiachsige Ellipsoid, welches dem ersten Anscheine nach [3]) mehr in Betracht kommen könnte, muß bei näherer Ueberlegung verworfen werden, wie sich aus der folgenden Beweisführung ergibt [4]).

Die Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoides von den

---

[1]) Der Name ward den, übrigens schon von Laplace bemerkten Körpern gegeben von Roche (Mémoire sur les figures éllipsoidales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide sans mouvement de rotation, Compt. rend., vol. XXIV. S. 515). Spezielle Gestaltsbestimmungen für planetarische Satelliten werden vorgenommen in den an Roches Ergebnisse anknüpfenden Arbeiten von Matthießen und Stier (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 25. Band. S. 72 ff. S. 405 ff.).

[2]) Vgl. hierzu Giesen, Gestalt eines um einen Zentralkörper rotierenden homogenen Flüssigkeitsringes, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 22. Band. S. 311 ff. Der Autor will hauptsächlich einen Beitrag zu der viel diskutierten Frage nach der Stabilität des Saturnringes liefern; freilich wird jetzt fast allgemein der Maxwell-Hirnschen Ansicht zugestimmt, wonach der Ring ein Aggregat diskreter Körper ist, denn diese Ansicht findet in Seeligers optischen Untersuchungen (Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten, insbesondere des Saturn, München 1887) eine kraftvolle Stütze.

[3]) Nähere Diskussionen der analytischen Ausdrücke findet man in einem Programme von Giesen (Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit, Opladen 1873) und in einer daran anknüpfenden Abhandlung von J. Hagen (Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiachsigen Ellipsoide mit kleinen Exzentrizitäten ausgebreiteten Flüssigkeit, welche der Anziehung des ellipsoidischen Kernes, sowie der ihrer eigenen Masse unterworfen ist, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 22. Band. S. 65 ff.).

[4]) Leider konnte es nicht vermieden werden, eine kleine Inkonsequenz zu begehen und an dieser Stelle schon auf einige Sätze vom Potential zurückzugreifen, deren Beweis erst Abschnitt XXII nachliefern kann. Wir folgten hier der durch ihre Uebersichtlichkeit sich auszeichnenden Darstellung von Th. Schmid (Die Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde, 1. Teil, Linz 1887. S. 17 ff.).

Halbachsen a, b, c $(a < b < c)$ ist in der bekannten Form gegeben: $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Die Masse des homogenen Flüssigkeitskörpers ist M, k ist jener aus der speziellen Art der Newtonschen Gravitation entfließende konstante Faktor, die Größen k_1 und k_2 sind durch die Relationen

$$k_1{}^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \quad k_2{}^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$$

gegeben, die Koordinaten eines von dem Ellipsoide angezogenen Punktes sind a', b', c', und die kubische Gleichung

$$\frac{a'^2}{a'^2 + \sigma} + \frac{b'^2}{b'^2 + \sigma} + \frac{c'^2}{c'^2 + \sigma} = 1$$

besitzt drei reelle Wurzeln, deren größte σ_1 heißen möge. Für die Größe l endlich ist resp. 1 oder $\frac{a^2}{a^2 + \sigma_1}$ zu setzen, je nachdem es sich um einen inneren oder um einen äußeren Punkt handelt. Dies vorausgesetzt, beweist die analytische Mechanik, daß das Potential V des Ellipsoides E mit Bezug auf den Punkt (a', b', c') durch nachstehende Gleichungen bestimmt ist:

$$V = \frac{1}{2}(-H + Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

$$H = -\frac{3kM}{a}\int_0^l \frac{dt}{[(1 + k_1{}^2t^2)(1 + k_2{}^2t^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$A = -\frac{3kM}{a^3}\int_0^l \frac{t^2dt}{[(1 + k_1{}^2t^2)(1 + k_2{}^2t^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$B = -\frac{3kM}{a^3}\int_0^l \frac{t^2dt}{[(1 + k_1{}^2t^2)^3(1 + k_2{}^2t^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$C = -\frac{3kM}{a^3}\int\limits_0 \frac{t^2 dt}{[(1+k_1^2 t^2)(1+k_2^2 t^2)^3]^{\frac{1}{2}}}.$$

Bislang war der Körper als ruhend angenommen worden; dreht er sich aber um die Achse $2a$, so ist noch das Potential der Schwungkraft hinzuzunehmen, und bezeichnet man mit W den in diesem Falle aus V werdenden Wert, so hat man weiter [1]):

$$W = \frac{1}{2}(-H + Ax^2 + By^2 + Cz^2) + \frac{1}{2}w^2(y^2 + z^2)$$

$$= -\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{2}(B + w^2)y^2 + \frac{1}{2}(C + w^2)z^2.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für die Gleichgewichtsfigur, und ihr muß deshalb die obige Gleichung $E = 1$ sich anpassen. Damit dies eintrete, muß sein

$$\frac{A}{H + 2W} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{B + w^2}{H + 2W} = \frac{1}{b^2}, \quad \frac{C + w^2}{H + 2W} = \frac{1}{c^2},$$

$$w^2 = \frac{Aa^2}{b^2} - B = \frac{Aa^2}{c^2} - C.$$

Durch Komparation folgt hieraus

$$\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}\right)A - B + C = 0.$$

Führt man für A, B und C die obigen Integralausdrücke ein, setzt aber der Kürze wegen $[(1+k_1^2 t^2)(1+k_2^2 t^2)]^{\frac{1}{2}} = f(t)$, so erhält die Bedingungsgleichung folgende Gestalt:

$$\left(\frac{1}{1+k_1^2} - \frac{1}{1+k_2^2}\right)\int\limits_0^l \frac{t^2 dt}{f(t)} - \int\limits_0^l \frac{t^2 dt}{(1+k_1^2 t^2) f(t)}$$

---

[1]) w soll hier, und künftig regelmäßig, die Größe der Schwungkraft ausdrücken.

$$+\int_0^l \frac{t^2 dt}{(1+k_2^2 t^2) f(t)} = 0.$$

Faßt man hier zusammen und rechnet aus, so bleibt, da t ein echter Bruch ist, übrig:

$$\frac{k_2^2 - k_1^2}{(1+k_1^2)(1+k_2^2)} \int_0^l \frac{(1-t^2)(1-k_1^2 k_2^2 t^2) dt}{[(1+k_1^2 t^2)(1+k_2^2 t^2)]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Wann ist diese Gleichung identisch erfüllt? Zuerst offenbar für $k_1 = k_2$, woraus $b = c$ folgt: *Das Umdrehungsellipsoid ist eine Gleichgewichtsfigur.* Der zweite in Betracht kommende Fall ist das Verschwinden des bestimmten Integrales. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn $k_1^2 k_2^2 > 1$ ist, und damit haben wir einen zweiten Satz gewonnen, der so lautet: *Jedes dreiachsige, um die kleinste Achse sich drehende Ellipsoid, für welches*

$$k_1 k_2 > 1, \quad \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}{a^4} > 1, \quad b^2 c^2 > a^2 (b^2 - c^2)$$

ist, kann als Gleichgewichtsfigur einer homogenen flüssigen Masse gelten.

Daß unsere Erde von einer Kugel nur unerheblich sich unterscheidet, ist durch die Gradmessungen zur Evidenz gebracht. Sowohl k_1 als k_2 können daher von der Null nur wenig abweichen, keinenfalls kann $k_1 k_2$ ein anderer als ein echter Bruch sein. Damit ist aber dem Obigen zufolge ausgesprochen:

Unser empirisches Wissen von der Erdgestalt ist unvereinbar mit der Annahme, dass die Erde, als sie noch in flüssigem Zustande rotierte, ein irgendwie beschaffenes dreiachsiges Ellipsoid dargestellt habe.

Bestimmung der Erdgestalt durch astronomische Betrachtungen. „Hierher gehört", sagt Helmert[1]), „die Beobachtung über die Form des Erdschat-

[1]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 450. — Vgl. auch, was Abschnitt XV von ähnlichen Ideen Keplers berichtete.

tens bei Mondfinsternissen, die Beobachtung der Parallaxe des Mondes und anderer Himmelskörper, der Einfluß der Massenanordnung der Erde auf die Mondbewegung und endlich derselbe Einfluß auf die Drehbewegung der Erdachse." Von diesen vier Punkten hat der erste in Abschnitt XII seine Erledigung gefunden, der zweite wird uns in Abschnitt I des zweiten, der vierte in Abschnitt VII des dritten Kapitels unter einem anderen Gesichtspunkte beschäftigen. Der dritte dagegen muß jetzt gleich in der uns durch die Ziele unseres Buches auferlegten Kürze besprochen werden. Wenn die Erde eine homogene oder doch aus konzentrischen Schalen gleicher Dichte zusammengesetzte Kugel wäre, so würde die Anziehung, welche der gleichfalls kugelförmige Mond auf die Erde ausübt, stets ihrer Richtung nach mit derjenigen Graden zusammenfallen, welche die Mittelpunkte beider Weltkörper verbindet. Wenn aber, wie in Wirklichkeit der Fall, die Erde ein Ellipsoid ist, so wird jene Attraktionsrichtung einen nach Lage und Größe nicht immer gleich bleibenden Winkel mit jener Graden bilden, und daraus werden weiterhin gewisse Schwankungen der Erdachse resultieren, die ins Bereich des Meßbaren fallen und damit einen Anhaltspunkt zur Beurteilung der Größe der ellipsoidischen Abweichung unserer Erde liefern können. Laplace[1]) und Legendre[2]) studierten die Frage und gaben Formeln an, um aus gewissen Ungleichheiten der Mondbewegung die Abplattung zu berechnen. So sah sich ersterer zu dem bekannt gewordenen Ausspruche veranlaßt: „Ohne seine Sternwarte zu verlassen, kann der Astronom durch Beobachtung und Rechnung die Gestalt seines Wohnkörpers bestimmen." Laplace fand auf diesem Wege $\alpha = \frac{1}{305}$, v. Lindenau[3]) berechnete für α

[1]) Laplace, Exposition du système du monde, Paris 1796 (1835). S. 9 ff.

[2]) Legendre, Sur la figure etc., S. 424 ff.

[3]) v. Lindenau in Bodes „Astronom. Jahrbuch" für 1820, S. 212 ff.

aus 800 Polarsternbeobachtungen den Wert $\frac{1}{316}$. Endlich nahm Laplace[1]) noch eine Revision seines Kalkuls vor, zu der ihm die große Preisarbeit von Bürg und Bouvard[2]) die Materialien verschafft hatte, und ermittelte für α den Wert $\frac{1}{299,1}$. Die französische Breitengradmessung allein würde $\frac{1}{308,6}$, eine Kombination der aus astronomischen, geodätischen und physikalischen Messungen sich ergebenden Zahlen würde $\frac{1}{306,7}$ geliefert haben.

Die ebenfalls sehr umfänglichen Rechnungen, welche Helmert (a. a. O.) mitteilt, stützen sich auf eine sehr wertvolle empirische Basis, nämlich auf die Gesamtheit der Hansenschen Arbeiten über die Mondbahn und die Mondstörungen[3]). Es ergibt sich $\alpha = \frac{1}{297,8}$, wobei der Nenner mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 2 behaftet erscheint[4]).

---

[1]) Laplace, Mécanique Céleste, 3. Band. S. 247 ff. S. 282 ff.

[2]) Vgl. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 530 ff. Durch Bürgs „Tables de la lune", welche das französische Längenbüreau 1806 veröffentlichte, wurde der erste nennenswerte Fortschritt gegenüber der durch die Mondtafeln des älteren Tobias Mayer bereits erreichten Etappe erzielt.

[3]) Von Hansens eine erstaunliche Vielzahl repräsentierenden Arbeiten seien hier nur einige namhaft gemacht: Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam luna perlustrat, Gotha 1838; Tables de la lune, London 1857; Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Leipzig 1864 und 1865. Von sonstigen neueren Astronomen, welche neben Hansen die schwierige Theorie der Mondbewegung gefördert haben, wollen wir nur Damoiseau, Adams, Stone und ganz besonders Newcomb nennen.

[4]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 473.

XX. Unmöglichkeit, die geodätischen Resultate mit den durch physikalische Beobachtung erhaltenen zu vereinbaren; Aushilfshypothesen.

Geschichte der Pendelmessungen. Wir haben uns überzeugt, daß strenge genommen zwei unter beliebigen geographischen Breiten vorgenommene Messungen der Länge eines Sekunden schlagenden Pendels ausreichen, um nach der Formel von Clairaut die Abplattung des Erdsphäroides zu berechnen. Es wird sich nunmehr empfehlen, eine Uebersicht über die wirklich gemachten Bestimmungen und die aus ihnen für die Erdgestalt abgeleiteten Ergebnisse zu liefern, ebenso wie wir auch oben die einzelnen aus den Gradmessungen erhaltenen Werte zusammengestellt haben. Genaue Nachweisungen hierüber geben Muncke[1]) und Borenius[2]).

Die erste ausgedehntere Beobachtungsreihe rührt her von Bouguer und seinen Begleitern (s. o. S. 289); ihm folgten bald andere Astronomen und Geographen nach, und gegen Ende des Jahrhunderts verfügte man bereits über ein ziemlich stattliches Material, welches von Laplace zu seiner Berechnung der Größe α benutzt werden konnte[3]). Wir geben die wichtigsten Beobachtungsresultate nachstehend wieder, allerdings zugleich betonend, daß diese Messungen an sich noch der zahlreichen, im vorigen Abschnitte beschriebenen Korrektionen entbehrten, daß diese und insbesondere die Reduktion auf den Meereshorizont aber von Laplace angebracht sind. Die Länge des Pariser

---

[1]) Artikel „Erde“ und „Pendel“ in der neuen Auflage des Gehlerschen Wörterbuches (3. Band. S. 879 ff.; 7. Band, 1. Abteilung. S. 304 ff.).

[2]) Borenius, De gravitate ope penduli ex dato situ geographico determinanda, Helsingfors 1845. Abgesehen von den litterarischen Nachweisungen, die allerdings meist nicht näher spezialisiert sind, enthält die Abhandlung wesentlich Musterbeispiele zur Ausgleichungsrechnung.

[3]) Laplace, Mécanique céleste, vol. II. S. 146 ff.

Sekundenpendels galt als Einheit; unter dieser Voraussetzung gewährt die Tabelle das folgende Bild:

Beobachter	Ort	Geogr. Breite	Länge des Sekundenpendels
Bouguer	Unter dem Aequator	0° 0′ 0″	0,99669
„	Porto Bello	9 32 56	0,99689
„	Goava	18 27 0	0,99828
„	Paris	48 50 2	1,00000
Legentil	Pondichery	11 55 30	0,99710
Campbell	Jamaika	18 0 0	0,99745
La Caille	Kap der guten Hoffnung	33 55 16	0,99877
Darquier	Toulouse	43 35 46	0,99950
Liesganig	Wien	48 12 47	0,99987
v. Zach	Seeberg nächst Gotha	50 58 1	1,00006
Graham	London	51 29 53	1,00018
Grischow	Arensburg auf der Ostseeinsel Oesel	58 14 53	1,00074
Mallet	St. Petersburg	59 56 24	1,00101
„	Ponoi in Lappland	67 4 37	1,00148
Maupertuis	Pello in Lappland	66 47 53	1,00137

Alle diese Werte für λ_φ unter sich vereinigend, fand Laplace für α den entschieden zu kleinen Bruch $\frac{1}{335,78}$, der aber doch als vorläufig genügend gelten konnte, weil ein ähnlicher bei der Kombination der großen französischen und der peruanischen Gradmessung herausgekommen war.

Mittlerweile war man, hauptsächlich durch den trefflichen Borda veranlaßt, mehr und mehr mit den an der gemessenen Größe λ_φ anzubringenden Reduktionen vertraut geworden, und als La Peyrouse seine berühmte, leider zum traurigsten Ausgange gelangte Forschungsreise antrat, wurde ihm bereits seitens der französischen Akademie die Auflage gemacht, an möglichst vielen Orten die dort bereits bestimmten Pendellängen unter Beobachtung aller Vorsichtsmaßregeln nachzuprüfen. Energischer noch nahm England die Sache in die Hand; hier

hatte soeben Kater das uns vom vorigen Abschnitte her bekannte Reversionspendel hergestellt, und mit diesem ausgerüstet, trat Sabine 1822 auf einem eigens diesem Zwecke gewidmeten Kriegsschiffe eine Meerfahrt nach den tropischen Gewässern und Ländern an, welcher die Polarfahrt Parrys zur Ergänzung dienen sollte. Sabine hat dann später auch unter hohen Breiten beobachtet; er maß die Länge des Sekundenpendels u. a. auf den Antillen-Inseln Jamaika, St. Thomas, Trinidad, auf dem atlantischen Eilande Aszension, an der Mündung des Amazonenstromes, an der westlichen Küste Afrikas, in Trondjem, Hammerfest, auf Grönland und Spitzbergen und aus allen diesen Beobachtungen folgte $\alpha = \frac{1}{289}$ mit geringem wahrscheinlichem Fehler. Andere umfassende Messungen wurden in den beiden letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts anläßlich der Weltumseglungen eines spanischen und eines französischen Seemannes, Malaspinas und Freycinets, ins Werk gesetzt, und die Messungen des Erstgenannten fanden einen wahrhaft hingebenden Bearbeiter in Oltmanns[1]), während diejenigen des anderen in einem besonderen Werke[2]) veröffentlicht wurden. Indem Freycinet die Daten für die nördliche und für die südliche Erdhalbkugel getrennt der Berechnung zu Grunde legte, fand er bezüglich für α die Werte $\frac{1}{282}$ und $\frac{1}{280}$, was ihn zu dem Schlusse zu berechtigen schien, daß die Erde in der That als ein geometrisch genaues Umdrehungsellipsoid betrachtet werden dürfe, wenn nicht die stellenweise unregelmäßige Krümmung der Parallelen dieser Annahme im Wege stünde.

Die neuere Zeit hat die Arbeiten zur scharfen Be-

[1]) Oltmanns, Beobachtungen über die Schwere, welche während Malaspinas Weltumseglung mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind, Journal f. d. reine u. angew. Math., 4. Band. S. 72 ff.

[2]) Observations du pendule, faites dans le voyage autour du monde, pendant les années 1817, 1819, 1820 et 1821 par M. L. de Freycinet, Paris 1826.

stimmung der Pendellängen an möglichst vielen Erdorten mit großem Eifer fortgesetzt; die Franzosen Arago, Biot und Mathieu, die Engländer Foster und Basil Hall, die russischen Admirale v. Lütke und v. Krusenstern machten sich um die Vermehrung des Beobachtungsstoffes, sowie um die Verarbeitung des bereits angesammelten verdient. Biot ermittelte [1]), daß der Wert $\frac{1}{289}$ der Wahrheit sehr nahe komme, freilich nur als ein Mittelwert, denn für 0° bis 45° n. Br. repräsentiere $\frac{1}{276}$, von 45° bis 90° n. Br. $\frac{1}{306}$ den wahrscheinlichsten Betrag der Abplattung. Aus neuester Zeit sind zu nennen E. Plantamours (s. o.) mit besonderer Akribie an verschiedenen Punkten der Schweiz vorgenommene Beobachtungen [2]), der von J. Herschel dem Jüngeren — dem vierten Träger dieses wohlbekannten Namens — herausgegebene Katalog der ostindischen Schweremessungen [3]) und Peirces Neuberechnung der Größe $\alpha = \frac{1}{291}$ aus Pendel-Beobachtungen [4]). Eine kleine Tabelle zeigt

---

[1]) Biot, Sur la figure de la terre, Mém. de l'acad. royale des sc. de Paris, 1829. S. 1 ff.

[2]) E. Plantamour, Expériences faites à Genève avec le pendule à reversion, Genf-Basel 1866; Nouvelles expériences faites avec le pendule à reversion et détermination de la pesanteur à Genève et au Righi-Kulm, ebenda 1872.

[3]) J. Herschel, Account of the Operations of the great Trigonometrical Survey of India, 5. Band, Calcutta 1879. Die Messungen wurden 1864 bis 1874 von Basevi und Heaviside im leeren Raume und mit zwei auf Achatplatten schwingenden unveränderlichen Pendeln angestellt; eine genaue kritische Durchmusterung der Resultate teilt Helmert in seinem mehrfach erwähnten großen Werke (2. Band. S. 207 ff.) mit.

[4]) Der Chef der nordamerikanischen Küstenvermessung, Peirce, veröffentlicht seine Resultate in den Jahresberichten über dieses Werk für 1876 und 1881 (14. Anhang). Eine gewisse dort angebrachte Korrektion ist allerdings nicht als gesichert zu erachten, wie denn überhaupt die Amerikaner — s. Ferrels Aeußerungen

uns, wie in den verschiedenen Fällen die Konstanten a und b in der Relation $\lambda_\varphi = a + b \sin^2\varphi$ sich ergeben haben; die Tafel enthält die von Albrecht[1]) gesammelten Daten und noch einige weitere dazu. Daß die Längen in Millimetern angegeben sind, sei noch besonders betont.

Berechner	Größe von λ_φ	Anzahl der Pendelmessungen
Biot (0° bis 45°)	$991{,}0270 + 4{,}9867 \sin^2\varphi$	—
„ (45° bis 90°)	$991{,}0270 + 5{,}3372 \sin^2\varphi$	—
Pouillet	$991{,}0256 + 5{,}8719 \sin^2\varphi$	44
Sabine	$990{,}9893 + 5{,}1341 \sin^2\varphi$	13
„	$991{,}2771 + 5{,}1422 \sin^2\varphi$	25
Foster	$991{,}0057 + 5{,}1495 \sin^2\varphi$	15
Airy	$991{,}0170 + 5{,}0868 \sin^2\varphi$	49
Bowditch	$991{,}0002 + 5{,}1330 \sin^2\varphi$	52
Baily	$991{,}0217 + 5{,}0987 \sin^2\varphi$	79
Borenius	$991{,}0250 + 5{,}1160 \sin^2\varphi$	47
Ph. Fischer	$991{,}0108 + 5{,}1049 \sin^2\varphi$	73
Ed. Schmidt	$990{,}9780 + 5{,}1536 \sin^2\varphi$	47

Man entnimmt schon dieser Liste, daß es *nicht möglich ist*, durch bloße rechnerische Auswertung der Pendelbeobachtungen einen exakten Wert für a ausfindig zu machen. Es kommt aber noch ein weiterer erschwerender Umstand hinzu: die sämtlichen Bestimmungen zerfallen in zwei durchaus voneinander verschiedene Kategorien, welche der Vereinigung zu einem Gesamtbilde widerstreben und deshalb notwendig gesondert betrachtet werden müssen.

Die Schwere auf Festlands- und Inselstationen. Es ist zuerst von Saigey[2]) darauf aufmerksam

hierüber im 10. Anhange genannten Rapportes — von denen der festländischen Fachleute abweichende Ansichten über gewisse Reduktionen zu hegen scheinen.

[1]) Bremiker-Albrecht, Logarithmische Tafeln mit sechs Dezimalstellen, Berlin 1883. S. 597.

[2]) Saigey, Petite physique du globe, vol. II, Paris 1842. S. 137.

gemacht worden, daß Beobachtungen, welche auf einer Meeresinsel oder an einer Festlandküste von der Pendelschwere gemacht sind, für diese einen größeren Wert ergeben, als wenn unter gleicher Polhöhe und unter sonst gleichen Umständen die Messung aus dem Inneren eines Kontinentes stammte. Von der Reduktion auf die Meeresfläche wurde dabei bereits abgesehen; diese Korrektur vermochte die Differenz zwar zu verkleinern, nicht aber aus der Welt zu schaffen. Man muß vielmehr zur Erklärung des Sachverhaltes eine Hypothese zulassen, der man fürs erste die folgende, möglichst allgemeine Form erteilen kann: *Abgesehen von der rechnerisch zu neutralisierenden Thatsache, dass Meeresstationen dem Erdschwerpunkte näher gelegen sind als Festlandstationen, muss noch eine zweite konstant wirkende Ursache vorhanden sein, kraft deren die durch das Pendel gemessene Schwere beim tieferen Eindringen in das Innere eines Kontinentes sich vermindert.*

Einer der ersten Forscher, welche der Aufhellung dieser schwierigen Frage näher traten, war Hann[1]), der wesentlich an die Ungleichheit des Meeresniveaus als an die Grundursache der beobachteten Unregelmäßigkeiten dachte. In der That hatte bereits A. v. Humboldt[2]) die Ansicht ausgesprochen, daß das Meer durchaus keine geometrisch regelmäßige Oberfläche in allen seinen Teilen zu besitzen brauche, weil „örtliche Modifikationen der Anziehungskraft und durch dieselbe hervorgebrachte veränderte Krümmung einer Portion des flüssigen Elementes“ sich ganz gut denken ließen. Rozet[3]) und

[1]) Hann, Ueber gewisse beträchtliche Unregelmäßigkeiten des Meeresniveaus. Gäa, 12. Jahrgang. S. 138 ff. Hanns Einordnung der einzelnen Stationspunkte in Reihen, welche sich vom Meere nach dem Festlande zu fortsetzen, läßt die vom Charakter des Beobachtungsortes abhängige Variation der Schwere sehr deutlich hervortreten. Wegen der von Hann gewählten Abstandsbestimmung vgl. übrigens Helmert (a. a. O., 2. Band. S. 264).

[2]) A. v. Humboldt, Kosmos, 1. Band. S. 312.

[3]) Rozet, Extrait d'un mémoire sur quelques-unes des irrégularités que présente la structure du globe terrestre, Bull. de la soc. géol. de France. vol. XII. S. 176.

Bruchhausen[1]) traten dieser Auffassung näher, und Stokes[2]) suchte zuerst bestimmte Werte für die Höhen abzuleiten, um welche die Meeresfläche am Rande eines Festlandes in die Höhe gehoben würde. Für Europa fand er 36, für Nordamerika 144, für Südamerika sogar 172 Meter. Man konnte bei diesem Stadium der Erkenntnis sich also bei der folgenden These beruhigen:

Unregelmässige Massenverteilung am Rande und im Inneren eines Festlandes bedingt eine Veränderung in der Verteilung der Schwere, so zwar, dass, da für einen Kontinentalpunkt A die Störungen energischer als für einen Küstenpunkt B und für diesen wieder energischer als für einen Hochseepunkt C sich gestalten werden, die Schwere, wie sie das Pendel misst, im allgemeinen in A geringer als in B und in B geringer als in C ausfallen muss.

Vielfach stimmte die Beobachtung, wie wir schon andeuteten, mit dieser These überein, hie und da jedoch stellte sich eine so auffallende Diskrepanz heraus, daß erstere doch nicht als durchaus zutreffend, wenigstens nicht als allein richtig und ausreichend erachtet werden konnte. Wir werden im nächsten Abschnitte den lokalen Variationen der Schwerkraft eine besondere Aufmerksamkeit zuwenden, wollen aber jetzt gleich erwähnen, daß die fraglichen Irregularitäten zum großen Teile ein anderes Motiv zu haben scheinen. Gestützt auf geologische Erwägungen, die wir hier nicht reproduzieren wollen, stellte nämlich erst in neuerer Zeit Faye den nachstehenden Satz auf[3]):

---

[1]) Das von dem Autor an Humboldt im Manuskripte eingesendete Schriftchen war bisher nicht bekannt und wurde dies erst durch einen von Penck (Schwankungen des Meeresspiegels. München 1882. S. 6) mitgeteilten Auszug.

[2]) Stokes, On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth, Cambridge 1849. Dies ist unstreitig die wertvollste unter den älteren, dem in Rede stehenden Gegenstande gewidmeten Publikationen, wie u. a. aus der von Helmert (a. a. O., 2. Band. S. 249 ff.) gegebenen Analyse hervorgeht.

[3]) Faye, Sur les variations séculaires de la figure mathématique de la terre, Compt. rend. de l'acad. franç., vol. XC. S. 1185 ff.

Unterhalb der Meere geht die Abkühlung der Erde rascher vor sich als unterhalb der Kontinente und aus diesem Grunde ist auch die Erdkruste im ersteren Bezirke dicker und mithin anziehungskräftiger als im letzteren.

Eine auf Grund dieser Annahme hergeleitete Formel, in welche auch die Dichte der Erde [1]) eingegangen ist,

---

[1]) Die Bestimmung der *Erddichte* ist nicht ein Problem der mathematischen, sondern recht eigentlich ein solches der physikalischen Erdkunde, allein bei dem Gange, welchen die Forschung auf ersterem Gebiete neuerdings — vgl. die nächsten Abschnitte — genommen hat, ist eine wenigstens subsidiäre Kenntnis des betreffenden Wertes immerhin sehr erwünscht, so daß auch wir diesen Punkt wenigstens zu berühren gezwungen sind. Die Dichte der Erde ist eine *unbenannte Zahl* p; denkt man sich die ganze Erdmasse homogen über den ganzen Körper unseres Planeten verteilt und zwei Hohlformen von genau gleichem Volumen resp. mit solcher Erdmasse und mit chemisch reinem Wasser im Zustande größter Konzentration erfüllt, so ist der aus Erdmasse gebildete Körper, auf der Wage abgewogen, p mal so schwer als der aus Wasser bestehende. Den ersten zielbewußten Versuch zur Ermittlung des numerischen Wertes von p machten Maskelyne und Hutton (An Account of Observations made on the Mountain Shehallien for finding its Attraction, Phil. Transact., vol. LXV. S. 500 ff.); sie hatten bei einer Gradmessung bemerkt, daß an zwei einander diametral gegenüber liegenden Punkten des Gebirgsfußes das Senkel gegen das Gebirge hin abgelenkt werde, und indem sie die so entstandene vergrößerte Zenitdistanz der erwähnten beiden Punkte mit der aus geodätischen Operationen erschlossenen wirklichen Zenitdistanz verglichen, zugleich aber Masse und Schwerpunktslage des anziehenden Berges annähernd bestimmten, konnten sie eine einfache Gleichung ansetzen, welche die gesuchte Dichte als einzige unbekannte Größe enthielt. Der Wert 4,7, welchen sie für p fanden, war natürlich kein sehr genauer. — Airy und Haughton (s. o.) suchten durch Pendelbeobachtungen in Bergwerken, Carlini, dessen wir gleichfalls im vorigen Abschnitte bereits gedachten, suchte durch Beobachtungen auf hohen Bergen die Aufgabe zu lösen, doch ist es auch in letzterem Falle eine unerläßliche Voraussetzung, daß der betreffende Berg eine geometrisch ziemlich regelmäßige Gestalt besitze. So hat denn Mendenhall, der auf dem einen geraden Kreiskegel von 138° Oeffnung darstellenden Fuji-no-yama in Japan beobachtete, für p den sehr günstigen Wert 5,77 erzielt (American Journal of Science, vol. XX. S. 124 ff.; vol. XXI. S. 99 ff.). — Wiederum ganz anders ging Cavendish zu Werke, als er die kurz zuvor von Mitchell (Poggendorff, Gesch. d. Phys., S. 892) erfundene Drehwage auf unser Problem anwandte

scheint in der That die beobachteten Abweichungen der aus den Pendelschwingungen gefolgerten von der nach theoretischen Gründen für den betreffenden Erdort vorauszusetzenden Schwere recht gut darzustellen, und so hat denn auch die Opposition, welche sich im Anfang

---

(Experiments to determine the Density of the Earth, Phil. Transact., vol. LXXXVIII. S. 469 ff.). Zwei große sphärische Massen steher mit ihren Schwerpunkten symmetrisch zu den ebenfalls mit kongruenten Metallkugeln beschwerten Enden eines Stabes, der in seinem Schwerpunkte an einem ungezwirnten Faden aufgehängt ist. In dieser Lage werden alle gegenseitig ausgeübten Anziehungen einander aufheben, sowie jedoch eine der Stabkugeln ein klein wenig aus ihrer Ruhelage herausgedreht wird, beginnt sich die Attraktion der großen auf die kleinen Körper geltend zu machen, und der Stab, den der tordierte Faden in die Anfangsstellung zurückziehen möchte, vollführt um letztere horizontale Schwingungen, aus deren Größe sich, wenn alle übrigen einflußreichen Faktoren bekannt sind, p berechnen läßt. Indem Reich (Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage, Freiberg 1838) den Beobachtungsmodus erheblich verfeinerte, konnte er im Mittel aus zahlreichen Einzelberechnungen $p = 5{,}83$ setzen. — Neuerdings hat die von Poynting (On a Method of using the Balance with great Delicacy and on its Employment to determine the Mean Density of the Earth, Proceedings of the Royal Society of London, vol. XXXVIII. S. 2 ff.) und von v. Jolly (Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation, Ann. d. Phys. u. Chem., [2] 14. Band. S. 331 ff.) vorgeschlagene *Wägungsmethode* die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Letzterer legt einen vorher genau äquilibrierten Körper in eine mit der ursprünglichen fest verbundene, aber um s Längeneinheiten tiefer, also dem Anziehungsmittelpunkte näher liegende Wagschale und markiert den Ausschlag a_1 des Züngleins; alsdann bringt er unter die untere Schale eine Bleikugel von der Dichte δ und dem Halbmesser ρ und beobachtet einen größeren Ausschlag a_2; dann ist, unter r wieder den Erdradius verstanden, $p = \frac{a_1 \rho^3 \delta}{(a_2 - a_1) r s^2}$. — A. König und Richarz (Eine neue Methode zur Bestimmung der Gravitationskonstante, Ber. d. Berl. Akad. vom 29. Dezember 1885) haben dem Wägungsverfahren eine dessen Präzision beträchtlich steigernde Modifikation erteilt, und Wilsing (Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, 6. Band, ebenda 1887. S. 35 ff.) begründete eine durchaus neue Bestimmung von p darauf, daß er die von einem Metallcylinder auf die Schwingungen eines Pendels ausgeübten Einwirkungen beobachtete. Poynting und v. Jolly fanden die Erddichte übereinstimmend gleich 5,69; Wilsing fand

gegen die Fayesche Hypothese erhob, späterhin eine Abschwächung erfahren, ja es ist dieselbe mehrfach in unbedingte Zustimmung übergegangen [1]). Wir können auf die noch in lebhaftem Flusse befindliche Frage hier nicht näher eingehen, wohl aber haben wir die von den Unebenheiten der Erdoberfläche bedingten Schwereänderungen, auf deren Vorhandensein uns das Pendel aufmerksam machte, einer besonderen Betrachtung zu unterziehen.

Die Lotstörungen. Wenn irgendwo auf der Erde die Masse so verteilt ist, daß die Schwererichtung nicht mehr durch den Schwerpunkt als den Anziehungsmittel-

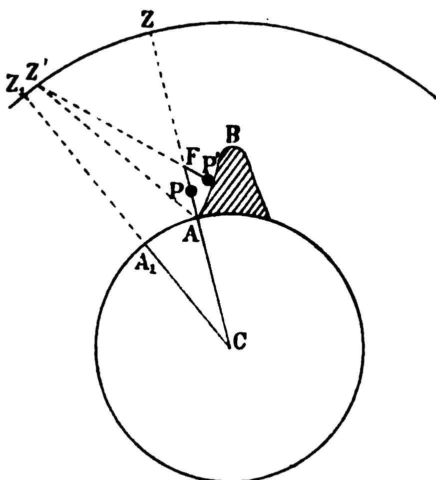
---

sie gleich 5,594 (mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 0,032). Die Vorteile und Bedenken der zuletzt beschriebenen Methoden erörtert sehr umsichtig ein kritischer Artikel von Richarz (Vierteljahrsschr. d. d. astr. Gesellsch., 24. Jahrgang. S. 18 ff.), welcher zum Schlusse der Wilsingschen Methode den Vorrang einräumt.

[1]) So hat sich Zöppritz in seinem uns schon bekannten geophysikalischen Jahresberichte (Geogr. Jahrb., 10. Band. S. 2) gegen Faye erklärt, und in der That geht der französische Astronom jedenfalls zu weit, wenn er neben dem Einflusse der wechselnden Krustendicke denjenigen der Plateaux- und Gebirgsmassen für unwesentlich hält. Immerhin folgt aus Helmerts Rechnungen (a. a. O., 2. Band. S. 336 ff.), daß Faye nicht so unrecht hatte, wie Zöppritz annahm, und die beiden Nachfolger des letztgenannten in der Bearbeitung des bezüglichen Abschnittes, Hergesell und Rudolph, konstatieren ausdrücklich (Geogr. Jahrb., 11. Band. S. 211), daß die attrahierende Wirkung der Kontinentalmassen bis zu einem gewissen Grade kompensiert werde durch die geringere Dicke der ihre Wurzeln bildenden Erdrinde. Im Zusammenhange mit verwandten geodynamischen Lehren der Neuzeit wird die Frage abgehandelt von Penck (Theorien über das Gleichgewicht der Erdkruste, Wien 1889). Im Gegensatze zu Faye verficht O. Fisher in seinem gelehrten Werke über die innere Beschaffenheit der Erde (Physics of the Earth's Crust, London 1881) die Ansicht, daß der Meeresgrund im allgemeinen minder weit vom gutflüssigen Erdkerne entfernt sei als die dem Meeresgrunde entsprechende Basisfläche der Kontinentalmassen; Pratt aber (On the Deflection of the Plumb-Line in India, caused by de Attraction of the Himálaya Mountains, Phil. Transact., vol. CXIX. S. 745 ff.; s. ebenda vol. CXLIX. S. 747 ff.; vol. CLXI. S. 335 ff.) erblickt in der unterirdischen Massenverteilung ein Spiegelbild der oberirdischen.

punkt der annähernd kugelförmigen Erde hindurchgeht, so muß diese Anomalie äußerlich dadurch sichtbar werden, *dass das Bleilot seitlich von seiner normalen Richtung abgelenkt wird.* Die Astronomen beobachteten früher, wie wir in Abschnitt V erfuhren, mit Instrumenten, an denen ein Senkel zur Horizontalstellung des nach dem Nullpunkte der Kreisteilung gerichteten Halbmessers angebracht war,

Fig. 77.



und wenn sie also mit dessen Hilfe das Zenit bestimmten, so war dies ein falsches, sobald das Senkel selbst nicht mehr nach dem Mittelpunkte der Erde hin zeigte. In *Fig. 77* repräsentiere der kleinere der um den gemeinsamen Mittelpunkt C beschriebenen Kreise die Erdoberfläche, der größere die Himmelskugel, A und A_1 seien zwei im Meeresniveau unter dem nämlichen Meridiane gelegene Orte, und bei A befinde sich eine massige Terrainerhebung, ein Berg B. Wäre dieser nicht vorhanden, so würde die Richtung des über A aufgehängten Pendels FP durch C hindurchgehen, die laterale Attraktion von B aber bewirkt, daß sich das Pendel in die Richtung

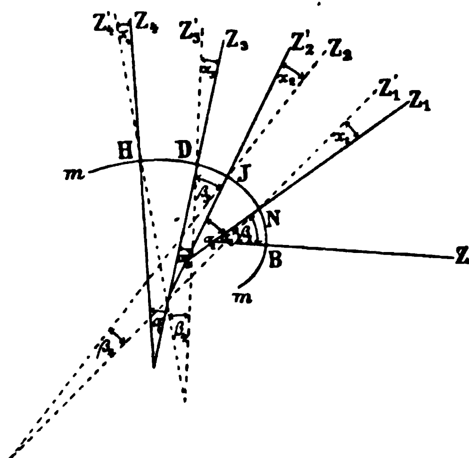
FP' einstellt. Verlängern wir PF und $P'F$ bis zum Durchschnitte dieser Linien mit der scheinbaren Himmelskugel, so erhalten wir Z als *wahres*, Z' als *durch Lokalattraktion entstelltes falsches* Zenit, $\sphericalangle ZFZ' = \sphericalangle PFP'$ gibt die Größe der Verschiebung des Scheitelpunktes an, und wenn wir jetzt auch das Zenit Z_1 von A_1 aufsuchen, so wäre die Zenitentfernung für die beiden Orte A und A_1 nicht arc ZZ_1, wie es wirklich der Fall ist, sondern dem Anscheine nach arc $Z'Z_1 <$ arc ZZ_1. Durch eine Triangulation kann aber direkt ermittelt werden, wie groß arc $AA_1 =$ arc ZZ_1 ist, und damit ist man in die Lage versetzt, die *Lotabweichung* bei jedem einzelnen Vorkommnisse dieser Art auf ihre Größe zu prüfen. Dies ist denn auch in einer Reihe von Einzelfällen, wie gleich nachher berichtet werden wird, thatsächlich geschehen, und wenn im folgenden von Lotstörungen und Lotabweichungen die Rede ist, so wird darunter jedesmal die Größe von $\sphericalangle ZFZ'$ oder, was natürlich genau das Gleiche ist, von $\sphericalangle ZAZ'$ verstanden.

Zur Berechnung der Lotabweichungen gilt nun, sobald man eine einzige *vollständig ungestörte* Lotrichtung kennt, folgender Lehrsatz[1]): *Konstruiert man für zwei Punkte der gekrümmten Erdoberfläche die wirklichen Normalen, sowie die faktischen Lotrichtungen und bezeichnet man mit β_i den jeweils von den ersteren, mit α_i den von den letzteren gebildeten Winkel, mit δ_i die Differenz (β_i mit α_i), so wird jede folgende Lotabweichung x_i gefunden, indem man zur vorhergehenden x_{i-1} die Grösse δ_i hinzu addiert*. Der Buchstabe i ist dabei ein sogenannter „durchlaufender“, für den ersten Beobachtungsort ist er gleich 1, für den zweiten gleich 2 u. s. w. Den Beweis dieses Satzes führen wir durch Induktion. *mm (Fig. 78)* ist ein Erdmeridian, auf dem in der Richtung von Süd nach Nord die Orte *B, N, J, D, H* liegen. Für jeden dieser Orte ist die — in der Figur ganz ausgezogene — Nor-

[1]) Wir folgen bei diesen Betrachtungen der lichtvollen Darstellung von Martus (a. a. O., S. 366 ff.). Freilich liegt die beschränkende Annahme zu Grunde, die abgelenkten Lote verblieben sämtlich in derselben Ebene.

male BZ, NZ_1, JZ_2, DZ_3, HZ_4 und zugleich die — in der Figur gestrichelte — beobachtete Lotrichtung NZ'_1, JZ'_2, DZ'_3, HZ'_4 gezogen, so daß mithin B den einzigen Punkt darstellt, für den von einer Schwerestörung nicht gesprochen werden kann. Absichtlich ist die Lotabweichung abwechselnd *positiv* und *negativ* vorausgesetzt worden, d. h. die thatsächliche Lotrichtung weicht bald nach

Fig. 78.



der einen, bald nach der anderen Seite von der geometrisch ermittelten ab. Für die Lotablenkungen führen wir die schon oben angedeuteten Bezeichnungen ein; es ist $\sphericalangle Z_1NZ'_1 = x_1$, $\sphericalangle Z_2JZ'_2 = x_2$, $\sphericalangle Z_3DZ'_3 = x_3$, $\sphericalangle Z_4HZ'_4 = x_4$. Jene Winkel, unter denen sich die konsekutiven Normalen schneiden, sollen (s. o.) α_1, α_2, α_3, α_4, jene, unter denen sich die konsekutiven Lotrichtungen schneiden, sollen β_1, β_2, β_3, β_4 sein. Da die Normale von B eine ungestörte ist, so müssen die Winkel α_1 und β_1 einen Schenkel (BZ), nicht aber können sie den Scheitel gemeinsam haben. Nunmehr wenden wir fortwährend den Satz an, daß der Außenwinkel eines

ebenen Dreieckes der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Innenwinkel gleich ist, und finden so, unter δ_1 etc. die bereits oben eingeführten Größen verstanden,

$$\text{I. } x_1 = \beta_1 - \alpha_1 = \delta_1,$$
$$\text{II. } -x_2 = x_1 + \beta_2 - \alpha_2 = x_1 + \delta_2,$$
$$\text{III. } x_3 = -x_2 + \beta_3 - \alpha_3 = -x_1 - \delta_2 + \beta_3 - \alpha_3 = -x_2 + \delta_3,$$
$$\text{IV. } -x_4 = x_3 + \delta_4.$$

In diesem Sinne würde sich beliebig weiter fortgehen lassen, und jede unserer mit römischen Ziffern bezeichneten Gleichungen liefert eine Verifikation obigen Lehrsatzes.

Beobachtungen von Lotabweichungen in verschiedenen Erdgegenden. Die erste zuverlässige Beobachtung einer Lotstörung scheint von Bouguer anläßlich seiner Vermessungen in den peruanischen Anden gemacht worden zu sein [1]). Sein am Quadranten angebrachtes Bleilot sei, so teilte er mit, durch die Nachbarschaft des gewaltigen Chimborazo um 7—8 Bogensekunden — zweifellos zu wenig — aus der Vertikalen abgelenkt worden. Auch Beccaria bemerkte, daß das Resultat seiner in der Poebene vorgenommenen Gradmessung (s. o.) durch die Anziehung der jene Ebene rings umschließenden Alpenkette getrübt worden sei, und in noch bestimmterem Sinne sprach sich Liesganig aus [2]). Maskelyne und Hutton versuchten, wie in diesem Abschnitte bereits mitgeteilt ward, mittelst der von einem schottischen Massiv ausgeübten Lotablenkung bereits die Masse und Dichtigkeit des Erdkörpers zu bestimmen. Schon zu Anfang des Jahrhunderts hatte man ein stattliches Material über *Gebirgsanziehung* beisammen,

---

[1]) Bouguer, La figure de la terre, S. 338 ff.

[2]) Liesganig, Dimensio graduum etc. S. 211 ff. Folgendes sind des Autors eigene Worte: „Quidni? Si unius montis Chimboraço actio 8 circiter secundorum deviationem perpendiculo intulit, quidni, inquam suspicari liceat, a tanta ingentium pinguiumque superioris Styriae montium massa sectoris quoque mei perpendiculum ad 12 secundorum angulum dimoveri?"

wie die damals erschienene Monographie v. Zachs[1]) ausweist; gleich jetzt sei bemerkt, daß an diese inhaltlich eine sechzig Jahre später herausgekommene Schrift von Philipp Keller[2]) sich anschließt. Auch die von nichtgebirgigen Massenanhäufungen bewirkten Deviationen des Bleilotes versuchte man der Rechnung zu unterwerfen[3]).

Die moderne Beobachtungskunst sieht zwar von der Mitwirkung eines Bleisenkels ganz und gar ab, allein das, was wir als Ablenkung der Lotlinie bezeichnet haben, macht sich an den gegenwärtig im Gebrauche stehenden Beobachtungs-Instrumenten ganz ebenso bemerklich. Dieselben sind, wie wir wissen, mit Wasserwagen zur Horizontalstellung gewisser Achsen und Kreisebenen ausgestattet, und wenn also etwa südwestlich vom Aufstellungspunkte eine Masse sich befindet, welche das Senkel in einer durch die Südwestlinie des Horizonts gelegten Vertikalebene aus seiner normalen Richtung ab-

---

[1]) v. Zach, L'attraction des montagnes et ses effets sur le fil-à-plomb, Avignon 1814.

[2]) Ph. Keller, Ricerche sull' attrazione delle montagne, Rom 1872.

[3]) Nach dieser Seite hin verdient besonders der zweite Teil einer Abhandlung von C. A. F. Peters bemerkt zu werden: Von den kleinen Ablenkungen der Lotlinie und des Niveaus, welche durch die Anziehung des Mondes, der Sonne und einiger terrestrischer Gegenstände hervorgebracht werden, Bull. de l'acad. imp. de St. Pétersbourg (Classe phys.-math.), vol. III. S. 212 ff. Dort ist u. a. die Größe des Winkels (a. a. O., S. 222) berechnet worden, um welchen die größte der ägyptischen Pyramiden das Lot aus der normalen Lage ablenken würde. Ebenso ist die Rechnung durchgeführt für einen mit Wasser ausgefüllten Hohlraum, beispielsweise für einen Kanal (von Bristol), der nur zur Flutzeit voll, sonst ab leer ist, in dessen Nähe also ein ruhig hängendes Pendel gewisse Schwingungen zu machen genötigt wäre. Bei Thomson-Tait (Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Wertheim, 1. Band, 2. Teil, Braunschweig 1874. S. 379 ff.) wird die anziehende Wirkung des die Fundy-Bay bei Hochfluten erfüllenden Wassers auf ein nahes Bleilot bestimmt, eine Wirkung, welche von Robison als eine meßbare nachgewiesen worden sei. Auch der oben genannte Ph. Keller hat diesen Gegenstand behandelt (Sulle piccole variazioni della gravità prodotte dalle maree e nelle località situate presso la spiaggia del mare, Rom 1873).

ziehen würde, so wird ebendiese Masse auch bewirken, daß die Luftblase in der Libelle unrichtig zeigt. Hat man nämlich durch Drehen der Stellschrauben die gewünschte Lage der Blase erreicht, wird letztere von dem eingeritzten Mittelstriche, wie es sein soll, in zwei genau gleiche Teile geteilt, so steht darum die betreffende Ebene doch nicht wirklich horizontal, sondern sie senkt sich bei obiger Voraussetzung gegen Norden und Osten, während sie gegen Süden und Westen ansteigt. Und ähnlich gestalten sich die von zwei Kardinalrichtungen der fraglichen Grundebene mit der Horizontalebene gebildeten Neigungen, wenn die anziehende Masse ihren Ort verändert. Die Beobachtung selbst liefert also in diesem Falle ebenso wie in dem vorhin besprochenen ein falsches Zenit, und das richtige muß durch geodätische Uebertragung ausgemittelt werden.

Durch Beobachtung der Libellenblase sind in unserem Jahrhundert wohl die meisten Deviationsbestimmungen gemacht worden, deren wichtigste hier noch angeführt werden sollen. Im Anschlusse an ältere Messungen von Carlini und Plana untersuchte Denzler[1]) aufs neue den ursprünglich bereits von Beccaria erkannten Einfluß der Alpen, indem er für fünf zu diesem Zwecke ausgewählte Fixpunkte (Zürich, Bern, Genf, Mailand, Andrate) den Lotablenkungswinkel aufsuchte. Für die drei nördlichen Orte besitzt die Ablenkung, wie sich bei ihrer Lage zum Gebirge leicht begreift, eine südliche und östliche, für die drei südlichen eine nördliche und westliche Komponente[2]). Der Harz wurde schon durch General

---

[1]) Denzler, Die Ablenkung des Senklotes durch die Gebirge, 3. Jahrgang des Jahrbuches des schweizerischen Alpenklubs. Vgl. auch Wolf, Gesch. d. Astr., S. 628.

[2]) Nach Denzler hat Genf 6",41 südliche und 9",17 östliche Ablenkung, bei Bern sind die Komponenten 7",73 und 3",96, bei Zürich 12",18 und 10",22, während die nördliche und westliche Abweichung bei Mailand resp. 12",83 und 1",44, bei Andrate aber 20",40 und 3",62 betragen soll. Für vollkommen ausreichend können wir allerdings nach unseren jetzigen Begriffen die einfachen von Denzler bei der Ableitung obiger Zahlen verwendeten Formeln nicht mehr halten.

v. Baeyer einer genauen Vermessung mit besonderer Rücksicht auf Lotstörungen unterworfen [1]) und es sah sich derselbe zur Aufstellung des nachstehenden Schemas befähigt:

Ort	Meeres-höhe	Berechnete Polhöhe	Gemessene Polhöhe	Deviations-fehler
Inselsberg	916,14 m	50° 51′ 8,40″	— — 11,75″	+ 3,35″
Seeberg	357,83	50 56 5,84	— — 5,84	0,00
Mühlhausen i. T.	227,45	51 12 10,10	— — 6,18	— 4,00
Tettenborn . . .	322,47	51 34 22,13	— — 17,29	— 4,84
Hohe Geis	639,65	51 39 58,12	— — 57,02	— 1,10
Brocken	1141,49	51 48 1,15	— — 10,59	+ 9,44
Ilsenburg	259,87	51 52 24,60	— — 35,71	+ 11,11
Fallstein	204,65	52 1 5,65	— — 9,34	+ 3,69
Asse	211,14	52 8 20,12	— — 20,38	+ 0,26

Trägt man die einzelnen Daten in eine topographische Karte ein [2]), so lassen sich bemerkenswerte Schlüsse über die Attraktionskraft der einzelnen Gebirgsglieder aus dieser Skizze ziehen, wie dies Lossen [3]), einer Anregung v. Richthofens folgend, im einzelnen nachgewiesen hat. Zumal im Norden und Nordosten wiegen die positiven Deviationen vor den negativen vor, was davon herrühren dürfte, daß sich in jenen Gegenden die mit hohem spezifischem Gewichte begabten Urgebirgsstöcke vorfinden. Zweimal — bei Ballenstedt und bei Harz — steigt der Ablenkungsbetrag zu einem relativen Maximum an, während sich die Hauptgranitmassen, die

[1]) v. Baeyer, Ueber den Einfluß der lokalen Lotablenkungen auf geodätische Operationen, Astr. Nachr., (2) Nr. 87.

[2]) Eine solche kartographische Darstellung, welche außer dem Harz noch den Kyfhäuser, die Hainleite, Teile der Goldenen Aue und des Thüringerwaldes mit einbegreift, hat Martus in sein Lehrbuch (a. a. O., S. 373) mit aufgenommen.

[3]) Lossen, Ueber den Zusammenhang der Lotablenkungswerte auf und vor dem Harz mit dem geologischen Bau des Gebirges, Sitzungsber. d. Gesellsch. naturf. Freunde zu Berlin, 1881. S. 19 ff.

im Brocken und im Rammelsberg vereinigt sind, wechselseitig zu neutralisieren scheinen. Doch bleibt noch manche Einzelheit unaufgeklärt, weil eben außer den über die niederdeutsche Ebene aufragenden, d. h. sichtbaren Teilen des Gebirgsknotens auch die subterranen Felslager in Rechnung gezogen werden müßten [1]).

Indem wir hiermit von der *anziehenden Wirkung* bestimmter Erdstellen Abschied nehmen und betreffs weiterer Aufschlüsse über dieselbe nur noch auf die Arbeiten v. Pechmanns [2]) verweisen, haben wir noch weiter auch der an gewissen Stellen unseres Planeten hervortretenden *abstossenden Wirkung* Erwähnung zu thun. Daß schon Kant eine solche für möglich gehalten, scheint uns durch eine von ihm selbst nicht näher erläuterte Figur dargethan zu werden, welche sich in seinem handschriftlichen Nachlaß vorgefunden hat [3]) und an welche wir (s. *Fig. 79*) selbst unsere weiteren Betrachtungen am besten anknüpfen. Die Erde, deren Mittelpunkt C ist, wirke als homogene Kugel anziehend auf den außerhalb befindlichen Massenpunkt A; dann schneidet die Anziehungsrichtung die Kugel offenbar in einem Durchmesser BB'. Nun werde aber aus der Kugel ein Volumteil so herausgenommen, daß eine — in der Figur geschraffte — Hohlkugel mit dem Zentrum C' entstehe; jetzt wirkt entschieden

---

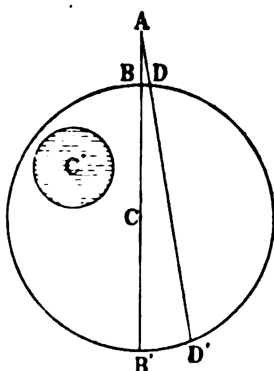
[1]) Eine auffallende Thatsache ist u. a. nachträglich noch von Löw festgestellt worden (Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen im Harz, Berlin 1882. S. 32). Danach ist zwar die Ablenkung auf dem Regenstein bei Quedlinburg die erwartet kleine, wie ja diese niedrige Erhebung vom Zentralmassiv des Gebirges schon ziemlich entfernt liegt. Dagegen zeigt sich bei Blankenburg eine auffallend große Deviation von 10",31, und für diese Erscheinung muß man, wie die Dinge heute liegen, die Erklärung zunächst noch schuldig bleiben. — Starke Lotstörungen fand man neuerdings auch bei Berlin.

[2]) E. v. Pechmann, Ueber die Abweichung der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernis einer Gradmessung, Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. k. k. Akad. zu Wien, 47. Band, II. Abteilung. S. 432 ff.; Die Abweichung der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungen, ebendort. 52. Band, I. Abteilung. S. 28.

[3]) J. Kants Schriften zur physischen Geographie, herausgeg. von F. W. Schubert, Leipzig 1839. S. 786.

die Halbkugel zur rechten kräftiger als diejenige zur linken, die Resultante aller anziehenden Kräfte wird *ADD'*, und eben in diese Richtung würde ein bei *A* aufgehängtes Bleisenkel sich einstellen. Man kann also jedenfalls die Behauptung aufstellen: *Ein unterirdischer Hohlraum wirkt abstossend auf die in der Nähe desselben gezogene Lotlinie.*

Fig. 79.



Daß dieser Satz *umkehrbar*, eine negative Deviation somit das sichere Kennzeichen für die Existenz von Massendefekten in der Nachbarschaft sein müsse, ist damit noch keineswegs bewiesen, obwohl eine gewisse Wahrscheinlichkeit stets dafür sprechen wird, daß es sich so verhalte. Jedenfalls müssen geognostische Untersuchungen mit den astronomisch-geodätischen Hand in Hand gehen. Die einzige wohl für sicher zu erachtende innere Erdaushöhlung ist zur Zeit die, auf welcher den lange Zeit hindurch planmäßig fortgesetzten Beobachtungen Schweizers[1]) zufolge die zweite Hauptstadt des russischen Reiches steht. Im übrigen muß das Vorkommen stärkerer Lotabstoßungen zu manchen Bedenken Anlaß geben, zumal wenn solche sich unweit massenkräftiger Gebirge einstellen.

Solche wurden z. B. von General Stebnizki südlich vom Kaukasus bemerkt[2]). Weit merkwürdiger jedoch

---

[1]) Schweizer, Untersuchungen über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokalattraktion, 2 Teile, Moskau 1863 und 1864.

[2]) Wir halten es für nützlich. das zu reproduzieren, was Zöppritz (Geogr. Jahrb., 10. Band. S. 3) über die von Stebnizki — zuerst in den Berichten der russischen Geographischen Gesellschaft und nachher in Band XCVII, S. 508 ff. der „Comptes rendus" — veröffentlichten Thatsachen äußert. „Während die Lotablenkungen im Norden dieses Gebirges" — des Kaukasus — „befriedigend mit

mußte die anscheinend durch die großen ostindischen Gradmessungen ans Licht gezogene Thatsache erscheinen, daß der Himálaya, diese an Volumen alle übrigen hinter sich lassende Gebirgsmasse, so gut wie gar keine Ablenkung auf das Lot auszuüben imstande sei. In seiner ersten hierher gehörigen Arbeit berechnete Pratt (s. o.) den Deviationsfehler für das nördliche Hindostan auf 5″, was freilich, wenn wir es in Parallele zu den viel stattlicheren, durch den kleinen Harz verursachten Attraktionen stellen, gar nicht viel besagen will. Um dies zu erklären, nahm Airy [1]) die Hypothese zu Hilfe, daß Himálaya und tibetanisches Hochland bloß die obersten Teile großer Krustenschollen seien, welche mit ihrem unteren Ende in den feurig-flüssigen Glutbrei des Erdinneren hinabtauchten, von diesem getragen würden und so nach dem archimedischen Gesetze einen großen Teil ihres Gewichtes einbüßten. Wir erkennen, daß diese Auffassung, da sie den großen „Horsten" der Erde [2]) eine so bedeutende

---

dem berechneten Einflusse des Gebirgswalles übereinstimmen, zeigt auf der Südseite nur Duschet — nördlich von Tiflis — den erwarteten Wert (18″,29), während Tiflis, Elisabetpol, Schemacha und Baku kleinere, teilweise entgegengesetzte Ablenkungen zeigen. Namentlich in Schemacha scheint das Gebirge geradezu eine abstoßende Wirkung auszuüben. Die Annahme großer Hohlräume im Inneren des Bodens nahe nördlich der Stadt könnte die Erscheinung erklären. Schemacha ist Zentrum des transkaukasischen Hauptberdbebengebietes, wodurch eine solche Erklärung etwas Wahrscheinlicheres erhält. Uebrigens werden beträchtliche Lotstörungen auch in Gegenden beobachtet, wo jede äußere Terrainunregelmäßigkeit fehlt, wo also nur ausgedehnte unterirdische Schichten von Gesteinen geringerer Dichte, z. B. Kohlenlager, als Erklärung zu vermuten sind." — In geringerem Maßstabe findet sich eine durchaus positive Ablenkung, wie die in Bayern ausgeführten Gradmessungsarbeiten ergaben, auch im fränkischen Jura (Peschel-Leipoldt, Physische Erdkunde, 2. Auflage, 1. Band, Leipzig 1884. S. 188). Bei Ingolstadt erscheint das Lot um 4″,62 nordwärts, am mittleren Main erscheint es um 1″,43 südwärts abgelenkt, obwohl Höhlen jenem Kalkgebirge am wenigsten fehlen.

[1]) Airy, On the Attraction of Mountains, Phil. Transact., vol. CXLV. S. 101 ff.

[2]) Mit *Horst* bezeichnet die Geologie eine zwischen zwei anderen keilförmigen Schollen in die Höhe gepreßte Scholle, das Gegenteil des Horstes ist der *Graben*.

Ausdehnung nach unten verleiht, das gerade Widerspiel der (s. o.) von Faye bekanntgegebenen ist; ihre physikalische Seite und die Bedenklichkeit solcher unkontrollierbarer physikalischer Hypothesen hat Zanotti Bianco gründlich beleuchtet[1]). Uebrigens konnte auch Pratt sich mit Airys Ansicht nicht befreunden, vielmehr wies er auf die vom indischen Festlande auf das benachbarte Meer unzweifelhaft ausgeübte Anziehung hin.

Die neue Auffassung des Problemes der Erdgestalt durch Ph. Fischer. Unter diesen Umständen mußte durch die gründliche und originelle, wenn schon in den Methoden nicht durchaus einwurfsfreie Neubearbeitung des ganzen Problemes, mit welcher Philipp Fischer vor zwanzig Jahren hervortrat[2]), eine wohlthätige Klärung herbeigeführt werden. Bis dahin war man im wesentlichen von einer Annahme ausgegangen, die man etwa mit folgenden Worten scharf formulieren könnte: *Die Erde ist, von minimalen und der Berücksichtigung nicht würdigen Unregelmässigkeiten abgesehen, ein Umdrehungsellipsoid, und wenn die zur Bestimmung der Abplattung dieses Ellipsoides dienenden, prinzipiell gleichberechtigten Methoden der Grad- und Pendelmessung nur mehr und mehr verfeinert und ihre Resultate entsprechend ausgeglichen werden, so muss es schliesslich dahin kommen, dass auf die eine und andere Weise übereinstimmende Werte für die Grösse der Abplattung erzielt werden.* Allein eben diese Erwartung muß, wesentlich auf Grund der Fischerschen und der an diese anknüpfenden, sachlich aber weit darüber hinausgehenden Arbeiten der Neuzeit, als völlig illusorisch bezeichnet werden.

Ein Hauptverdienst Fischers war, nachgewiesen zu haben, daß mit der schematischen Anwendung der Me-

---

[1]) Zanotti Bianco, Il problemo meccanico della figura della terra esposto secondo i migliori autori, vol. I., Florenz-Turin-Rom 1880. S. 242 ff.

[2]) Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde, Darmstadt 1868.

thode der kleinsten Quadrate auf die von einigen bestimmten Gradmessungen gelieferten Daten noch kein Fortschritt für die wirkliche Erforschung der Erdgestalt vollzogen sei. Die von der Lotablenkung herrührenden Fehler, welche in die Kategorie der *konstanten* (s. o. S. 108) gehören, werden mit den *zufälligen* Fehlern des Instrumentes u. s. w. unter dem gleichen Gesichtspunkte betrachtet, sie „verstecken“ sich in den Rechnungen und trüben dessen Ergebnis. Es ist auch nicht die mindeste Garantie dafür gegeben, daß die einzelnen Ellipsoide, welche man bei der Ausgleichung der Fehlergleichungen mehrerer isolierter Gradmessungssysteme zu Grunde legt, bei aller Uebereinstimmung in der Größe und Achsenrichtung räumlich zusammenfallen [1]). Die bei den Pendelbeobachtungen hervortretenden Widersprüche hat Fischer nicht gleich erschöpfend diskutiert [2]), aber den Weg hat er doch gezeigt, durch dessen Betretung die Lösung des Fundamentalproblemes der mathematischen Erdkunde wesentlich gefördert werden konnte. Wir drängen die seit Fischers Anregung mehr und mehr zu allgemeiner Anerkennung gelangte Erkenntnis von der Natur des Problemes in diesem Satze zusammen:

Die Fläche, welche unseren Erdkörper umschliesst, und welche durch die Meeresfläche resp. durch deren kanalartige Fortsetzung unterhalb der Kontinente vertreten gedacht werden kann, besitzt überhaupt keine geometrisch regelmässige Gestalt, und es können somit die einerseits durch geodätische, andrerseits durch physikalische Messung ermittelten Ellipsoide nur als Annäherungen an die wirkliche Erdgestalt betrachtet werden, welch letztere überhaupt nicht ein für allemal, sondern gewissermassen nur von Punkt zu Punkt bestimmt werden kann.

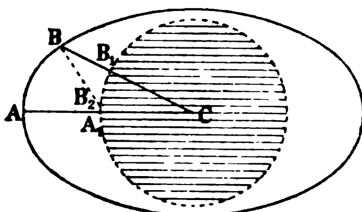
Ehe wir jedoch diese Bestimmung selbst in Angriff nehmen, haben wir noch von einigen anderen Versuchen, der Frage nach der Erdgestalt eine neue Seite abzugewinnen, Notiz zu nehmen.

---

[1]) Helmert, a. a. O., 1. Band. S. 608 ff.
[2]) Ebenda, 2. Band. S. 368.

Angebliche Kugelgestalt des Meeresbodens. Wir verweilen zuerst einen Augenblick bei der auffälligen Behauptung G. Bischofs[1]), nur der Wassermantel der Erde sei sphäroidisch gekrümmt, der Meeresgrund dagegen besitze eine genaue kugelförmige Gestalt. Zur Erläuterung dieser Ansicht verweisen wir auf *Fig. 80.* Der schraffierte Kreis im Inneren stellt die Erde, die äußere Ellipse die Wasseroberfläche vor. Bischof denkt sich aus dem gemeinsamen Mittelpunkt die Radien CA, CB u. s. w. gezogen und berechnet deren Länge[2]) nach

Fig. 80.



bekannten (oben S. 303 abgeleiteten) Formeln, wobei er die Orte A, B u. s. w. so wählt, daß sie mit bekannten Lotungsstellen zusammenfallen. Die dort geloteten Tiefen AA_1, BB_1 u. s. w. subtrahiert er von CA, CB u. s. w. und hält sich durch die von ihm hierbei gefundenen Zahlen überzeugt, daß in der That $CA_1 = CB_1 = \ldots$, der Meeresboden sohin überall gleichweit vom Erdmittelpunkte entfernt sei.

Es braucht kaum betont zu werden, daß das Material, welches bisher zur Beurteilung der Seetiefen vorliegt,

---

[1]) G. Bischof, Die Gestalt der Erde und Meeresräume und die Erosion des Meeresbodens, Bonn 1867. Man erkennt bei Lesung der Schrift bald, daß nur sein starrer Neptunismus den berühmten Geologen bei Abfassung derselben leitete.

[2]) Strenge genommen ist nicht BB_1, sondern die Normale BB_2 die Meerestiefe. Da aber (S. 301 ff.) $\sphericalangle B_1BB_2$ stets nur sehr klein ist, so ist der begangene Fehler ein unbeträchtlicher.

ein durchaus unzureichendes ist; je mehr es sich aber verstärkt und je zuverlässiger es wird, um so weniger eignet es sich zur Bestätigung der Bischofschen Hypothese. Eine aufs einzelne eingehende Widerlegung derselben ist von Klein [1]) gegeben worden.

Nichtkoinzidenz von geometrischer und kinematischer Achse. Der neapolitanische Geometer Fergola glaubte aus gewissen Andeutungen darauf schließen zu müssen [1]), *dass die Polarachse des irdischen Rotationsellipsoides nicht auch zugleich dessen Umdrehungsachse sei, dass vielmehr beide Grade einen kleinen Winkel miteinander bildeten.* Es leuchtet ein, daß, wenn dem wirklich so wäre, unsere üblichen Definitionen der mathematisch-geographischen Fundamentalbegriffe sich sehr einschneidende Aenderungen gefallen lassen müßten. So gäbe es dreierlei Arten von Meridianen und Parallelen. *Geometrischer Meridian* wäre jeder durch die kleine Achse hindurchgelegte Schnitt, der also kongruente Ellipsen ergeben würde; um den *astronomischen Meridian* eines Ortes zu finden, müßte man in diesem Orte eine Normale zum Ellipsoide ziehen und durch die Normale eine Ebene parallel zur Umdrehungsachse legen; alle Punkte, für welche die Normalen einen konstanten Winkel mit der Richtung der kinematischen Achse einschließen, erfüllen einen *geographischen Parallel,* und wenn wir uns zu der Schar aller dieser Parallelen die Schar der zugehörigen orthogonalen Trajektorien hinzudenken, so ist jede dieser letzteren Kurven ein *geographischer Meridian.*

In seiner zweiten Publikation gesteht Fergola selbst

---

[1]) H. J. Klein, Entwicklungsgeschichte des Kosmos, Braunschweig 1870. S. 7 ff.

[2]) Fergola, Sulla posizione dell' asse di rotazione della terra rispetto all' asse della figura, Neapel 1874; Dimensioni della terra e ricerca della posizione dell suo asse di figura rispetto a quello di rotazione, ebenda 1876. Vgl. auch des Verf. Anzeige im „Ausland" (1879. S. 741 ff.) und Helmerts detaillierte Kritik in der „Vierteljahrsschr. d. d. astr. Gesellsch.", 11. Jahrgang, S. 94 ff. S. 280 ff.

zu, daß der fragliche Winkel, für den er ursprünglich einen Wert von mehr denn 1° berechnet hatte, doch wohl, auch wenn vorhanden, klein genug sei, um in den Beobachtungsfehlern zu verschwinden. Helmert macht in seiner Besprechung darauf aufmerksam, daß, welche Ansicht man auch sich über Massenverteilung und Massenverschiebung im Inneren der noch nicht festgewordenen Erde gebildet haben möge, doch immer zuzugeben sein werde, daß auch die momentan aus der Koinzidenz mit der geometrischen heraus gedrehte kinematische Achse sofort wieder die Verbindung mit ersterer aufsuchen, der frühere Zustand eines gewöhnlichen Rotationsellipsoides also sich wieder herstellen werde.

Das dreiachsige Erdellipsoid. Obwohl wir (S. 372) uns überzeugt haben, daß bei ihren bestehenden Achsenverhältnissen die Erde niemals ein flüssiges dreiachsiges Ellipsoid mit den Bedingungen eines Gleichgewichtskörpers sein konnte, so haben doch Gelehrte von Ruf sich mit scheinbarem Erfolge bemüht, die Gradmessungsresultate der Hypothese *eines Ellipsoides mit drei ungleichen Achsen anzupassen.* Vornehmlich in Betracht kommen dabei die Arbeiten von Ritter [1]), Th. v. Schubert [2]) und Clarke [3]), die des Erstgenannten allerdings nur bedingt [4]).

Zur Verdeutlichung der Schubertschen und Clarkeschen Resultate beziehen wir uns auf das in *Fig. 81* dar-

---

1) Élie Ritter, Recherches sur la figure de la terre. Genf 1861.

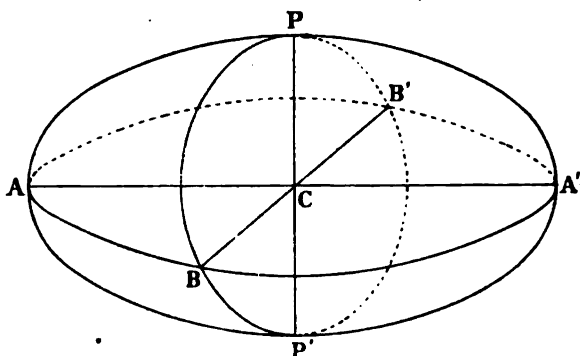
2) Th. v. Schubert, Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre, Mém. de l'acad. imp. de St. Pétersbourg, (7) vol. I. Nr. 6. Schubert scheint sich allerdings nach Döllen und Fischer (a. a. O., S. 194) ziemlich starke Willkürlichkeiten bei der Zurechtrichtung der Erfahrungswerte gestattet zu haben.

3) Clarke-James, Comparisons of the Standards of Lenght of England, France, Belgium, Prussia, India, Australia, London 1866. S. V ff.

4) Ueber die Eigentümlichkeiten von Ritters Tendenz unterrichtet R. Wolf (Gesch. d. Astr., S. 631).

gestellte dreiachsige Ellipsoid. Die drei den Mittelpunkt C gemeinsam habenden *Hauptschnitte* sind Ellipsen, alle ebenen Schnitte überhaupt sind solche Kurven, von den beiden eine Ausnahme darstellenden Systemen von Kreisschnitten abgesehen. Der Aequator ist gleichfalls elliptisch gekrümmt, AA' ist die große, BB' die kleine Achse

Fig. 81.



dieser Ellipse, und es besteht für die drei Halbachsen die Ungleichung: $AC (= a_1) > BC (= a_2) > PC (= P'C = b)$. Schubert glaubte $a_1 = 6378556$ m, $a_2 = 6377837$ m, $b = 6356719$ m gefunden zu haben, und zwar sollte, von Ferro aus gerechnet, dem Punkte A die geographische Länge 58° 44′ und dem Punkte B die Länge 148° 44′ zugehören. Nach Clarke dagegen wäre $a_1 = 6378294$ m, $a_2 = 6376350$ m, $b = 6356068$ m; A und B besitzen, mit Bezug auf den Greenwich-Meridian, resp. die Längen 15° 34′ und 105° 34′. Die größte der Meridianellipsen geht sonach durch Spitzbergen, Messina, den Tsade-See und Hawaii, die kleinste Meridianellipse geht nahezu durch das Kap Tscheljuskin, an Irkutsk vorüber und durch das westliche China hindurch zum Nordpole zurück. Die Elliptizität des Aequators $\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1}\right)$ wäre hiernach

$\frac{1}{3269{,}5}$, die Meridiane besäßen als Maximal- und Minimalelliptizität $\frac{1}{285{,}97}$ und $\frac{1}{313{,}38}$, woraus sich der der Abplattung eines zweiachsigen Ellipsoides gleich zu achtende Mittelwert $\frac{1}{300}$ berechnen würde.

So geachtet mit Recht (s. Abschnitt XVII) Clarkes Ergebnisse dastehen, so vielfach man sich auf sie bei geodätischen Rechnungen bezieht, so ist die Meinung, daß die Erde *wirklich* ein dreiachsiges Ellipsoid sei, heute gleichwohl gänzlich aufgegeben. Man hat eben, wie wir wissen, mit dem Worte Erdgestalt einen ganz neuen Begriff zu verbinden gelernt, einen Begriff, mit dessen Eigenart uns die nächsten drei Abschnitte bekannt machen sollen.

XXI. Das kombinierte Potential von Erdschwere und Zentrifugalkraft.

Attraktion und Potential. Der Begriff der *Massenanziehung,* der bei Aristoteles und den Scholastikern ebenso wie bei Coppernicus bereits vorhanden, bei Kepler[1]) sogar auf eine bestimmte mathematische, wenn schon nicht richtige Form gebracht war, ist zuerst von Newton[2]) klar und deutlich ausgesprochen worden.

---

[1]) Vgl. des Verf. Schrift „Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus" (Wien-Olmütz 1888). Kepler war in dem Wahne befangen, die Schwerkraft vermöge nur längs der die Aequatorebene der anziehenden Kugel erfüllenden Radien zu wirken, und so gab er irrtümlich statt des Newtonschen den folgenden Ausdruck: $k\,\frac{m_1 m_2}{R}$.

[2]) In dem uns bereits bekannten fundamentalen Werke „Principia naturalis philosophiae mathematica" (London 1687; zweite, von Cotes besorgte Ausgabe, Cambridge 1713; dritte, von Pemberton besorgte Ausgabe, London 1726).

Man kann diesem Newtonschen *Anziehungs-* oder *Gravitationsgesetze* die nachfolgende Form erteilen[1]:

Irgend zwei materielle, bezüglich mit den Massen m_1 und m_2 begabte materielle Punkte, deren Entfernung gleich R ist, ziehen sich gegenseitig mit der Kraft $k\,\frac{m_1\,m_2}{R^2}$ *an, wo k eine gewisse Konstante bedeutet. Die Anziehung selbst erfolgt längs der beide Massenpunkte verbindenden graden Linie.*

Damit ist gesagt, daß die Attraktion etwas Reziprokes ist, nicht bloß der große Körper zieht den kleinen an, sondern auch der kleine den großen, so daß bei diesem Gesetze das gleichfalls von Newton zuerst als solches formulierte, aber nicht minder auch bei Kepler[2]) zu findende andere Gesetz von der *Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung*[3]) unangefochten bleibt. Indem die Planeten, dem auf sie wirkenden Doppelimpulse von solarer Anziehung und ursprünglicher Anstoßbewegung Folge leistend, die Sonne umkreisen, wirken sie auch ihrerseits anziehend auf den Zentralkörper und bringen es zuwege, daß der letztere unausgesetzt kleine Drehungen um einen seine Lage stets wechselnden, jedoch meist im Sonnenballe selbst verbleibenden Punkt ausführt. Wäre das Uebergewicht der Sonnenmasse über die vereinigten Planetenmassen kein so ungeheures, wie es dies thatsächlich ist, so würden die Bewegungsverhältnisse innerhalb unseres Sonnensystems überaus verwickelte werden.

Die Frage, ob der von Newton für die Gravitation

---

[1]) Den Faktor *k* kennt Newton selbst in dieser Bedeutung noch nicht. Mit seinem Wesen und seinem numerischen Werte — zunächst für unser engeres Weltsystem — hat uns erst das nächst demjenigen von Newton und Laplace für die Attraktionstheorie am meisten bahnbrechende Werk von Gauß „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium" (Hamburg 1809) bekannt gemacht.

[2]) A. a. O., S. 45 ff. Vgl. auch Rohde, Ueber Newtons drittes Grundgesetz der Bewegung, mit gehöriger Rücksicht auf Metaphysik der Natur, Potsdam 1799.

[3]) Newtons Prinzipien, deutsch von Wolfers, S. 32.

aufgestellte Ausdruck ein *absolut genauer* oder nur ein *angenäherter* sei, ist schon vielfach diskutiert worden, allein stets ist man zu der Annahme gekommen, daß kein Grund vorliege, an der strengen Richtigkeit der Formel zu zweifeln. Eingehende Studien Scheibners und v. Oppolzers haben uns diese beruhigende Sicherheit ganz besonders verschafft[1]). Man mag nämlich die astronomischen Rechnungen auf Grund des Newtonschen Gesetzes selbst oder auf Grund des von W. Weber aufgestellten elektrodynamischen Gesetzes oder endlich mit Zulassung der Hypothese vom Zeitverbrauche der Schwere bei ihrer räumlichen Fortpflanzung durchführen — stets gelangt man zu nahezu übereinstimmenden Ergebnissen, und die Differenzen sind jedesmal unbedeutend genug, um im Hinblicke auf die unvermeidliche Unzuverlässigkeit aller dem Kalkül zur Basis dienenden Erfahrungswerte als nicht vorhanden betrachtet werden zu dürfen. Auch die weitere naheliegende Frage, ob die Gravitation als einfache „Actio in distans" oder aber als das Resultat gewisser Bewegungsvorgänge in dem die Welträume angeblich erfüllenden *Aether* zu gelten habe, trägt einen viel zu akademischen Charakter, als daß sie uns bei dieser Gelegenheit näher zu beschäftigen brauchte. Wer sich für solche immerhin anziehende Spekulationen interessiert, findet reichste Belehrung in der Monographie von Isenkrahe[2]). Wir persönlich halten uns an die von Paul du Bois-Reymond[3]) vertretene Ansicht, daß die *Fernkraft* als etwas thatsächlich Gegebenes hingenommen werden muss, ohne daß eine eigentliche Deduktion ihres Gesetzes möglich wäre.

Im vorigen Abschnitte war bereits der Thatsache zu gedenken, daß die Schwere, selbst wenn man sich auf

---

[1]) Sehr gut orientiert über diese Fragen ein von v. Oppolzer auf der Salzburger Naturforscherversammlung gehaltener und in deren „Tageblatt" (Salzburg 1881, 1. Abteilung, S. 125 ff.) abgedruckter Vortrag.

[2]) Isenkrahe, Das Rätsel der Schwerkraft, Braunschweig 1879.

[3]) Du Bois-Reymond, Ueber die Unbegreiflichkeit der Fernkraft, Naturwiss. Rundschau, 3. Jahrgang. S. 169 ff.

die Erde selbst beschränkt, eine sinnenfällig hervortretende Erscheinung werden kann; die Lotstörungen haben uns in dieser Beziehung ein ziemlich reichhaltiges Erfahrungsmaterial an die Hand gegeben. Aber auch abgesehen hiervon verfügt man in neuerer Zeit über eine ganze Anzahl von Mitteln, um *rein terrestrisch* die Existenz der gegenseitigen Massenanziehung nachzuweisen und zugleich deren Variationen längs der Erdoberfläche zu messen [1]).

Bisher war eigentlich nur von der Anziehung zweier Massenpunkte die Rede; für die Anwendung ist dieser einfachste Fall zwar der grundlegende, allein er kann uns nur dazu dienen, mit Hilfe des an ihm erkannten Anziehungsgesetzes das allgemeine Anziehungsproblem zu lösen: *Ein Körper, durch dessen Volumen die Masse nach einem bestimmten Gesetze verteilt ist, wirkt in dem Sinne auf einen irgendwo gelegenen Massenpunkt, dass zwischen diesem und jedem der in endlicher oder unendlicher Anzahl vorhandenen Körperpunkte (Massenteilchen) eine vom Newtonschen Gesetze geregelte Anziehung stattfindet. Man soll die Grösse der gegenseitigen Anziehung zwischen Körper und Massenpunkt finden und ebenso die Richtung, längs welcher diese Kraft wirksam ist.* Sobald die beiden in Frage kommenden Körper sehr weit voneinander entfernt sind, kann man als diese Richtung die die *Schwerpunkte* der Körper miteinander verbindende grade Linie annehmen [2]); unter gewöhnlichen Umständen dagegen muß man sich hüten, den Schwerpunkt mit dem *Attrak-*

---

[1]) Eine Uebersicht über alle diese Methoden sucht des Verf. „Geophysik" (1. Band. S. 56 ff.) zu geben. Mascart glaubt sogar die Aenderungen der irdischen Schwere ebenso genau wie durch ein Pendel durch eine Gasmasse von unveränderlichem Volumen messen zu können, welche nur bei einer bestimmten Temperatur beobachtet werden dürfte, dann aber eine ihren Verschluß bildende Quecksilbersäule stärker oder minder stark verschieben würde, je nachdem auf sie selbst die Anziehung der Erde einwirkte. Vgl. Mascarts Studie „Sur les changements de la gravitation" (Compt. rend., vol. XCVI. S. 126 ff.).

[2]) Hierauf sowie auf der annähernd kugelförmigen Gestalt der Sonne und sämtlicher Wandelsterne beruht allein die Möglichkeit, die Bewegungen innerhalb unseres Weltsystemes mathematischer Kontrolle unterwerfen zu können.

tionszentrum zu verwechseln. Ein solches braucht es nicht zu geben.

Zur Auflösung obiger Aufgabe in ihrer vollsten Allgemeinheit verhilft uns nun eine gewisse Begriffsbestimmung, die neuerdings für mathematische und physikalische Geographie von geradezu einschneidender Bedeutung geworden ist. Wir meinen das *Potential*[1]). Unter den vielerlei Definitionen, welche man für diesen wahrhaft Proteus-artigen Begriff aufgestellt hat, wählen wir die nach unserem Dafürhalten einfachste aus und definieren, wie folgt:

Wenn ein ursprünglich in unendlicher Entfernung befindliches Massenteilchen m_2 durch die Attraktion eines Massenteilchens m_1 so weit herangebracht worden ist, dass zwischen m_1 und m_2 statt der unendlichen nur mehr die endliche Entfernung R besteht, so bezeichnen wir die zur Ueberwindung des Weges aufgewendete mechanische Arbeit als das von m_1 auf m_2 in der Distanz R ausgeübte Potential und behaupten, dasselbe sei seinem Werte nach gleich $k\dfrac{m_1 m_2}{R}$.

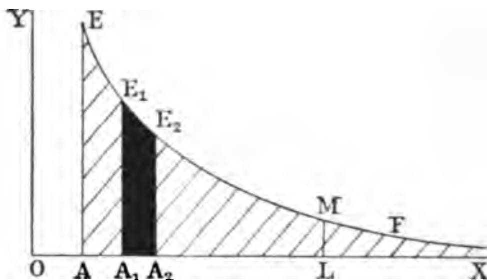
Den Beweis führen wir an *Fig.* 82. In O befinde sich zur Zeit das massenkräftigere Teilchen m_1; durch O als Anfangspunkt sei ein rechtwinkliges Achsensystem XOY gelegt, und OX sei die Grade, auf welcher sich m_2 bewegt hat, bis es nunmehr im Punkt A angelangt ist. OA ist $= R$. Die Gesamtarbeit, welche erforderlich war, um m_2 in seine gegenwärtige Stellung zu bringen, ist das Produkt aus Kraft und Weg, wir können diese Arbeit somit, wenn wir die Kräfte als parallel zur Ordinatenachse gerichtete Strecken ansehen, mit einer Fläche

---

[1]) Hier ist stets grundsätzlich nur vom Newtonschen Potentiale die Sprache. Natürlich aber besteht für jeden anderen Ausdruck der Massenanziehung, z. B. $k\dfrac{m_1 m_2}{R^n}$ $(n \gtrless 2)$ ein zugehöriges Potential. Wissenschaftliches Interesse gewährt im übrigen nur noch der Spezialfall $n = 1$, dem als *logarithmisches Potential* der Ausdruck $-k m_1 m_2 \log R = k m_1 m_2 \log \dfrac{1}{R}$ entspricht.

identifizieren, welche bei A durch die Senkrechte AE, sonst aber durch die Abszissenachse OX und durch eine krumme Linie EF begrenzt wird, die mit OX den unendlich entfernten Punkt gemein hat. Der in unserer

Fig. 82.



Zeichnung schräg geschraffte *asymptotische Kurvenraum* repräsentiert uns also den Wert des Potentiales. Um ihn statt bloß graphisch auch analytisch ausgedrückt zu erhalten, stehen uns zwei Wege offen.

I. Beweis durch Infinitesimalrechnung. Derselbe ist naturgemäß durch Kürze ausgezeichnet. In *Fig. 82* sei $OL = \rho$, dann ist die zugehörige Ordinate LM, unserer Voraussetzung zufolge, $= k\,\frac{m_1\, m_2}{\rho^2}$. Um die asymptotische Fläche zu erhalten, braucht man nur das bekannte bestimmte Integral zu bilden und hat, unter V das Potential verstanden,

$$V = \int\limits_{\varrho = R}^{\varrho = \infty} LM.\, d\rho = \int\limits_{\varrho = R}^{\varrho = \infty} k\,\frac{m_1\, m_2}{\rho^2}\, d\rho$$

$$= -k\, m_1\, m_2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right) = k\,\frac{m_1\, m_2}{R},$$

da $\frac{1}{\infty}$ nur eine andere Ausdrucksform für Null ist.

II. Elementarer Beweis. Wir wählen auf der Abzissenachse zwei einander unendlich benachbarte Punkte A_1 und A_2 mit den Abszissen $OA_1 = \rho_i$ und $OA_2 = \rho_{i+1}$. Zu beiden Punkten konstruieren wir die Ordinaten $A_1 E_1$ und $A_2 E_2$ und dann betrachten wir das einem Paralleltrapez gleich zu achtende Viereck $A_1 A_2 E_2 E_1$. Dessen Flächeninhalt V_i ist nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie leicht zu finden; es ist

$$V_i = \frac{1}{2}(OA_2 - OA_1)(A_1 E_1 + A_2 E_2)$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{i+1} - \rho_i)\left(k\frac{m_1 m_2}{\rho_{i+1}^2} + k\frac{m_1 m_2}{\rho_i^2}\right).$$

Um diesen Ausdruck bequemer vereinfachen zu können, multiplizieren wir ihn mit $1 = \frac{\rho_{i+1}\rho_i}{\rho_{i+1}\rho_i}$ und erhalten so

$$V_i = \frac{1}{2}km_1 m_2 (\rho_{i+1} - \rho_i)\left(\frac{1}{\rho_{i+1}^2} + \frac{1}{\rho_i^2}\right)\frac{\rho_{i+1}\rho_i}{\rho_{i+1}\rho_i}$$

$$= \frac{1}{2}km_1 m_2\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i+1}}\right)\left(\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} + \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\right).$$

Die beiden Brüche, aus deren Summe die zweite Parenthese besteht, sind nun, solange $A_1 A_2$ unendlich klein gedacht wird, jeder für sich von der Einheit nur um unendlich wenig verschieden, ihre Summe kann also $= 2$ gesetzt werden, und es wird

$$V_i = km_1 m_2\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_{i+1}}\right).$$

Jetzt sind alle die unendlich vielen Elementartrapeze zu summieren, welche die asymptotische Fläche ausmachen; es ist, wenn $OA = R$ mit ρ_0 identifiziert wird,

$$V = \sum_{i=0}^{i=\infty} V_i = km_1 m_2 \times$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} + - \ldots - \frac{1}{\rho_\infty}\right).$$

Wie man sieht, heben sich sämtliche Glieder dieser Reihe abwechselnd fort mit Ausnahme des ersten und letzten; dieses aber ist $= 0$ und sonach

$$V = km_1 m_2 \cdot \frac{1}{\rho_0} = k \frac{m_1 m_2}{R},$$

wie es unserer Behauptung entspricht. —

Für zwei Massenteilchen ist dadurch der kausale Zusammenhang zwischen Anziehung und Potential festgestellt; es erübrigt noch, denselben Zusammenhang dann zu untersuchen, wenn ein Körper von der — irgendwie verteilten — Masse M auf einen materiellen Punkt von der Masse m wirkt. Da gilt dann der allgemeinere Satz [1]):

Sind a, b, c die rechtwinkligen Koordinaten des Massenpunktes m und x, y, z diejenigen eines beliebigen Punktes des anziehenden Körpers, dessen variable Dichte Θ jeweils als eine Funktion von x, y, z zu denken ist, so bildet man zuerst das Potential in Gestalt des über den ganzen Körper ausgedehnten dreifachen Integrales

---

[1]) Ueber die mannigfachen Entwicklungen, denen der die Beziehung zwischen Attraktion und Potential formulierende Gedanke unterlag, ehe er in die unzweideutig klare Formulierung des obigen Theoremes gebracht werden konnte, gibt den besten Aufschluß eine Schrift von Bacharach: Abriß einer Geschichte der Potentialtheorie, Würzburg 1883. Nachdem die Anziehung für eine Anzahl von Körpern durch Newton, Cotes, Stirling, Clairaut, Maclaurin und D'Alembert fast ausschließlich auf synthetischem Wege bestimmt worden war, erkannte zuerst 1777 Lagrange die analytische Abhängigkeit der die Attraktion nach Größe und Richtung festlegenden Größen von einem bestimmten, sich unter allen Umständen gleich bleibenden Ausdrucke, den erst später Gauß (Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte, Göttingen 1839) das *Potential* nannte. Von Green (An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham 1828) war die Bezeichnung *Potentialfunktion* gebraucht worden. Die in Clausius' trefflichem Lehrbuche „Das Potential und die Potentialfunktion“ (2. Auflage, Leipzig 1877) durchgeführte strenge Begriffsscheidung ist von der Mehrzahl der Fachschriftsteller nicht adoptiert worden.

$$V \equiv km \iiint \frac{\Theta\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} \equiv km \int \frac{dM}{\rho};$$

von V nimmt man die drei partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ *und dann lässt sich beweisen, dass, unter A den Absolutbetrag der gegenseitigen Anziehung, unter α, β, γ die drei von letzterer mit den Achsenrichtungen gebildeten Winkel verstanden, diese vier die Lösung der Aufgabe involvierenden Grössen durch die Relationen*

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial V}{\partial x} : A, \ \cos\beta = \frac{\partial V}{\partial y} : A, \ \cos\gamma = \frac{\partial V}{\partial z} : A$$

gegeben sind.

Man erkennt, daß, sobald es sich nur um eine einzige Dimension handelt, unser zuerst betrachteter Spezialfall resultiert; dann ist $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, die Anziehungsrichtung, mit der X-Achse zusammenfallend, steht sowohl auf der Y-Achse wie auch auf der Z-Achse senkrecht, und es wird $A = \frac{\partial V}{\partial x} = k\frac{mM}{R}$.

Der allgemeine Beweis ist, mit Bezug auf *Fig. 83*, leicht zu führen. $OXYZ$ ist das zu Grunde gelegte Orthogonalsystem, die Punkte P und Q sind resp. durch ihre Massenbelegungen $\delta = dM = f(x, y, z)$ und m, sowie durch ihre Koordinaten x, y, z und a, b, c gegeben. Wir verzeichnen ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Diagonale PQ ist, dessen Seiten ihren Richtungen nach aber mit den Achsen übereinstimmen, und dessen Seitenlängen somit $(a-x)$, $(b-y)$ und $(c-z)$ sind. Wenn $PQ = \rho$ (s. o.) gesetzt wird, so sind die drei Winkel, welche PQ mit den Koordinatenachsen bildet, d. h. die drei Winkel ξ, η, ζ durch die Gleichungen

$$\cos\xi = \frac{a-x}{\rho}, \ \cos\eta = \frac{b-y}{\rho}, \ \cos\zeta = \frac{c-z}{\rho}$$

bestimmt. Gesetzt, die Grösse der Anziehung wäre in irgend gesetzmäßiger Weise von ρ abhängig, also $= F(\rho)$, so hätte man, unter X', Y', Z' die drei rechtwinkligen

Fig. 83.

Komponenten der Anziehung A' zwischen dM und m verstanden, diese vier Beziehungen:

$$A'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,\quad X' = kF(\rho) \,.\, \frac{a-x}{\rho}\, dM \,.\, m,$$

$$Y' = kF(\rho) \,.\, \frac{b-y}{\rho}\, dM \,.\, m,\quad Z' = kF(\rho) \,.\, \frac{c-z}{\rho}\, dM \,.\, m.$$

Für die Newtonsche Gravitation wird $F(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$; solchergestalt werden

$$X' = k \cdot \frac{a-x}{\rho^3} dM \cdot m, \quad Y' = k \cdot \frac{b-y}{\rho^3} dM \cdot m,$$

$$Z' = k \cdot \frac{c-z}{\rho^3} dM \cdot m.$$

Berücksichtigt man, daß $\rho = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$ ist, so findet man duch unmittelbares Differentiieren nach x

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x} = \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}^3} = -\frac{a-x}{\rho^3}.$$

Ebenso kann man nach y und z die Ableitung suchen, und es ist überhaupt

$$X' = -k \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x} dM \cdot m, \quad Y' = -k \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial y} dM \cdot m,$$

$$Z' = -k \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial z} dM \cdot m.$$

Bis hierher war dM nur als isoliertes Massenteilchen aufgefaßt worden; handelt es sich um einen physischen Körper von der Masse M, so ist jedesmal nach x, y, z zu integrieren, und wir überzeugen uns, daß, wenn wir, unter Weglassung der Indizes, mit X, Y, Z die drei rechtwinkligen Seitenkräfte der Gesamtanziehung A bezeichnen,

$$A^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

zu setzen sein wird. Die drei Richtungskosinus $\frac{X}{A}$, $\frac{Y}{A}$, $\frac{Z}{A}$ sind damit ebenfalls gegeben; will man aber von A gänzlich absehen, so wird

$$\operatorname{cotang} \alpha = \frac{\partial V}{\partial x} : \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}},$$

$$\operatorname{cotang} \beta = \frac{\partial V}{\partial y} : \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial z^2} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2}},$$

$$\operatorname{cotang} \gamma = \frac{\partial V}{\partial z} : \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2}}.$$

Das Potential der Kugel und des Ellipsoides. Sowohl um zu den soeben entwickelten Lehren einige Beispiele zu geben als auch um unseren künftigen Untersuchungen vorzuarbeiten, wollen wir das Potential wirklich für gewisse, der mathematischen Erdkunde besonders wichtige Körper angeben. Es sind dies naturgemäß die *Kugel* und das *Ellipsoid.*

Der Radius der Kugel sei R; wir nehmen an[1]), ihre Dichte sei für jede konzentrische Kugelschale konstant,

Fig. 84.

also, wenn ρ den wechselnden Abstand vom Kugelzentrum bezeichnet, $= f(\rho)$ zu setzen. Statt der rechtwinkligen Koordinaten wählen wir diesmal polare; im Mittelpunkte C unserer Kugel *(Fig. 84)* durchschneiden

[1]) Für diese Annahme ist die Berechnung des Potentiales durchgeführt in Schlömilchs Schrift „Der Attraktionskalkül“ (Halle 1851. S. 12 ff.). Auch im übrigen gewährt diese Schrift eine vielseitige Anregung, wie wir gleich nachher sehen werden, wenn wir zum Problem der Anziehung eines Ellipsoides übergehen.

sich die bezüglich der X-, Y- und Z-Achse von vorhin analogen Hauptdurchmesser AA', BB' und PP', und dem beliebig im Inneren der Kugel angehörenden Punkte J würden die Koordinaten x, y, z zugehören. Wir verlängern CJ bis zum Durchschnitte J_1 mit der Kugelfläche und legen durch J_1, P und P' einen Hauptkreis, welcher die XY-Ebene längs des Kugelradius CJ_2 durchschneidet. Wenn wir dann die übliche Bezeichnungsweise der Geographie acceptieren und J durch seine Breite arc $J_1 J_2 = \varphi$ sowie durch seine Länge arc $AJ_2 = \sphericalangle ACJ_2 = \lambda$ fixiert annehmen, so wird der Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und polaren Koordinaten durch das folgende System gekennzeichnet:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = \rho \cos\varphi \sin\lambda, \quad z = \rho \sin\varphi.$$

Das Massenelement $dM = f(\rho)\, dx\, dy\, dz$ ist jetzt gleich $\rho^2 f(\rho) \sin\varphi\, d\rho\, d\lambda\, d\varphi$. Als angezogenen Punkt betrachten wir K; zu ihm stehen die Punkte K_1 und K_2 ganz in derselben Beziehung, wie dies für J_1 und J_2 im Verhältnis zu J galt. Bezeichnen wir CK mit ρ', arc $K_1 K_2$ mit φ', arc AK_2 mit λ', so gelten für die oben gebrauchten Orthogonalkoordinaten die weiteren Transformationsgleichungen:

$$a = \rho' \cos\varphi' \cos\lambda', \quad b = \rho' \cos\varphi' \sin\lambda', \quad c = \rho' \sin\varphi'.$$

Zieht man JK, so hat man $\overline{JK}^2 = \overline{CJ}^2 + \overline{CK}^2 - 2\, CJ \,.\, CK \,.\, \cos(\text{arc}\, J_1 K_1)$; letzterer Kosinus hat durch das sphärische Dreieck $J_1 P K_1$ bestimmt zu werden, und wenn man dies alles zusammenfaßt, so wird

$$V = km \int\limits_{\rho=0}^{\rho=R} \int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{\rho f(\rho) \sin\varphi\, d\varphi\, d\lambda\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \left[\sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda')\right]}}.$$

Daß dieses dreifache Integral der Auswertung keine theoretischen Schwierigkeiten entgegensetzt, ist leicht zu übersehen, doch läßt sich der Ausdruck leicht noch erheblich transformieren. Die Kugelgestalt gestattet uns

nämlich ohne weiteres eine Transformation des Koordinatensystems in dem Sinne, daß wir den Punkt K als in der Verlängerung CA liegend annehmen. Für J bleiben die Koordinaten ρ und λ unverändert; im übrigen aber bringen wir die Veränderlichkeit dieses Punktes dadurch zur Geltung, daß wir mit χ den Winkel bezeichnen, den der Fahrstrahl CJ mit CK bildet. Dies vorausgesetzt, bekommen wir in weit einfacherer Gestalt

$$V = km \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \int\limits_{\chi=0}^{\chi=2\pi} \frac{\rho^2 f(\rho) \sin\chi \, d\rho \, d\lambda \, d\chi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\chi}}.$$

Wir integrieren, wie es durch die Integrationsordnung angedeutet ist, zuerst nach χ; so erhalten wir

$$\int\limits_{\chi=0}^{\chi=\pi} \frac{\sin\chi \, d\chi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\chi}} = \left| \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\chi}}{\rho\rho'} \right|_{\chi=0}^{\chi=\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho'} - \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'}}{\rho\rho'}.$$

Nunmehr sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\rho' > R$ oder aber $\overline{\gtrless} R$ ist. Gilt ersteres, so wird, da die Integration nach λ sich ganz von selbst vollzieht,

$$V = 2km\pi \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=R} \rho^2 f(\rho) \cdot \frac{\rho' + \rho - \rho' + \rho}{\rho\rho'} d\rho = \frac{4km\pi}{\rho'} \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=R} \rho^2 f(\rho) \, d\rho.$$

Das einzig übrig gebliebene bestimmte Integral ist nichts anderes als die Masse M der Kugel dividiert durch 4π; wir haben also $V = \frac{kMm}{\rho'}$. Da der angezogene Punkt auf der X-Achse gelegen ist, so ist die Anziehung der Kugel auf $m = -\frac{\partial V}{\partial \rho'} = \frac{kMm}{\rho'^2}$, in Worten:

Die Attraktion einer homogenen oder doch aus konzentrischen homogenen Kugelschalen von endlicher resp. unendlich kleiner Dicke sich zusammensetzenden Kugel wirkt auf einen ausserhalb gelegenen Punkt gerade so, als wäre die gesamte Masse im Mittelpunkte vereinigt.

Wenn andererseits der angezogene Punkt im Inneren der anziehenden Kugel liegt, so muß man die letzte Integration doppelt ausführen; für das erste der beiden Integrale sind $\rho = 0$ und $\rho = \rho'$, für das zweite sind $\rho = \rho'$ und $\rho = R$ die Grenzen. So wird [1])

$$V = \frac{4\,km\,\pi}{\rho'} \int_{\rho=0}^{\rho=\rho'} \rho^2 f(\rho)\, d\rho + 4\,km\,\pi \int_{\rho=\rho'}^{\rho=R} \rho\, f(\rho)\, d\rho.$$

Auswerten kann man diese Integrale freilich nicht, ohne über die Beschaffenheit der Funktion f irgendwelche Voraussetzungen zu machen; wohl aber kann man den die Attraktion darstellenden Differentialquotienten bilden, und da, wenn p ganz beliebig ist,

$$\frac{\partial}{\partial \rho'} \int_{\rho=p}^{\rho=\rho'} F(\rho)\, d\rho = F(\rho'), \quad \frac{\partial}{\partial \rho'} \int_{\rho=\rho'}^{\rho=p} F(\rho)\, d\rho = -F(\rho')$$

---

[1]) Zur Erläuterung der nächsten Gleichung ist noch zu bemerken, daß oben bei der Bildung der Differenz

$$\left(\left[\pm\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho'}\right] - \left[\pm\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'}\right]\right)$$

beide Male das positive Vorzeichen genommen werden mußte. Diesmal jedoch, wo zwei Integrale vorhanden sind, muß zuerst das obere und dann das untere Zeichen genommen werden; thut man dies, so ergibt sich

$$\int_{\chi=0}^{\chi=\pi} \frac{\sin\chi\, d\chi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\chi}} = \frac{\rho' + \rho - (\rho' - \rho)}{\rho\rho'} = \frac{2}{\rho'},$$

$$\int_{\chi=0}^{\chi=\pi} \frac{\sin\chi\, d\chi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\chi}} = \frac{\rho' + \rho - (\rho - \rho')}{\rho\rho'} = \frac{2}{\rho}.$$

sein muß, so hat man zum Schlusse die Anziehung

$$A = -\frac{4\,k\,m\,\pi}{\rho'^2}\int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=\varrho'} \rho^2 f(\rho)\,d\rho + \frac{4\,km\,\pi}{\rho'}\rho'^2 f(\rho') - 4\,km\pi\rho' f(\rho')$$

$$= -\frac{4\,km\,\pi}{\rho'^2}\int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=\varrho'} \rho^2 f(\rho)\,d\rho.$$

Hieraus folgt eine von uns bereits im vorvorigen Abschnitte (S. 356) mehr gelegentlich erkannte Wahrheit:

Ein im Inneren einer Kugel von bekannter Struktur befindlicher, um ρ' von deren Zentrum abstehender Massenpunkt erleidet dieselbe Anziehung, als ob nur eine Kugel vom Halbmesser ρ' vorhanden wäre, während die äussere Kugelschale sich selbst neutralisiert [1]).

Das Problem der Kugel kann damit als endgültig erledigt gelten. Was das Ellipsoid anbelangt, so würde uns dieses, da die Bestimmung seiner Attraktion eine mehr oder minder umständliche Rechnung voraussetzt [2]),

---

[1]) Beim Abschlusse dieser Untersuchung wollen wir bemerken, daß eine zusammenfassende Darstellung der ganzen Frage von A. Forti gegeben worden ist: Teorica elementare delle attrazione delle sfere e dei solidi geometrici che da esse derivano, Pisa 1874.

[2]) Die Theorie des Ellipsoidpotentiales zählt zu denjenigen Theorien, deren Geschichte ein besonders anziehendes Studium gewährt. So besitzen wir denn auch verdienstliche Monographien dieses Gegenstandes von Paraira (Over de methoden ter bepaling van te aantrekkning eener ellipsoide op en willekeurig punt, Amsterdam 1879) und von Grube (Zur Geschichte des Problemes der Anziehung der Ellipsoide, Schleswig, 1. Teil 1883. 2. Teil 1888). Die ersten Stadien behandelt, worauf wir schon S. 368 hinwiesen, auch recht eingehend das Chaslessche Geschichtswerk (S. 160 ff. der Sohnckeschen Uebersetzung); damals war die Art der Untersuchung eine streng synthetische, und wie verwendbar diese in der That ist, darüber hat erst die Folgezeit aufgeklärt. Steiner nämlich (Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche elliptique sur un point extérieur, Journal f. die reine u. angew. Mathem., 12. Band. S. 141 ff.) konstruierte für eine solche unendlich dünne Schale die Anziehungsrichtung äußerst

hier viel zu weit führen. Doch sollen für ein *zweiachsiges Ellipsoid* die bezüglichen Ausdrücke wenigstens angegeben werden. Dasselbe besitzt die große Halbachse a, die kleine (polare) Halbachse b, auch sollen die Abkürzungen

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \vartheta^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

eingeführt sein. Die Dichtigkeit sei eine allerorts konstante, nämlich gleich Θ, der angezogene Punkt habe die Koordinaten a', b', c', natürlich bezogen auf ein Koordi-

---

einfach als Achse des von dem außerhalb gelegenen Punkte an die Ellipsoidfläche gelegten Tangentialkegels, und Picart (Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, Annales de l'école normale, [2] vol. IX. S. 409 ff.) zeigte, wie leicht mit Hilfe dieses Korollares die analytischen Ausdrücke für die Attraktionskomponenten zu erhalten sind. Will man rechnerisch vorgehen, so geschieht dies wohl am einfachsten, wenn man mit Züge das — sowohl zweiachsige als auch dreiachsige — Ellipsoid durch seine Kreisschnitte in unendlich dünne Kreisscheiben zerlegt und für jede derselben das Potential aufsucht (Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoides, Math. Ann., 10. Band. S. 273 ff.). Durch direkte Integration (a. a. O., S. 17 ff.) stellt Schlömilch die Komponenten eines allgemeinen Ellipsoides in der Form einfacher elliptischer Integrale dar, die für den Fall zweier gleicher Achsen in die obigen Ausdrücke A', B', C' übergehen; Helmert aber bedient sich (a. a. O., 2. Band. S. 117 ff.) von vornherein der seinen Zwecken am besten entsprechenden Reihenentwicklung. — Der oben citierte Hilfssatz, welcher die Unterscheidung zwischen äußeren und inneren Punkten fallen zu lassen erlaubt, ward in der angegebenen Form ausgesprochen von Ivory (On the attractions of Homogeneous Ellipsoids, 1809. S. 345 ff.), allein er ist nur eine erweiterte Formulierung eines Satzes, den Maclaurin — anläßlich seiner S. 368 namhaft gemachten Studien über Ebbe und Flut — bereits gefunden und bewiesen hatte (s. Grube, Zur Geschichte des Maclaurinschen Satzes, betreffend die Anziehung konfokaler Ellipsoide, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 14. Band. S. 261 ff.). Maclaurin sprach seinen Satz aus, wie folgt: Die Kräfte, mit denen zwei konfokale Ellipsoide einen und denselben äußeren Punkt anziehen, sind ihren Massen proportional. Indem Lagrange (Addition au mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, Mém. de Berlin, 1775. S. 273 ff.) für die ihm unerwiesen scheinende Behauptung Maclaurins den analytischen Beweis zu finden versuchte, sah er sich erstmalig (s. o.) zu dem Begriffe des Potentiales geführt, den er dann zwei Jahre später bestimmt faßte.

natensystem, dessen Z-Achse mit der kleinen Achse zusammenfällt. Bezeichnet man dann mit A', B', C' die drei den Achsen parallelen Anziehungskomponenten für einen *innerhalb* gelegenen, resp. *der Oberfläche angehörenden Punkt,* so ist

$$A' = 2\pi\Theta\,\frac{a'b}{a}\cdot\frac{\text{arc}\sin e - e\sqrt{1-e^2}}{e^3},$$

$$B' = 4\pi\Theta\,\frac{a^2b'}{b^2}\cdot\frac{\vartheta - \text{arc tang}\,\vartheta}{\vartheta^3},$$

$$C' = 2\pi\Theta\,\frac{bc'}{a}\cdot\frac{\text{arc}\sin e - e\sqrt{1-e^2}}{e^3}.$$

Wenn nun, wie es für die Anwendung der weitaus wichtigere Fall ist, der Punkt, auf welchen die Attraktion des Ellipsoides wirkt, ein *ausserhalb* gelegener ist, so benutzt man das sogar für dreiachsige Ellipsoide geltende *Ivorysche Reduktionstheorem*, d. h. man denkt sich ein dem gegebenen ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid konstruiert, dessen Oberfläche durch den erwähnten Punkt hindurchgeht, und berechnet die Anziehung, welches dieses Hilfsellipsoid nunmehr auf seinen Oberflächenpunkt ausübt. Die Anziehungskomponenten, nach Maßgabe der oben aufgestellten Formeln berechnet, sollen A'', B'', C'' heißen; alsdann bestehen, wenn a_1, b_1, c_1 die Halbachsen des neuen und selbstredend gleichartig homogenen Ellipsoides vorstellen, die nachfolgenden Proportionen:

$$A : A'' = b_1 c_1 : bc,\quad B : B'' = a_1 c_1 : ac,\quad C : C''' = a_1 b_1 : ab.$$

Die weitere Ausführung des merkwürdigen, der analytischen Mechanik unausgesetzt neuen Untersuchungsstoff zuführenden Problemes gehört nicht mehr hierher [1]).

[1]) Es war hier angenommen worden, daß das Ellipsoid, dessen Anziehung man bestimmen wollte, ein homogenes sei. Unbedingt notwendig für die Ausführbarkeit der vorgeschriebenen Rechnungen ist diese Voraussetzung jedoch nicht, vielmehr kann man eine Erweiterung des Ivoryschen Satzes, wie Schlömilch (a. a. O., S. 33 ff.) darthat, auch dann noch ableiten, wenn die Dichte des anziehen-

Das Potential der ruhenden Erde. Wir sehen fürs erste von der Umdrehung der Erde um ihre Achse ab. Dann wird ein der Erdoberfläche angehöriger Massenpunkt durch keine andere Kraft als durch die Schwerkraft beeinflußt, wir haben es ausschließlich mit dem Potentiale der Schwere zu thun. Offenbar gibt es zweifach unendlich viele Punkte, für welche das Gravitationspotential V einen bestimmten Wert besitzt; alle diese Punkte erfüllen eine gewisse Fläche, für die es nunmehr eines besonderen Namens bedarf. Wir definieren demnach[1]:

Jede Ortsfläche gleichen Schwerepotentiales, welche somit durch die Gleichung $V = Konst.$ charakterisiert ist, soll den Namen Niveau- oder Gleichgewichtsfläche führen.

Durch eine sehr einfache analytisch-geometrische Betrachtung, welche wir zunächst deshalb nicht durchführen wollen, weil wir gleich nachher unter verallgemeinertem Gesichtspunkte auf sie zurückzukommen haben werden[2], beweist man den wichtigen Lehrsatz:

---

den Ellipsoides nach ähnlichen und ähnlich liegenden Schichten variiert. Es verhilft hierzu der sogenannte *diskontinuierliche Faktor* von Lejeune Dirichlet, einer der geistvollsten Kunstgriffe, um welche die höhere Analysis in diesem Jahrhundert bereichert worden ist (s. G. F. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, Leipzig 1871. S. 564 ff.). Man multipliziert nämlich das mehrfache Integral, dessen unmittelbare Auswertung ein Ding der Unmöglichkeit wäre, mit einer Größe, die sich in Form eines Doppelintegrales darstellt und nur für alle von der Ellipsoidfläche umschlossenen Punkte endlich, für alle übrigen Raumpunkte aber Null ist. Thatsächlich ward also an dem Ausdrucke selbst nichts geändert, aber man hat jetzt den Vorteil erlangt, durch den ganzen Raum hindurch, also von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren zu können, und dadurch sind die bisher unzugänglichen Integrale der Darstellung in geschlossener Form zugänglich gemacht worden.

[1] Der Ausdruck „Niveaufläche“ sowie die nahe verwandten Ausdrücke „Niveaulinie“ und „Niveauschicht“ (Körperteil zwischen zwei unendlich benachbarten Niveauflächen) müssen nach Helmert (a. a. O., 2. Band. S. 10) als das geistige Eigentum Clairauts angesehen werden, der von denselben zuerst in seiner uns bekannten „Figure de la terre“ (S. 40) Gebrauch machte.

[2] Einen einfachen Beweis gibt u. a. Duhamels „Lehrbuch der reinen Mechanik“ (deutsch von W. Wagner, 1. Teil, Braunschweig 1853. S. 168).

Die Schwererichtung fällt allenthalben mit einer Normalen jener Niveaufläche zusammen, auf welcher der Punkt, zu dem das Lot gezogen werden soll, gelegen ist.

Einigermaßen modifiziert werden unsere Definition sowie der an sie sich anschließende Satz durch den Umstand, daß die Erde nicht stille steht, sondern mit gleichförmiger Geschwindigkeit[1]) um ihre Achse rotiert. Es ist mithin auch zu untersuchen, ob der Begriff des Potentiales, den wir bisher nur für Anziehungskräfte kennen gelernt haben, auch einer die Zentrifugalkraft mit einbegreifenden Erweiterung fähig ist[2]).

Niveaufläche und Schwererichtung auf einem sich drehenden Körper. Der Punkt, dessen Koordinaten x, y, z sind, ist zugleich Sitz des Massenteilchens dm, welches als Bestandteil eines ausgedehnten, eine diskrete oder unendliche Anzahl solcher Massenteilchen umfassenden Körpers zu betrachten ist. Dieser Körper befindet sich in Bewegung; die Art dieser Bewegung soll sofort näher bestimmt werden. Wie sie aber auch sei, so kann man x, y, z als Funktionen der Zeit t auffassen und, wenn der Punkt in unendlich kleiner Zeit eine ebensolche Ortsveränderung erfahren hat, die so entstandene Strecke auf die Richtungen der drei Koordinatenachsen projizieren. Sind δx, δy, δz, d. h. die sogenannten *Variationen* von x, y, z, die entsprechenden Projektionen, so besteht für die Bewegung des Körpers die unter dem Namen *Prinzip von D'Alembert* bekannte Gleichung[3]):

---

[1]) Die Frage, mit welchem Rechte von Gleichförmigkeit gesprochen werden dürfe, erörtert später am passenden Orte Abschnitt VII des dritten Kapitels.

[2]) Von hier an bleiben unsere Darlegungen im engsten Kontakte mit denjenigen Helmerts (a. a. O., 2. Band. S. 1 ff.).

[3]) Dieses Prinzip, mit dessen Hilfe alle Aufgaben der Bewegungslehre oder *Dynamik* sich auf solche der Gleichgewichtslehre oder *Statik* zurückführen lassen, ist nach Herm. Klein (Die Prinzipien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt, Leipzig 1872. S. 34 ff.) bereits von Newton und Johann Bernoulli sozusagen geahnt und im Einzelfalle unbewußt angewendet, ja von Fontaine schon ganz bestimmt antizipiert worden. Den Charakter

$$\Sigma\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x\,dm+\left(Y-\frac{\delta^2 y}{dt^2}\right)\delta y\,dm\right.$$
$$\left.+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\,dm\right]=0.$$

Y, Z sind die nach den drei Achsen genommenen
nponenten der Resultante, in welcher man sich sämt-
e das Atom dm angreifenden Einzelkräfte vereinigt
ken kann.

Die Koordinate z fällt in die Richtung der Um-
hungsachse und bleibt demgemäß von der Rotation
kommen unberührt. Anders ist es für x und y, denn wenn
wieder in der uns bekannten Weise zu Polarkoordinaten
wenden, also $x=\rho\cos\varphi\cos\lambda$, $y=\rho\cos\varphi\sin\lambda$,
$\rho\sin\varphi$ setzen, so hängen x und y, da sie λ in sich
genommen haben, von der mit der Zeit t veränder-
en geographischen Länge ab. Bilden wir die ersten
zweiten Differentialquotienten nach t und setzen die
nkelgeschwindigkeit $\frac{d\lambda}{dt}=w$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt}=-\rho\cos\varphi\sin\lambda w,\ \frac{dy}{dt}=\rho\cos\varphi\cos\lambda w,\ \frac{dz}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\rho\cos\varphi\cos\lambda w^2=-xw^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\rho\cos\varphi\sin\lambda w^2=-yw^2,\ \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

n sind nach D'Alembert die oben in den runden

---

s feststehenden Satzes, der ein für allemal jede besondere Auf-
e aus sich heraus zu behandeln gestattet, hat dem Prinzipe
ch eben erst D'Alembert verliehen (Traité de dynamique,
is 1743. S. 49). Alle Bewegungsimpulse $a, b, c\ldots$ zerlegt man
eils in zwei andere, $A, B, C\ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma\ldots$; so zwar, daß,
n nur die Impulse $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ vorhanden wären, das in Frage
mende System materieller Punkte sich in Ruhe befinden würde.
kann aber nur dann eintreten, wenn die Kräfte $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ sich
enseitig im Gleichgewichte halten, und diese Forderung führt,
hematisch eingekleidet, zu der oben angeschriebenen Gleichung.

Klammern stehenden Ausdrücke diejenigen für die *wirksamen Kräfte,* auf welche es allein ankommt, und welche wir bezüglich mit g_x, g_y, g_z bezeichnen wollen; es ist mithin

$$g_x = X + x w^2, \quad g_y = Y + y w^2, \quad g_z = Z.$$

Denken wir uns im Punkte x', y', z', der von x, y, z um R absteht, ein Massenteilchen 1, welches mit dm im Rapporte der Newtonschen Gravitation steht, und beziehen wir die soeben durchgeführten Rechnungen auch auf dieses zweite Atom, so sind wir in die Lage versetzt, den folgenden Satz aufzustellen.

Es existiert eine Funktion W der sechs veränderlichen Grössen x, y, z, x', y', z', welcher die Eigenschaft zukommt, nach x', y', z' differentiiert die drei wirksamen Kräfte g_x, g_y, g_z zu liefern. Wir nennen diese Funktion W das kombinierte Potential von Schwere und Schwungkraft.

Daß W mit der Größe

$$k \int \frac{dm}{R} + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) w^2 \equiv V + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) w^2$$

identisch sei, erhellt sofort, wenn man die drei Ableitungen nach x', y', z' wirklich vornimmt [1]).

Die Niveauflächen und Lotrichtungen. Von der Gleichung $V = Konst.$ haben wir erfahren, daß sie die Gleichgewichtsflächen für den ideellen Fall einer unbewegten Erde kennzeichne. Ebenso können wir jetzt verallgemeinernd sagen:

Jede durch die Gleichung $W = Konst.$ dargestellte Fläche ist eine Niveaufläche der wirklichen, d. h. durch die Zentrifugalkraft nach Grösse und Richtung beeinflussten Schwerkraft. Wir werden das Wort Niveaufläche hinfort stets in diesem den thatsächlichen Verhältnissen angepassten Sinne gebrauchen.

---

[1]) Der Faktor k soll künftig weggelassen werden, da er niemals in eine Rechnung selbst eingeht.

Wenn wir g_x, g_y, g_z als die den Achsen parallelen eiten eines rechtwinkligen Parallelepipedums betrachten, essen Diagonale g_u ist, und wenn α, β, γ die von diesem g_u it den drei Achsenrichtungen gebildeten Winkel darstellen, ist, wie die Projektion der drei homologen Kanten if die Diagonale sofort ersehen läßt,

$$g_u = g_x \cos \alpha + g_y \cos \beta + g_z \cos \gamma.$$

ie drei Richtungskosinus lassen sich nun, wenn wir im inkte x', y', z' mit der Strecke du' genau dieselbe Produr vornehmen, welche wir soeben beim Punkte x, y, z achten, auch resp. durch $\frac{dx'}{du'}, \frac{dy'}{du'}, \frac{dz'}{du'}$, ausdrücken, so ß, wenn für g_x, g_y, g_z ihre bekannten Werte substituiert erden, die Gleichung

$$g_u = \frac{\partial W}{\partial x'} \cdot \frac{dx'}{du'} + \frac{\partial W}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{du'} + \frac{\partial W}{\partial z'} \cdot \frac{dz'}{du'}$$

rauskommt. Dieselbe wird erhalten, wenn man W ch u' differentiiert; es ist $g_u = \frac{\partial W}{\partial u'}$. Aus der Gleichung $' = Konst.$ leitet man aber direkt die weitere Gleichung $\frac{W}{s} = 0$ her, wo ∂s irgend ein der Niveaufläche selbst gehöriges Linienelement bedeutet. Damit aber ist, wenn r die Darstellung von g_u ins Auge fassen, gesagt, daß g_u iter allen Umständen auf ∂s, also überhaupt auf der iveaufläche senkrecht stehen muß:

Die wirklichen Lotrichtungen bilden mit der Niveauiche allerorts rechte Winkel.

Geometrische und mechanische Eigenschafn der Niveauflächen. Eine Anzahl weiterer Eigenhaften der Gleichgewichtsflächen [1]) soll den Gegenstand

---

[1]) Sehr gründlich wird die allgemeine Theorie der Niveauchen abgehandelt in dem schon citierten Werke von Zanotti anco.

unserer weiteren Betrachtung bilden. Dem zuletzt Gesagten zufolge fällt offenbar der normale Abstand irgend zweier benachbarter Flächen dieser Art in die Schwererichtung, in die Richtung von g. Bezeichnen wir das Linienelement dh dieser Richtung mit dem negativen oder positiven Zeichen, je nachdem W zu- oder abnimmt, so ist $g = -\frac{dW}{dh}$; das Produkt gdh kann deshalb für zwei unendlich nahe aneinander gelegene Niveauflächen als konstant gelten. Da g variiert, so muß mithin auch dh variieren, mit anderen Worten[1]):

Niveauflächen sind im allgemeinen keine Parallelflächen.

Ferner läßt sich zeigen, daß der Funktion W in jedem Punkte des Raumes nur ein einziger Wert zukommt. Da $W = V + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) w^2$ ist, so handelt es sich vor allem um den Nachweis dieser Eigenschaft für V. Um den Punkt x', y', z' als gemeinschaftlichen Mittelpunkt denkt man sich eine Schar konzentrischer Kugelflächen konstruiert, ein vom Zentrum als Spitze ausgehender Rotationskegel schneidet aus der Einheitsfläche ein unendlich kleines Flächenstück ds aus, und es ist dann das Stück des Kegels zwischen den mit den Radien e und $(e + de)$ beschriebenen Kugelflächen $= e^2 d\sigma\, de$, die Masse dieses Kegelstumpfes ist, wenn man unter Θ die Dichtigkeit versteht, $= \Theta e^2 d\sigma\, de$ und sonach unser obiges $V = \iint \Theta e\, d\sigma\, de$. Dies ist nun, da die Summe aller $d\sigma$ die Oberfläche der Einheitskugel liefert, ein bestimmter, eindeutiger, positiver Wert, und da für die Quadratsumme $\frac{1}{2}(x'^2 w^2 + y'^2 w^2)$ dasselbe gilt, so sind wir zu dem Satze gelangt[2]):

[1]) Parallelflächen entstehen, wenn man zu jedem Punkte irgend einer Fläche die Normale gezogen und auf jeder Normale in gleichem Sinne — nach innen oder außen — eine konstante Strecke abgetragen denkt. Das einfachste zur Hand liegende Beispiel bieten uns konzentrische Kugelflächen dar.

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 12.

Durch einen bestimmten Punkt des Raumes geht stets und nur diese einzige Niveaufläche hindurch, zwei e Flächen können sich hiernach weder schneiden noch ren.

Irgendwelche Unterbrechungen kann eine Niveaue nicht erfahren. Denn wenn wir von x', y', z' nur um nendlich kleine Strecke [1] $\sqrt{2x'\,dx' + 2y'\,dy' + 2z'\,dz'}$ m nächst anliegenden Punkte $x' + dx', y' + dy', z' + dz'$ chreiten, so haben wir W in den Ausdruck

$$= W + \frac{\partial W}{\partial x'} dx' + \frac{\partial W}{\partial y'} dy' + \frac{\partial W}{\partial z'} dz' \equiv W + \Delta$$

geführt; die partiellen Differentialquotienten sind end- eine endliche Größe gibt, mit einer unendlich kleinen pliziert, ein unendlich kleines Produkt, es ist also Δ gleicher Art und W' nur unendlich wenig von W hieden, d. h.:

Jede Niveaufläche ist eine stetige, Unterbrechungen ihrer inuität sind undenkbar.

Die Schwerkraft hat im allgemeinen in jedem Punkte bestimmte, von Punkt zu Punkt wechselnde Rich- [2]); ein Gleiches muß demnach für das Flächenelement n, auf welchem die Schwererichtung normal steht, es folgt daraus die weitere wichtige Eigenschaft:

---

[1]) Die Größen dx'^2, dy'^2, dz'^2 sind, als Unendlichkleine der n Ordnung, unter dem Wurzelzeichen von vornherein weg- en worden.

[2]) Die Prüfung der drei Differentialquotienten, von deren halben stetiger Aenderung die analoge Aenderung der Schwere- ng, wie wir sahen, sich abhängig zeigt, hat in mustergiltiger Lejeune Dirichlet vorgenommen (s. dessen Vorlesungen die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung nden Kräfte, herausgeg. von Grube, Leipzig 1876. S. 11 ff.). lort wird gezeigt, daß für die zweiten Differentialquotienten edingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = -4\pi\Theta$$

in unserem Falle $= -4\pi\Theta + 2w^2$) besteht.

Eine Gleichgewichtsfläche im allgemeinen ist stetig gebogen, Spitzen, Rückkehrpunkte, Kanten mangeln ihr durchaus. Sie kann folglich auch nur eines von zweien, nämlich nur geschlossen oder unendlich ausgedehnt sein.

Die Stetigkeit, welche wir aus dem Verhalten der ersten Differentialquotienten erschlossen, trifft nicht mehr zu für die zweiten. Vom mathematischen Standpunkte aus sind die bezüglichen Untersuchungen, wie sie hauptsächlich von Bruns[1]) angestellt wurden, vom höchsten Interesse. Das *Krümmungsmass* einer Niveaufläche kann, da es von den zweiten Differentialquotienten abhängig ist, starken Unstetigkeiten unterworfen sein.

Die einzelnen aufeinanderfolgenden Niveauflächen ändern, da sie ja (s. o.) keine Parallelflächen sind, unaufhörlich ihre Lage, und ein Gleiches thun die zugehörigen Lotrichtungen. Dies ist nur dann möglich, wenn wir uns die Beziehungen zwischen Gleichgewichtsflächen und Schwererichtungen folgendermaßen zurechtlegen:

Die augenblicklichen gradlinigen Lotrichtungen sind die Tangenten doppelt gekrümmter Kurven, von denen jede auf sämtlichen Individuen einer bestimmten Schar von Niveauflächen senkrecht steht.

Diese *Kraft-* oder *Lotlinien* sind[2]) stetig gebogene krumme Linien, das Maß der Krümmung jedoch ist auch hier ein unstetiges, und die Lage der Schmiegungsebene kann sich, wenn der die Kurve beschreibende Punkt nur um unendlich wenig fortschreitet, unter Umständen um endliche Beträge ändern.

Hiermit haben wir von den Niveauflächen im allgemeinen genug erfahren, um die uns zunächst interessierenden Anwendungen der Theorie in Betracht ziehen zu können. Dies soll im nächsten Abschnitte geschehen.

---

[1]) Bruns, Ueber einen Satz der Potentialtheorie, Journ. f. d. reine und angew. Mathem., 81. Band. S. 349 ff.

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 44 ff.

[X]II. Wahre Erdgestalt; Geoid und Referenzellipsoid.

Die Niveauflächen der Erde. Die einzigen [Kräf]te, welche dauernd einen der Erde angehörigen Punkt [beei]nflussen, sind *Schwerkraft* und *Schwungkraft*. Die [Resu]ltante aus beiden steht auf einer in absoluter Ruhe [befin]dlichen Wasserfläche immer senkrecht und wir dürfen [desh]alb die These aufstellen:

Eine vollkommen ruhige[1]) *Wasserfläche stellt eine Niveau[fläch]e der vereinigten Schwere und Schwungkraft dar und [ist s]omit identisch mit dem, was wir Erdgestalt genannt [habe]n.*

Statt dieses etwas vagen Begriffes der Erdgestalt [empf]iehlt sich eine etwas bestimmtere Terminologie, und [diese] ist denn auch durch Listing[2]) eingeführt worden. [Mit] Rücksicht hierauf können wir sagen[3]):

Irgend eine der unendlich vielen Niveauflächen, welche

---

[1]) Allerdings kann von einem solchen *Mittelwasser* im strengen [Sinne] kaum die Rede sein. Die Gezeiten und die durch das Wehen [der] Winde stetig erzeugten Unebenheiten der Meeresoberfläche [verdecke]n deren wahre Gestalt unaufhörlich. Gleichwohl hat man für [jedes] Meeresbecken einen solchen Normalwasserstand auszumitteln [gesuc]ht, der dann für sämtliche absolute Höhenbestimmungen des [angre]nzenden Festlandes zu Grunde gelegt werden kann und für [die O]stsee beispielsweise durch eine gewisse Uebereinkunft, in diesem [Falle] den *Nullpunkt des Pegels von Swinemünde*, zu fixieren ist.

[2]) Vgl. die schon mehrfach citierte Abhandlung im Jahr[gang] 1873 der „Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göt[tinge]n". Die Arbeit knüpft an an die Gedanken, welche von [Gau]ß anläßlich der hannöverschen Gradmessung (s. o. S. 314) und [von B]essel (Ueber den Einfluß der Unregelmäßigkeit der Figur [der E]rde auf geodätische Arbeiten, Astron. Nachr., 1837, S. 269) aus[gespr]ochen worden waren. Auch bemüht sich Listing, schematisch [die V]erschiedenheit im Verlaufe des Geoides und einer sich ihm [mögl]ichst nah anschmiegenden Ellipsoidfläche zu beschreiben.

[3]) In dieser Form sehen wir die Definition ausgesprochen in [der] Schrift von Bruns (Die Figur der Erde, ein Beitrag zur [europ]äischen Gradmessung, Berlin 1876), welche ungeachtet ihres [gering]en Umfanges zur Klärung dieser Fragen den wichtigsten Bei[trag g]eleistet hat. Das große Werk von Helmert knüpft bei sehr [viele]n Gelegenheiten unmittelbar an die Vorarbeit von Bruns an.

wir als im Inneren unserer Erdrinde verlaufend anzunehmen haben, und deren jede mit gleichem Rechte die Bezeichnung als Geoid[1]) *in Anspruch nehmen kann, ist für uns der wahre Repräsentant der Erdgestalt.*

Es ist hier vorausgesetzt, daß jedes Geoid eine geschlossene, in sich allenthalben zurücklaufende Fläche ist. In der That geht aus unserer allgemeinen Theorie der Gleichgewichtsflächen im vorigen Abschnitte noch weiter hervor, daß jede solche geschlossen sein oder andernfalls nach allen Richtungen hin in die Unendlichkeit verlaufen muß. Letzteres aber ist unmöglich nach alledem, was uns bereits die einzelnen Abschnitte dieses Kapitels hinsichtlich der geometrischen Beschaffenheit des Erdkörpers gelehrt haben.

Aus den bereits angeführten Untersuchungen von Bruns erhellt, daß die Existenz jäher Unterbrechungsstellen in der gleich- oder doch gesetzmäßigen Verteilung der Dichte auf eine ganz eigenartige Verteilung der Niveauflächen hinweist. Kommen jedoch solche Sprünge nicht vor, und wir haben mit Rücksicht auf unser allerdings noch sehr beschränktes Wissen von der Art der Aenderung der Dichte in den mehr zentralen Partien des Erdballes[2]) keinen Grund, dergleichen in größerem Um-

---

[1]) γηοειδής = der Erde ähnlich.

[2]) Diese Frage wird bereits in den mehrfach von uns namhaft gemachten Untersuchungen von Clairaut, Ivory, Legendre, Laplace gestreift. Einer Anregung des letzteren (Mécanique céleste, vol. V. S. 48 ff.) Folge gebend, hat E. Schmidt (Lehrb. d. math. u. phys. Geogr., 1. Band. S. 348 ff.) die Abplattung der internen Niveauflächen sowie der Erdoberfläche selbst unter der Voraussetzung behandelt, daß zwischen Druck p, Dichte Θ und Potential W die Differentialgleichung $dp = \Theta dW$ obwalte. Eine andere Hypothese erschien Lipschitz als die zuverlässigste (Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Inneren der Erde annähernd darstellt, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., 62. Band. S. 1 ff.). Unter α die Abplattung des Erdellipsoides, unter α_i jene Größe für diejenige innere Begrenzungsfläche verstanden, welcher die Dichte Θ_i zugehört, wäre hiernach $\Theta_i = 9{,}45 - 6{,}95 \left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right)^{2{,}39}$. Neuerdings trat dann der berühmte englische Geophysiker G. H. Darwin an das schwierige

e vorauszusetzen, so müssen wir uns von dem Ver- der Gleichgewichtsflächen im Inneren der Erde das nde Bild machen:

Jede Niveaufläche wird von allen denjenigen, die der enseite näher liegen, schalenförmig umschlossen und hliesst ihrerseits wieder unendlich viele andere Niveau-

---

em heran (On the Figure of Equilibrium of a Planet of ogeneous Density, Proceed. of the London Society, vol. XXXVI. 5 ff.). Ein innerer Punkt, der vom Zentrum um ρ absteht, lie Dichte $\Theta = \frac{\rho_0}{3(1-\varkappa)}$ haben, wo ρ_0 eine Konstante, $\varkappa$ aber Verhältnis $\Theta : \Theta_m$ — letzteres ist die mittlere Dichte — dar-. Man sieht, daß die Gleichung für Θ transzendent wird, rer Wert also in jedem Falle nur durch Näherungsmethoden telt werden kann. Würde $\varkappa = \frac{2}{3}$, so erhielte man einfach Druck proportional dem Logarithmus der Dichte. Die neuesten iche auf diesem Gebiete rühren her von Callandreau (Sur nstitution intérieure de la terre, Compt. rend., vol. C. S. 31 ff. 3 ff.; Sur la théorie de la figure de la terre, ibid. vol. C. 24 ff.) und von Stieltjes (Quelques remarques sur les varia- de la densité dans l'intérieur de la terre, Archives Néer- ises, vol. XIX. S. 435 ff., auch separat Amsterdam 1884). Der enannte Forscher glaubt aus seinen Rechnungen den Schluß n zu dürfen, daß, welches Gesetz man auch für die Zunahme Dichtigkeit im Erdinneren aufstelle, stets ein bestimmter Wert , nämlich $\frac{1}{298}$, resultieren müsse. Sehr allgemein geht ltjes zuwege; er setzt nur voraus, daß Θ als eine stetige tion $f(\rho)$ des Abstandes vom Mittelpunkte angenommen wer- dürfe, und sucht dann die zur näheren Bestimmung von f er- rlichen Bedingungen auf. Endlich hat auch Helmert selbst O., 2. Band, S. 478 ff.) einen Beitrag zur Aufklärung dieser ierigen Frage geleistet. Er bedient sich, wie auch sonst, der der Bezugnahme auf bestimmte Hypothesen unabhängigen enentwicklung und stellt sowohl die Dichte als auch die Ab- ung für jede innere Ortsfläche gleicher Dichtigkeit durch en dar, welche nach geraden Potenzen des größten Erdhalb- ers fortschreiten, wobei ihm das Clairautsche Theorem (s. o. 4) wesentliche Dienste erweist. Beachtenswert erscheint es, der von Helmert solchergestalt für die im Erdzentrum herr- de Dichte erschlossene Wert von 11,3 sich sehr wohl zwischen von dem holländischen Mathematiker für die gleiche Größe hneten beiden Grenzen einfügt.

flächen. Die innerste Niveaufläche degeneriert in einen einzigen Punkt.

Es kann sonach von einem *Mittelpunkte* des Geoides in solchem Falle[1]) ganz ebenso gesprochen werden, wie wir früher von einem Mittelpunkte der sphärisch oder sphäroidisch gekrümmten Erde gesprochen haben. Dieser Umstand verhilft uns dazu, die Einsicht in das Wesen des Geoides durch die nachfolgende Definition zu verstärken[2]):

Jede Geoidfläche hat die Eigenschaft, dass ein gleiches Mass von mechanischer Arbeit aufgewendet werden muss, um einen schweren Körper vom Mittelpunkte der Erde aus bis zu irgend einem der unendlich vielen Punkte jener Fläche heranzubringen.

Die Gleichungen des Geoides, seiner Meridiane und Parallele. Die nächste Frage, zu welcher wir, nachdem wir eine einwurfsfreie Definition des Geoides erhalten haben, uns sofort wenden müssen, ist offenbar diese: *Gibt es eine Gleichung von der Form $f(x, y, z) = 0$, welche das Geoid mit mathematischer Schärfe darstellen kann?* Die Antwort auf diese Frage fällt *verneinend* aus.

Ein in diesem Sinne von Bessel (s. o.) gewagter Versuch war nicht geglückt, doch mochte daraus allein noch nicht die Ueberzeugung von der Unthunlichkeit der

---

[1]) Man hat nämlich im anderen Falle den Erdkörper sich als aus einer endlichen Anzahl begrenzter Körper bestehend vorzustellen, in deren Innerem die Dichteverteilung sich kontinuierlich ändert, während beim Durchgange durch eine *Grenz-* oder *Unstetigkeitsfläche* die Aenderung der Dichte mit einemmale einen endlichen Wert — statt des sonst allein zu konstatierenden unendlich kleinen — erhält. Die Art und Weise, wie sich dann die Niveauflächen im Inneren anordnen, wird von der besonderen Lage der einzelnen Dichtigkeitszentren abhängen; für eine gewisse äußere Schicht dagegen wird auch durch das Vorhandensein solcher, den Normalcharakter störender Punkte der schalenförmige Verlauf derselbe bleiben, wie wir ihn zu schildern hatten.

[2]) In diesem Sinne hat anscheinend zuerst Zech den anfänglich etwas schwierig erscheinenden Begriff veranschaulicht (Die europäische Gradmessung, Deutsche Revue, II, 2. S. 341 ff.).

en Sache herzuleiten sein, um so weniger, als es n Villarceau[1]) gelungen zu sein schien, die Niveauen durch Reihen, in denen nur die Längen- und endifferenzen der Beobachtungsstationen vorkamen, harakterisieren. Es ist Bruns' Verdienst gezeigt zu n, daß jedes solche Beginnen illusorisch ist[2]); wir en uns mit der Erkenntnis zufrieden geben, *dass das l eine ganz und gar unregelmässige, den Methoden analytischen Raumgeometrie unzugängliche Fläche ist.*

Dies hindert jedoch nicht, Potentialausdrücke anzun, welche den Meridianen und Parallelen des Geoides rechen. Gesetzt, die Erdachse habe gegen die drei dinatenachsen die Neigungen χ, ψ, ω, und für die lianebenen eines Geoidpunktes seien λ, μ, ν diese kel, dann muß die Gleichung $\cos\lambda\cos\chi + \cos\mu\cos\psi$ $s\,\nu\cos\omega = 0$ gelten, weil die Meridianebenen sämtr Punkte eines geographischen Meridianes der Erd- parallel sein müssen. Die Normale der Fläche muß auch mit der Lotlinie übereinstimmen, weshalb die hung $\cos\lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \cos\mu\frac{\partial W}{\partial y} + \cos\nu\frac{\partial W}{\partial z} = 0$ erfüllt muß. Dies gilt speziell auch für den Punkt, für

[1]) Y. Villarceau, Nouveaux théorèmes sur les attractions s et applications à la détermination de la vraie théorie de e, Journal des mathématiques pures et appliqués, (2) vol. XVIII. ff.; Nouveau mode d'application d'un théorème sur les atns locales à la détermination de la vraie figure de la terre, . rend., vol. LXXVI. S. 851 ff. Auch in den Protokollen der iischen Gradmessungskommission für 1875 ist der französische iom wiederum hierauf zurückgekommen.

[2]) Bruns, Die Figur der Erde, S. 27 ff. Jede Reihendarsteldeckt sich mit der Voraussetzung, daß für ein wenn auch ig kleines, so doch endliches Flächengebiet die Krümmung esetzmäßige sei, und eben zu dieser Annahme sind wir nicht tigt. „Ebensowenig aber," meint Bruns, „wie man ver- wird, das Bild, welches eine geognostische Karte gewährt. nigem Anspruch auf Treue in eine Formel zu zwängen, ebenso- wird man auf ein brauchbares Resultat rechnen dürfen, man es unternimmt, für die Gestalt der Geoide einen Aus- zu suchen, der die wahre Form derselben bis auf Quantivon der Ordnung der Beobachtungsfehler angibt."

den die Meridianlinie zu finden ist, so daß mithin diese Linie im Durchschnitte der beiden durch die Gleichungen [1])

$$\begin{vmatrix} \cos\chi & \cos\psi & \cos\omega \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \end{vmatrix} = 0; \quad W = W_0$$

dargestellten Flächen zu suchen ist. Die Gleichungen eines Paralleles von der geographischen Breite φ sind die nachstehenden:

$$\sin\varphi = \cos\chi\,\frac{\partial W}{\partial x} + \cos\psi\,\frac{\partial W}{\partial y} + \cos\omega\,\frac{\partial W}{\partial z}; \quad W = W_0.$$

Entwicklung des Potentiales nach Kugelfunktionen. Wenn es sich um die angenäherte Berechnung des Potentiales W in praktischen Fällen handelt, so hat die *Entwicklung nach Kugelfunktionen* [2]) einzutreten.

---

[1]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 47 ff. Es ist hier von einem Satze der Algebra ausgegangen worden, der sich folgendermaßen aussprechen läßt: Damit n homogene, d. h. kein von Unbekannten freies Glied enthaltende Gleichungen des ersten Grades gleichzeitig erfüllt seien, ist es notwendige und hinreichende Vorbedingung, daß die n-reihige *Determinante* des Gleichungssystemes identisch gleich Null sei. Als unbekannte Größen haben in unserem obigen Falle die drei Richtungskosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ zu gelten. Die als Indizes den Termen der untersten Zeile beigesetzten Nullen sollen anzeigen, daß nach vollzogener Differentiation die allgemeinen Koordinaten durch diejenigen ersetzt werden sollen, welche den Punkt bestimmen, durch welchen der Meridian hindurchzugehen hat.

[2]) Diese analytischen Gebilde begegnen uns zuerst in den oben erwähnten Arbeiten von Laplace und Legendre über die Anziehung der Sphäroide, weshalb einzelne Autoren dieselben wohl auch heute noch als *Legendresche Koeffizienten* bezeichnen. Ihre moderne Theorie begründete Dirichlet in seinem berühmten Aufsatze „Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données“ (Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., 17. Band. S. 35 ff.), worin zuerst der Nachweis erbracht ward, daß eine solche Entwicklung nur auf eine einzige Art erfolgen könne. Die beste

geben dem Bruche $\frac{1}{R} = R^{-1} = [(x-x')^2 + (y-y')^2$ $-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ zunächst die Form $(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\Phi)^{-\frac{1}{2}}$, nithin ρ und ρ' resp. die Entfernungen der beiden te x, y, z und x', y', z' vom Anfangspunkte des mes bedeuten, die miteinander den Winkel Φ einßen. Vorausgesetzt, daß $\rho' > \rho$, findet man [1])

---

ntdarstellung ist Heines „Handbuch der Kugelfunktionen" 1861). — Wo in irgend einem Zweige der Naturwissenschaft variable Größe in der bezeichneten Weise dargestellt wird, an die absolute Bürgschaft, Beobachtung und Rechnung zur en Uebereinstimmung bringen zu können, sobald man die herung weit genug treibt, d. h., sobald man auch solche P_n in Rechnung bringt, für welche n hinlänglich groß ist. Mit n Fug durfte deshalb auf dem achten Geographentage betont n, daß von einer Disharmonie zwischen den magnetischen n und der gleichfalls auf den Kugelfunktionen basierenden ßschen Theorie des Erdmagnetismus nicht im Ernste die Rede könne, denn wenn sich eine Diskordanz zeige, so beweise dies lich das eine, daß sich der Rechner mit einem zu kleinen n begnügt habe.

[1]) Die einfachste Art der Ableitung ist die folgende (Helmert, O., 2. Band. S. 50 ff.). Wir setzen $\cos\Phi = \frac{1}{2}\left(e^{\Phi i} + e^{-\Phi i}\right)$ bekommen dadurch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho'}\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}e^{\Phi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}e^{-\Phi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

multipliziert man diese beiden Klammerausdrücke miteinan- so ergibt sich sofort der oben stehende Wert für ρ^{-1}. Nun- kann man zweimal zum binomischen Lehrsatze seine Zuflucht en, welchem zufolge, für $a < 1$, allgemein und ohne jede Einnkung betreffs des Wertes von m,

$$(1+a)^m = 1 + ma + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3 + \ldots$$

So wird $\frac{1}{R}$ gleich dem Produkte

$$\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)e^{\Phi i} + \frac{3}{8}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 e^{2\Phi i} + \frac{15}{16}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^3 e^{3\Phi i} + \frac{35}{128}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^4 e^{4\Phi i} + \ldots\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)e^{-\Phi i} + \frac{3}{8}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 e^{-2\Phi i} + \frac{15}{16}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^3 e^{-3\Phi i} + \frac{35}{128}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^4 e^{-4\Phi i} + \ldots\right).$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho'}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)\cos\Phi + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\Phi\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^3\left(\frac{3}{8}\cos\Phi + \frac{5}{8}\cos 3\Phi\right) + \ldots\right].$$

Die Koeffizienten der einzelnen Potenzen des echten Bruches $\frac{\rho}{\rho'}$ sind Spezialfälle von Kugelfunktionen P_0, P_1, P_2 ... P_n; ersetzt man die Kosinus eines Multiplums von Φ durch die Potenzen des Kosinus vom einfachen Winkel, was leicht angeht, da $\cos 2\Phi = 2\cos^2\Phi - 1$, $\cos 3\Phi = 4\cos^3\Phi - 3\cos\Phi$ u. s. w. ist, so gelangt man zu dem seinen gesetzmäßigen Bau dokumentierenden Ausdrucke:

$$P_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots n}\left[\cos^n\Phi - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\Phi\right.$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\Phi$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.4.6.(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos^{n-6}\Phi + \ldots\right].$$

Es ist somit $\frac{1}{R}$ *in eine konvergente trigonometrische Reihe*

Man rechnet Glied für Glied aus und substituiert für jede Summe von der Form $(e^{K\Phi i} + e^{-K\Phi i})$ den gleichwertigen Ausdruck $2\cos K\Phi$: alsdann ergibt sich die Reihe für $\frac{1}{R}$, so wie wir dieselbe oben angeschrieben haben. K bedeutet hier eine jede ganze Zahl, i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. Dieselbe Entwicklung nach dem binomischen Lehrsatze hätte sich auch durchführen lassen, wenn man gleich anfangs die durch eine einfache Transformation sich ergebende Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho'}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{2\frac{\rho}{\rho'}\cos\Phi}{1 + \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

zum Ausgangspunkte genommen haben würde.

ickelt. Die Konvergenz gilt auch noch für den Fall ρ', $\cos^2\Phi < 1$, während für $\rho = \rho'$, $\cos^2\Phi = 1$ Di-enz, d. h. Unbrauchbarkeit eintritt. Darüber, daß sich so verhalten müsse, informiert eine besondere ersuchung, deren Wiedergabe uns hier zu weit vom ge abführen würde[1]). Aber das wollen wir noch be-ken, daß die Koeffizienten P sich leicht in recht-ligen Koordinaten ausdrücken lassen, denn man hat Gleichungen

$$
{}^2 + x'^2 + y^2 + y'^2 + z^2 + z'^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz' \\
= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\Phi, \\
\cos\Phi = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}.
$$

Berechnung des Niveausphäroides. Wir setzen von uns für den reziproken Wert von R erzielte Reihe ie obige Gleichung der Niveaufläche selbst ein und grieren gliedweise, indem wir, damit die neue Reihe sicher ebenfalls konvergent bleibe, die Annahme nen, daß der von der Erde angezogene und mit ihr rende Punkt x', y', z' sich außerhalb einer die Erde de umschließenden und den Schwerpunkt mit ihr ge-habenden Kugel befinde[2]). So finden wir eine neue ntialgleichung

$$
W = \frac{1}{\rho'}\left[\int dm + \frac{1}{\rho'}\int P_1 \rho\, dm + \frac{1}{\rho'^2}\int P_2 \rho^2 dm \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\rho'^3}\int P_3 \rho^3 dm + \ldots\right] + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\, w^2.
$$

erste der hier auftretenden Integrale ist nichts an-s als die Erdmasse M. Ferner haben wir nach dem, soeben über $\cos\Phi = P_1$ ausgesagt worden ist,

---

[1]) Die detaillierte Beweisführung s. bei Helmert (a. a. O., nd. S. 53 ff.).

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 58 ff.

$$\int P_1 \rho\, dm = \frac{1}{\rho'} \left(\int x x' dm + \int y y' dm + \int z z' dm\right).$$

Die x', y', z' können als konstant vor das Integralzeichen treten. Läßt man nun den Anfangspunkt des Koordinatensystemes mit dem Schwerpunkte zusammenfallen, so ist nach einem bekannten Lehrsatze der theoretischen Mechanik [1])

$$\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0.$$

Ebenso werde für P_2 sein oben ermittelter Wert eingeführt. Geschieht dies und wird zugleich, unter φ, φ', λ, λ' die Breiten und Längen der Punkte x, y, z und x', y', z' verstanden,

$$\cos \Phi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda')$$

gesetzt, so läßt sich das dritte der in der obigen eckigen Klammer stehenden Integrale schreiben, wie folgt:

$$\int P_2 \rho^2 dm = \frac{3}{2}\left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3}\right) \int \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) dm$$

$$+ 3 \sin \varphi' \cos \varphi' \left(\cos \lambda' \int x z\, dm + \sin \lambda' \int y z\, dm\right)$$

$$+ \frac{3}{4} \cos^2 \varphi' \left[\cos 2\lambda' \int (x^2 - y^2)\, dm + \sin 2\lambda' \int x y\, dm\right].$$

Nun lehrt die Mechanik weiter die Existenz von *drei Hauptträgheitsachsen* eines jeden Körpers [2]); durchkreuzen sich dieselben, die unter allen Umständen rechte Winkel miteinander bilden, zugleich im Schwerpunkte dieses Körpers, so wird

$$\int x y\, dm = \int x z\, dm = \int y z\, dm = 0.$$

[1]) Der betreffende Satz (Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870. S. 501 ff.) besagt eigentlich, daß, wenn ξ, η, ζ bei willkürlicher Achsenlage die Koordinaten des Schwerpunktes des mit der Masse M begabten Körpers vorstellen, alsdann

$$\xi M = \int x\, dm, \quad \eta M = \int y\, dm, \quad \zeta M = \int z\, dm$$

sein muß. Da aber unserer Bestimmung zufolge $\xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so ergibt sich, was oben angegeben ist.

[2]) Schell, a. a. O., S. 732 ff.

ier gelten für die drei *Hauptträgheitsmomente* die nach-
enden Relationen:

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \int (x^2 + z^2)\, dm,$$
$$C = \int (x^2 + y^2)\, dm.$$

hen wir Gebrauch von denselben, so ergibt sich in
acherer Gestalt

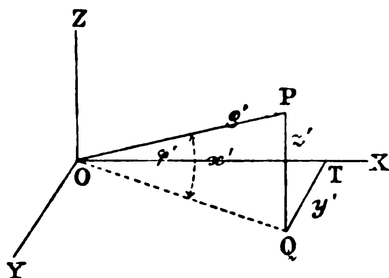
$$\int P_2 \rho^2 dm = \frac{3}{2}\left(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{A+B}{2} - C\right)$$
$$+ \frac{3}{4}(B - A) \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda'.$$

nimmt denn W die neue Form an [1]):

$$\frac{1}{\rho'}\left[M + \frac{1}{2\rho'^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3 \sin^2 \varphi')\right.$$

[1]) Die hier angewendete Umformung für das die Schwung-
repräsentierende Glied erhellt aus *Fig. 85*, wo der Punkt P
seinen Koordinaten x', y', z' auf ein Orthogonalsystem bezogen

Fig. 85.



eint, welches seinen Ursprung in O hat. Es ist $OT = x'$,
$= y'$, $PQ = z'$; zieht man OQ, so ist im rechtwinkligen Dreieck
nach dem pythagoreischen Lehrsatze $\overline{OQ}^2 = x'^2 + y'^2$; da
$\sphericalangle POQ = \varphi'$ und $OP = \rho'$ ist, so hat man auch $x'^2 + y'^2$
$\cos^2 \varphi'$, wie behauptet.

$$+\frac{3}{4\rho'^2}(B-A)\cos^2\varphi'\cos 2\lambda' + \frac{1}{\rho'^3}\int P_3\rho^3 dm + \ldots\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{w^2}{\rho'}\rho'^2\cos^2\varphi'.$$

Es läßt sich nun darthun, daß diese Entwicklung auch für solche Punkte noch zulässig ist, welche innerhalb des ringförmigen Raumes zwischen der Erdoberfläche und der Hilfskugelfläche gelegen sind. Um so mehr gilt dies, wenn wir, wie wir es jetzt im Sinne haben, von der für W gefundenen Reihe nur die in entwickelter Form dargestellten Glieder berücksichtigen, alle Glieder von der Form $\frac{1}{\rho'^q}\int P_q\rho^q dm$, für $q \geq 3$, somit außer acht lassen. Wird der Kürze halber noch

$$K = \frac{1}{M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)$$

gesetzt und wird mit U_1 jener Teil von W bezeichnet, der bei erwähnter Vernachlässigung noch übrig bleibt, wird ferner von der Mitführung der jetzt entbehrlich gewordenen oberen Indizes Abstand genommen, so hat man

$$U_1 = \frac{M}{\rho}\Big[1 + \frac{K}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3(B-A)}{4M\rho^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda$$
$$+\frac{w^2\rho^3}{2M}\cos^2\varphi\Big].$$

Die durch die Gleichung $U_1 =$ Konst. gekennzeichnete Fläche nennen wir ein Niveausphäroid [1]*). Es ist eine geschlossene, sphäroidisch gekrümmte Fläche, welche sich dem Geoid selbst sehr nahe anschmiegt.*

---

[1]) Diese Bezeichnung für eine mit dem Geoid möglichst übereinstimmende algebraisch ausdrückbare Fläche scheint auf englischem Boden entstanden zu sein; Thomson-Tait (a. a. O., 1. Band, 2. Teil. S. 343 ff.) sprechen von einer *harmonischen Sphäroidalfläche*, was mit der in jenem Lande üblichen Ausdrucksweise bezüglich der Entwicklung nach Kugelfunktionen zusammenhängt.

Einige Eigenschaften des Niveausphäroides deduzieren unschwer aus oben stehender Gleichung. Zunächst n wir, daß U_1 sich nicht ändert, wenn wir dem kel φ das negative Zeichen erteilen: *das Niveau-roid besitzt die Aequatorebene als Symmetrieebene.* ier lassen sich Beziehungen zwischen U_1 und der vere g angeben. Zu dem Ende geben wir dem an-genen Punkte r, φ, λ drei unendlich kleine Ver-ebungen; radial wird er um $d\rho$, auf dem Mittags-se der konzentrischen Kugel um $\rho\, d\varphi$ und auf dem hörigen Parallelkreise um $\rho \cos\varphi\, d\lambda$ aus seiner bis-gen Lage herausgerückt. Die hierdurch an U_1 an-achten Aenderungen sind

$$U_1' = \frac{dU_1}{d\rho}, \quad U_1'' = \frac{dU_1}{\rho\, d\varphi}, \quad U_1''' = \frac{dU_1}{\rho \cos\varphi\, d\lambda},$$

es ist weiter (U_1'' und U_1''' sind gegen U_1' sehr klein)

$$\pm\sqrt{U_1'^2 + U_1''^2 + U_1'''^2} = \pm U_1\left(1 + \frac{U_1''^2 + U_1'''^2}{U_1'^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - U_1'\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{U_1''^2 + U_1'''^2}{2\,U_1'^2} + \ldots\right),$$

ei, wie ersichtlich, die binomische Entwicklung an-endet wurde. Die erste Annäherung ergibt $g = - U_1'$ $\frac{dU_1}{d\rho}$ oder

$$\frac{M}{\rho^2}\left[1 + \frac{3K}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{9(B-A)}{4M\rho^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda - \frac{w^2\rho^3}{M}\cos^2\varphi\right].$$

Konstante, welcher U_1 gleich gesetzt ist, soll W_0 en; dann kann offenbar, indem ρ und W_0 ihre Plätze auschen,

$$\frac{M}{W_0}\left[1 + \frac{K}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3(B-A)}{4M\rho^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda + \frac{w^2\rho^2}{2M}\cos^2\varphi\right],$$

und, bei Substituierung dieses Wertes von ρ,

$$g = \frac{W_0^2}{M}\left(1 + \frac{K}{2\rho^2} - \frac{2w^2\rho^3}{M} + \ldots\right)$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{2w^2\rho^3}{M} - \frac{3K}{2\rho^2}\right)\sin^2\varphi + \frac{3(B-A)}{4M\rho^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda + \ldots\right]$$

gesetzt werden. Andererseits wissen wir aus Abschnitt XIX, daß jedenfalls, unter γ und β gewisse Konstante gedacht, $g = \gamma + \beta\sin^2\varphi$ sein muß; wir komparieren die Werte von g und erkennen, daß, da $\cos^2\varphi\cos 2\lambda$ nicht verschwinden, $4M\rho^2$ nicht unendlich groß sein kann, $B - A = 0$, also $B = A$ sein muß. Erinnern wir uns der Bedeutung dieser Buchstaben [1]), so erhalten wir eine neue wichtige Eigenschaft des Niveausphäroides:

Die beiden Hauptträgheitsmomente der Erde, die sich auf die in der Aequatorebene gelegenen Achsen beziehen, sind einander gleich; die geographische Länge verschwindet aus den für U_1 und g ermittelten Ausdrücken, und es ist somit die Rotationsachse zugleich eine Symmetrieachse des Niveausphäroides.

Das Clairautsche Theorem in seiner Verallgemeinerung. Indem wir uns bei der zunächt erreichten Annäherung beruhigen, können wir

$$U_1 = \frac{M}{\rho}\left(1 + \frac{K}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{w^2\rho^3}{2M}\cos^2\varphi\right)$$

setzen. Das durch die Gleichung $U_1 = W_0$ gegebene Niveausphäroid besitzt, wie wir uns soeben vergewisserten, einen wirklichen Aequator, dessen Halbmesser a sein

---

[1]) A, B, C sind freilich nicht in aller Strenge die Hauptträgheitsmomente der Erde, aber doch sehr nahe. Wir haben uns nämlich eine gewisse ideelle Massenverteilung innerhalb des Erdballes konstruiert, von welcher die wirkliche ganz wohl abweichen kann, allein es hat sich bei genauerer Schätzung dieser etwaigen Abweichungen herausgestellt, daß dieselben keineswegs ins Gewicht fallen können.

e; da die für g ermittelte Gleichung auch am Aequator
ı gilt, so ist auch

$$g = \frac{W_0^2}{M}\left(1 + \frac{K}{2a^2} - \frac{2w^2a^3}{M} + \ldots\right)$$
$$\times\left[1 + \left(\frac{2w^2a^3}{M} - \frac{3K}{2a^2}\right)\sin^2\varphi + \ldots\right].$$

er g_a sei die Schwere am Aequator verstanden; ı ist allgemein, wie unser letzter Ausdruck lehrt, $g_a(1 + \mathfrak{B}\sin^2\varphi)$, wobei $\mathfrak{B}$ eine leicht zu berechnende tante Größe bedeutet; ρ aber kann, wofern $\mathfrak{A}$ eine prechende Bedeutung hat, approximativ $= a(1 - \mathfrak{A}\sin^2\varphi)$ tzt werden. Führt man die Berechnung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ı unseren obigen Formeln wirklich aus, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{w^2a^3}{2M} + \frac{3K}{2a^2},\quad \mathfrak{B} = \frac{2w^2a^3}{M} - \frac{3K}{2a^2}.$$

ieren wir, so folgt

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{5}{2}\cdot\frac{w^2a^3}{M} = \frac{5}{2}\cdot a w^2 : \frac{M}{a^2}.$$

$\varphi = 90^0$ wird $\mathfrak{A}$, wenn b die halbe Polarachse des eausphäroides bezeichnet, gleich $\alpha_1 = \frac{a-b}{a}$, wo α_1 Abplattung des Niveausphäroides vorstellt. Ferner $\imath w^2$ die Zentrifugalbeschleunigung am Gleicher, $\frac{M}{a^2}$ dortselbst herrschende Attraktion [1]), und wir haben ch (s. S. 345) die Gleichung erhalten:

$$\textit{attung plus}\ \frac{\textit{Zunahme der Schwerkraft vom Aequator zum Pole}}{\textit{Schwerkraft am Aequator}}$$
$$= \frac{5}{2}\ \textit{mal}\ \frac{\textit{Zentrifugalkraft am Aequator}}{\textit{Schwerkraft am Aequator}}.$$

---

[1]) Es ist nicht zu vergessen, daß der angezogene Punkt ausklich mit der Masseneinheit belegt, und daß auch der Attrakfaktor $k = 1$ gesetzt worden war.

Hiermit ist der oben in Aussicht gestellte strenge Beweis für den Lehrsatz von Clairaut nachgeliefert, und zwar sofort für eine Fläche, welche als eine Verallgemeinerung des gowöhnlichen Sphäroides betrachtet werden darf.

Niveausphäroide höherer Ordnung. Wir erinnern uns, für U_1 sowohl wie für das aus U_1 entwickelte g uns mit den ersten Annäherungen beschieden zu haben. Dies ist jedoch keineswegs erforderlich; man kann vielmehr diese Annäherung durch Hinzunahme neuer Glieder der Kugelfunktionenreihe beliebig weit treiben und die so allmählich entstehenden Flächen der Untersuchung unterstellen, für welche $U_2 = Konst$, $U_3 = Konst.$ u. s. w. die Gleichungen darstellen. Helmert hat die fragliche Untersuchung noch weiter geführt [1]), und aus seinen Erörterungen ziehen wir den Schluß:

Jedes Niveausphäroid irgendwelcher Ordnung ist eine ellipsoidartige gekrümmte Fläche, deren — von α und α_1 nur unerheblich abweichende — Abplattung nach einem erweiterten Analogon des Clairautschen Theoremes sich finden lässt.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Thatsache, daß die Abplattung in jedem Falle nur um geringe Beträge von dem uns bekannten α verschieden ausfällt. Denn damit ist eine für die mathematische Geographie der Zukunft entscheidende Erkenntnis gewonnen, eine Erkenntnis, welche wir, im Anschlusse an Helmerts eigene Worte, in folgendem Satze formulieren wollen [2]):

Die Abweichung irgend eines Niveausphäroides von einem Rotationsellipsoide gleicher Abplattung ist eine so unbedeutende, dass der Gebrauch der Geodäten als gerechtfertigt anerkannt werden muss, das Geoid — abgesehen von gewissen Abweichungen lokalen und kontinentalen Charak-

---

[1]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 91.

[2]) „Das Ellipsoid, welches an Stelle der mathematischen Erdoberfläche als Projektionsfläche dient, nennen wir im allgemeinen ein Referenzellipsoid“ (Helmert, a. a. O., 1. Band. S. 514).

: — *mit einem zweiachsigen, abgeplatteten Ellipsoid wo ht zu identifizieren, so doch in engste Beziehung zu setzen.*
Es kommt also nur noch darauf an, ein solches Elliid zu ermitteln. Wir nennen es einstweilen mit Helrt das *Referenzellipsoid.*

Geoidische Deformationen. Die Aufgabe des :hsten Kapitels wird es sein, nachzuweisen, wie *thathlich* für einen gegebenen Erdort die Ermittlung der mlichen Verschiedenheit zwischen einem Geoidpunkte l dem ihm zugeordneten Punkte des Referenzellipsoides erfolgen hat. Dies ist, in der bekannten Terminologie Philosophie gesprochen, ein *empirisch-analytisches* Verren. Daneben ist aber auch ein *aprioristisch-syntheties* Verfahren angängig, d. h. wir können uns die Defortionen konstruieren, welche aus gewissen Einwirkungen ı ergeben. Das damit gestellte Problem[1]) kann etwa sen Wortlaut erhalten:

Wie gross gestaltet sich die Verbiegung des Geoides enüber dem Sphäroide, wenn an bestimmten Punkten an, r oder unter der dem Geoid äquivalenten Meeresfläche ziehende Massen von bekannter Gestalt, Grösse und Dichte jebracht gedacht werden?

Man sieht aus dieser Formulierung, daß man es sentlich mit einer umfassenden Aufgabe des Attraknskalküls, d. h. also der Potentialtheorie zu thun hat. ein bei willkürlicher Lage der störenden Massen würde Lösung mit sehr großen Schwierigkeiten verknüpft ı, und man bedient sich deswegen des zuerst von lmert[2]) ausgiebig zur Anwendung gebrachten Hilfs-

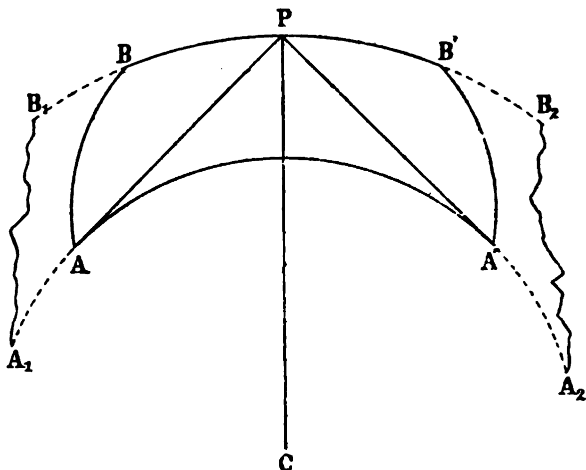
---

[1]) Betrachtungen dieser Art sind vielleicht zuerst von Thos Young (s. dessen auf S. 355 zitierte Studie) angestellt worden; ter bewies Dahlander (Ueber den Einfluß, den die Unebenen der Erdoberfläche auf das Niveau des Meeres üben, Ann. d. s. u. Chem., 117. Band. S. 148 ff.) einen hierher gehörigen Lehr:. Auch Thomson-Tait, Stokes u. a. haben Beiträge geert; im großen Stile aber behandelt die Sache Helmert, in sen großem Werke 242 Seiten des zweiten Bandes (S. 141 ff.) hen Berechnungen gewidmet sind.

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 148 ff.

mittels der *Kondensation*. Wir denken uns zu der Meeresfläche $B_1 B_2$ *(Fig. 86)* eine Parallelfläche $A_1 A_2$ (s. o.) konstruiert, so zwar, daß der Abstand zwischen beiden Flächen den Wert αr erhält, unter r den Radius einer dem Geoide an Volumen gleichen Kugel verstanden. Jedwede nicht schon an sich dieser Hilfsfläche angehörige Masse verschieben wir auf erstere *radial;* sämtliche Massen

Fig. 86.



erscheinen auf der Parallelfläche *kondensiert*. Das wirkliche Potential W geht über in U, so daß $U + T = W$ wird, und die wirkliche Schwerkraft g verwandelt sich in eine theoretische Schwerkraft γ. Der Abstand zwischen der wirklichen und theoretischen Fläche kann auch durch den Ausdruck $\frac{T}{\gamma}$ dargestellt werden [1]).

Bei der numerischen Schätzung des Kondensations-

[1]) Dieser Wert — allerdings im Nenner mit dem Kosinus des Lotablenkungswinkels multipliziert — ist zuerst in der mehrfach zitierten Schrift von Bruns (S. 20) abgeleitet worden.

tes können $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ dls Kugelflächen vom
einsamen Zentrum C betrachtet werden. Um an
n einfachen und verwendbaren Beispiele die Maßregel
t zu illustrieren, ziehen wir [1]) einen Radius CP,
ien $PB = PB'$, legen von P aus an den inneren
s die Berührenden PA und PA' und verbinden A
B, A' mit B' durch Kreisbogen, die gleichen Radius
n und gegen CP konkav gekrümmt sind [2]). Dieses
mlinige Trapez $AA'B'B$ lassen wir um die Achse CP
ren und denken uns den so entstehenden Rotations-
er mit Masse von der Dichte Θ gleichmäßig erfüllt.
beiden Potentiale des Körpers gegenüber dem Punkte P,
sie *vor* und *nach* der Kondensation bestanden, unter-
iden sich, wenn wir noch für PB eine gewisse Wahl
en, um den Betrag Konst. $\pi k \Theta \alpha^2 R^2$. Und ähnlich in
ren Fällen. Natürlich verändert der Prozeß der
densation auch die Größe der Schwerkraft, die Lage
Erdschwerpunktes und die Hauptträgheitsmomente,
kann auch da immer eine Grenze rechnerisch er-
elt werden [3]), über welche die Differenz zwischen
klichkeit und schematischer Vereinfachung nicht hinaus-
n kann.

Im weiteren Verlaufe seiner Untersuchungen ent-
elt Helmert [4]) Formeln für die Beträge der Undu-
nen, welche das Geoid infolge des Vorhandenseins
dwelcher störender Massen in seiner Fläche auf-
: [5]). Sogar den jeweiligen Einfluß eines Kontinentes

---

[1]) An diesem Beispiele erläutert Helmert selbst (a. a. O.,
nd. S. 150 ff.) sein Verfahren.

[2]) Allerdings ist dies nur angenähert richtig; eigentlich sind
und $A'B'$ Stücke einer Kurve vierter Ordnung, die in C einen
elpunkt hat.

[3]) A. a. O., 2. Band. S. 155 ff. S. 161 ff.

[4]) A. a. O., 2. Band. S. 266 ff.

[5]) Wenn man im Sinne der modernen, durch v. Sonklar ins
gerufenen, durch L. Neumann, Penck, Böhm und be-
rs durch Finsterwalder geförderten *Orometrie* die un-
re Körperform eines bestimmten Gebirges, dessen Volumen
Masse bestimmt hat, so kann man nach den Regeln der
tialtheorie auch berechnen, um wie viel durch dieses Ge-

vermag man numerisch innerhalb gewisser Grenzwerte zu bestimmen [1]). Weitere Einzelheiten gehören jedoch weit mehr in das Bereich der *physikalischen* als in dasjenige der *mathematischen* Erdkunde, und so begnügen wir uns damit, den Leser auf das ein unerschöpfliches Repertorium darstellende Helmertsche Werk nachdrücklich hinzuweisen.

XXIII. Rückblick und wichtige Resultate.

Nachdem wir nun einen tieferen Einblick in die dem ersten Augenscheine nach so überaus einfache *Frage nach der wahren Erdgestalt* zu thun in der Lage waren, ist es zum Schlusse des Kapitels sicherlich angezeigt, eine Musterung des Erreichten vorzunehmen. Wir gehen also bis zu den ersten Abschnitten zurück und stellen fest, wie wir uns stufenweise der Wahrheit genähert haben.

---

birge die Geoidfläche von ihrem normalen Verlaufe abgelenkt wird. — Penck (Schwankungen des Meeresspiegels, München 1882) hatte auf die an skandinavischen und grönländischen Küsten gemachten Beobachtungen alter, hoch gelegener Strandlinien die unter allen Umständen geistvolle Theorie begründet, daß ungeheure Massen gefrorenen Wassers während der sogenannten „Eiszeit" der Meeresfläche eine wesentlich von der gegenwärtigen abweichende Gestalt verliehen gehabt hätten. So bedeutend jedoch, wie der gedachte Geograph vermutete, können auch in jener erdgeschichtlichen Periode die geoidischen Deformationen nicht gewesen sein; dies bewiesen exakt an der Hand der Potentialformeln Hergesell (s. Gerlands „Beiträge zur Geophysik", 1. Band. S. 59 ff. S. 115 ff.) und v. Drygalski (Die Geoiddeformationen der Eiszeit, Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin, 22. Band. S. 169 ff.). — Sehr ausführlich hat Zöppritz (Ueber die Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen, Ann. d. Phys. u. Chem., [2] 11. Band. S. 1016 ff.) die durch Sediment- und Deltabildung herbeigeführten Verbiegungen der irdischen Niveaufläche erörtert. — Ohne Kalkul wird man über solche Gestaltsveränderungen nicht leicht zu einem sicheren Ergebnisse gelangen; vgl. auch v. Richthofens „Führer für Forschungsreisende" (Berlin 1886. S. 206).

[1]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 313 ff. Eine dem Buche angehängte Karte gibt ein übersichtliches Bild von den beträchtlichen Hebungen, welche das Geoid am Rande und unterhalb der großen Festländer erfährt.

Die einzelnen Entwicklungsstufen der Lehre der Erdgestalt. Die bloße sinnliche Wahrnehmung uns in der Erde eine *flache Scheibe* erkennen, welche ;s ihrer Peripherie mit dem eine gedrückte Kuppel tellenden Himmelsgewölbe zusammenhängt. So pri- v dieser Standpunkt auch war, so vermochten wir ı von ihm aus, indem wir nur die scheinbare Himmels- el an die Stelle des Himmelsgewölbes treten ließen, sehr große Anzahl sphärischer Aufgaben zu lösen. h war der Standpunkt nur so lange haltbar, als der bachter unverwandt den nämlichen Platz behauptete; ı bei geringerer Ortsveränderung schon stellte es sich ıus, daß die Erdoberfläche *gekrümmt* ist, und es kam mehr nur darauf an, die *Art dieser Krümmung* richtig bestimmen. Planmäßige, mit Messungen am Himmel auf der Erde verknüpfte Wanderungen ließen er- ın, daß diese Krümmung eine *allenthalben gleich- ıige*, eine *sphärische* ist, und wir lernten somit die e als eine in der Mitte der Himmelskugel *frei schwe- le Kugel* kennen und bestimmten auf verschiedene isen deren Durchmesser. Allein sofort tauchte auch Verdacht auf, daß die hinsichtlich der allerorts gleich- ßigen Krümmung der Erdoberfläche gesammelten Er- ungen zwar qualitativ, nicht jedoch quantitativ durchaus ässig gewesen seien; Gradmessungen und physikalische bachtungen legten vielmehr die Vermutung nahe, daß Figur der Erde in Wirklichkeit die eines *Ellipsoides* Noch währte fast fünfzig Jahre lang der Federkrieg chen denjenigen, welche das Erdellipsoid als ein *ver- ertes*, und denjenigen, welche es als ein *abgeplattetes* esehen wissen wollten, allein seit der Mitte des vorigen rhunderts kann auch dieser Streit als endgiltig zu sten der letzteren Ansicht entschieden betrachtet wer- , und es konzentrierte sich die weitere Anstrengung Geodäten und Geophysiker darauf, für die *Abplattung Erdsphäroides* einen möglichst genauen Wert zu er- eln. Alle sonstigen ellipsoidischen Hypothesen, wie . die, daß die Erde thatsächlich ein *dreiachsiges psoid* sei u. s. w., wurden wieder verlassen, weil auch

sie nicht imstande waren, die Beobachtungsresultate schärfer darzustellen, als dies bereits für ein abgeplattetes zweiachsiges, d. h. durch Rotation entstandenes Ellipsoid gelungen war.

Gleichwohl erwuchs bei weiterem Vordringen allmählich die Notwendigkeit, auch an dieser bisher für unwandelbar erkannten Annahme eine gewisse Korrektion anzubringen. Bis vor kurzem war man allseitig der Meinung gewesen, es müsse sich eine gleiche Abplattung finden lassen, einerlei ob man dieselbe durch *Gradmessungen* oder durch *Beobachtungen am Sekundenpendel* bestimme, wenn nur jede einzelne Messung mit aller Präzision vorgenommen und bei der Kombination verschiedener Messungen nach den strengen Vorschriften der Ausgleichungsrechnung vorgegangen worden sei. Hauptsächlich durch das Verdienst Philipp Fischers kam man von dieser Anschauung vollständig zurück, doch wurde erst viel später durch die Arbeiten von Stokes, Listing, Bruns und Helmert, in deren Fußstapfen seitdem auch einzelne jüngere Forscher getreten sind, die von Fischer nachgewiesene Lücke in positivem Sinne ausgefüllt. Man überzeugte sich nämlich, daß der Erdoberfläche, wie sie sich im Spiegel des wellenfreien Meeres darstellt, *überhaupt keine exakt geometrische Fläche* entspricht, daß vielmehr das sogenannte *Geoid* infolge der überall unregelmäßigen Massenverteilung an der Außenseite und in den ihr benachbarten Partien der Erdrinde eine *zwar stetig*, sonst aber *durchaus unregelmässig gekrümmte Fläche* ist, der jedoch allerdings der ellipsoidische Charakter zugesprochen werden muß. So illusorisch es wäre, nach einer dieser Fläche in gewöhnlicher Weise adäquaten *Koordinatengleichung* suchen zu wollen, so kann man die *Gleichung des Geoides, resp. jeder Niveaufläche, die stets auf der durch die Zentrifugalkraft alterierten Lotrichtung senkrecht steht,* doch immer mit Beziehung gewisser mechanischer Ueberlegungen anschreiben, und entwickelt man in Reihen, bleibt aber bei einem gewissen Gliede der Entwicklung stehen, so hat man die Gleichung eines *Niveausphäroides* erhalten, einer Fläche, welche mit dem Geoide

rseits und mit einem Rotationsellipsoide andererseits nahe übereinstimmt. Wennschon also das, was *Erdgestalt* nannten, strenge genommen nur im Geoide en korrekten Ausdruck findet, so wird doch für die is der Geodäsie und mathematischen Geographie das plattete Sphäroid nach wie vor als die Erdoberfläche gelten haben. Zugleich aber tritt die Notwendigkeit or, die wirklich obwaltenden geometrischen Beungen des Geoides zu dem seine Stelle vertretenden *renzellipsoide* für den ganzen Umkreis der Erde ausitteln, und damit ist der höheren Geodäsie für die unft eine ebenso umfassende und verwickelte als in n Ergebnissen dankbare Aufgabe gestellt.

Punktweise Bestimmung des Geoides nach ns. Einen betretbaren und sicher zum Ziele führen- Weg hat Bruns[1]) angegeben. Er thut dar, daß e der Methoden, durch deren ausschließliche Andung man früher die Figur der Erde zu bestimmen n konnte, für sich allein dies zu leisten fähig sei, vielmehr einzig und allein von einer *Verbindung nomischer, feldmesserischer und geophysikalischer Arn* solches erhofft werden dürfe. Wir werden jede er drei Kategorien trotzdem, um ihr Wesen klarzuen, einer besonderen Betrachtung zu unterziehen haben.

I. Astronomisch-trigonometrische Messung. eien *(Fig. 87)* P und P_1 zwei Punkte des Geoides[2]), h dessen Schwerpunkt S die Rotationsachse RR' hinhgeht. LL' und L_1L_1' seien die gekrümmten Lotn dieser Punkte, PZ und P_1Z_1 deren gradlinige genten, Z und Z_1 somit die Zenitalpunkte von P und P_1.

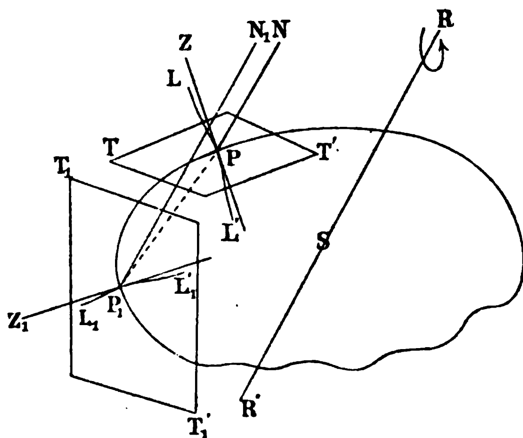
---

[1]) Bruns, a. a. O., S. 25 ff.

[2]) Wenn wir den Umriß der Geoidfläche mit einigen Undulan gezeichnet haben, so soll damit ausgedrückt werden, daß ctisch dem Auftreten solcher Abwechslungen konkaver und exer Flächenbezirke nichts im Wege steht. Doch müßte solches n außergewöhnliche Lotabweichungen signalisiert sein, und da im allgemeinen fehlen, so wird man wenigstens die der nseite näher liegenden Niveauflächen der Erde als stetig nach n gekrümmt sich denken dürfen.

Die der Achse RR' parallel gezogenen Linien PN und $P_1 N_1$ weisen nach dem Nordpole des Himmels hin; $\sphericalangle NPZ$ und $\sphericalangle N_1 P_1 Z_1$ sind die astronomisch zu bestimmenden Komplemente der geographischen Breiten beider Punkte. Die Berührungsebenen TT' und $T_1 T_1'$, welche man resp. in P und P_1 an die Geoidfläche gelegt denken kann, geben uns die scheinbaren Horizonte. Die

Fig. 87.



resp. durch N, P, Z und N_1, P_1, Z_1 gelegten Ebenen sind die astronomischen Meridianebenen von P und P_1. Zieht man noch PP_1, so kann man auch die Größe des Bogens angeben, um welchen die Punkte Z und Z_1 am Himmel auseinander liegen; er ist, wenn alle Punkte in einem Meridian liegen, gleich der algebraischen Summe ($\sphericalangle ZPP_1 + \sphericalangle Z_1 P_1 P - 180^0$). Auch die Azimute sind einer direkten Messung fähig, unter denen resp. P aus P_1 und P_1 aus P gesehen wird, und da endlich der von den Ebenen ZPN und $Z_1 P_1 N_1$ gebildete Winkel nichts anderes ist als die geographische Längendifferenz beider Stationen, so darf gesagt werden: *Polhöhen-, Längen- und Azimutbestimmungen behaupten bei der neuen Auffassung des geo-*

ischen Fundamentalproblemes die gleiche Bedeutung, die en bei der älteren Auffassung zukam. Aber auch die olute Distanz PP_1 will man kennen, und dies kann · durch die *Basismessungen und Triangulierungen* geehen, mit denen wir uns bisher schon vertraut gecht haben.

Wenn derartige Messungen für eine sehr große An-l von Erdorten durchgeführt sind, so haben wir ein n Geoide einbeschriebenes Polyeder [1]) abgegrenzt, von lchem Gestalt und Größe der einzelnen Seitenflächen nso gut bekannt sind, wie die Winkel, welche diese enen mit der Drehungsachse bilden. *Das Geoidpolyeder sonach gegen diese Achse genau orientiert; was der bisige Beobachtungsmodus für sich allein jedoch nicht zu timmen vermag, das ist der Abstand eines jeden Eckıktes von der fraglichen graden Linie.* Wenn man dies h vermittelst der gewöhnlichen Gradmessungen erchen zu können glaubte, so beging man den Trugluß, dem Geoide, ohne die Berechtigung dazu erwiesen haben, ein bestimmtes Umdrehungsellipsoid zu subuieren. Jetzt muß vielmehr die zweite Methode einifen.

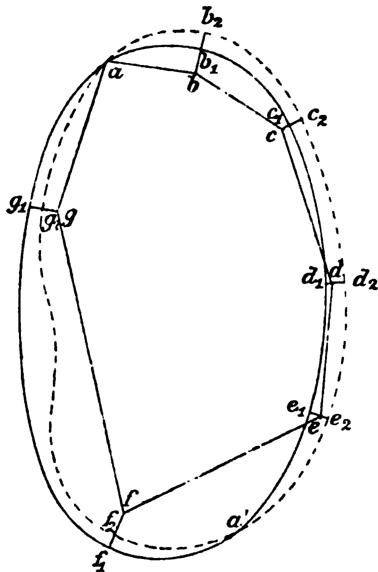
II. Geometrisches Nivellement. Höhendifferenzen gt man, wie im dritten Abschnitte des zweiten Kapitels führlicher dargelegt werden wird, mit der Aussicht größtmögliche Präzision durch das *Nivellement* zu erteln. Wir wissen, daß zwischen dem einer gegebenen

---

[1]) Ueber geometrische Beziehungen an diesem Polyeder vertet sich der erste Teil einer kleinen Schrift von J. Bischoff ber das Geoid, München 1889). Derselbe zeigt ausführlich, daß ı lediglich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie eine Reihe Sätzen über das Vertikalensystem erhalten kann; hat man . drei Orte P, P_1, P_2, konstruiert zu letzterem die Schweretung g_2 und legt durch g_2 und P_1 eine Ebene, welche die idianebene von P längs einer Graden s_1 schneidet, so kann ı ohne jede Bezugnahme auf die Beschaffenheit des Geoides h den Winkel finden, welchen s_1 mit PP_1 einschließt. Handelt ich darum, die Richtigkeit der Formeln am Zahlenbeispiele prüfen, so kann man statt des Geoides selbst den speziellen . des Sphäroides vornehmen.

Niveaufläche anhaftenden Potentialwerte, ihrem Abstande von einer nächstbenachbarten Fläche gleicher Art und der Intensität g der Schwere die Gleichung $dW = -g\,dh$ besteht, und so konnte **Bruns**[1]) den wichtigen Lehrsatz erhärten, daß das bestimmte Integral $\int_A^C g\,dh = W_C - W_A$, also nur von den in den Punkten A und C bestehenden

Fig. 88.



Potentialwerten abhängig ist. *Das Nivellement liefert somit nicht eigentlich Höhenunterschiede, wenn nicht zugleich auf die Schwere Rücksicht genommen wird.* Unter dieser Voraussetzung aber dient diese Operation dazu, den normalen Abstand zweier Niveauflächen zu ermitteln. Und damit ist auch das gestellte Problem selbst gelöst, wie

[1]) **Bruns**, a. a. O., S. 34 ff.; vgl. auch **Helmert**, a. a. O., 2. Band. S. 500 ff.

. *88* darthut. Wir sehen hier einen ebenen Schnitt
eres Gradmessungspolyeders vor uns, in den zufällig
a die Eckpunkte a, b, c, d, e, f, g hineingefallen sein
gen. Durch a gehe das Referenzellipsoid, dessen
nittlinie wir ganz ausgezogen haben, hindurch, und
vird dies außer in a nirgends, oder doch nur in ein-
en Punkten, wie in a', mit dem — in der Figur ge-
chelten — Geoide zusammenfallen. Es kann aber,
wir wissen, astronomisch-trigonometrisch jeder der
punkte auf die Oberfläche des Ellipsoides projiziert
den, d. h. die Distanzen bb_1, cc_1, dd_1, ee_1, ff_1, gg_1
der Berechnung zugänglich. Der Potentialwert, der
gs des ganzen Geoides herrscht, ist bekannt, ebenso
n man sich durch einen jeden Eckpunkt eine beson-
Niveaufläche von bekanntem Potentiale hindurch-
gt denken und deren Abstand vom Geoide in der an-
ebenen Weise finden, d. h. auch die Distanzen bb_2,
dd_2, ee_2, ff_2, gg_2 dürfen als bekannt angenommen
den. Zum Schlusse sind dann in den Summen und
erenzen

$$_2 = bb_2 - bb_1, \quad c_1c_2 = cc_2 - cc_1, \quad d_1d_2 = dd_2 + dd_1,$$
$$e_2 = ee_2 + ee_1, \quad f_1f_2 = ff_1 - ff_2, \quad g_1g_2 = gg_1 - gg_2$$

*eigentlichen geoidischen Deformationen gegenüber dem
erenzellipsoide* in bekannten Zahlwerten ausgedrückt.

III. Schweremessung. Aus dem Vorstehenden er-
t, daß der Bestimmung der lokalen Schwerkraftskon-
te nicht entbehrt werden kann, da eben $g = -dW:dh$
Das beste Hilfsmittel ist und bleibt zu diesem Be-
das *Sekundenpendel;* unentschieden bleibt, ob mit
Zeit vielleicht auch das *Bathometer* von William
mens[1]) diesem Zwecke mit vollem Erfolge wird dienst-
gemacht werden können.

---

[1]) Eine eingehende Beschreibung des Instrumentes, verbunden
einer auf Potentialtheorie sich gründenden Berechnung der
seiner Reaktion auf Schwerewirkungen enthält Dinglers Poly-
nisches Journal (221. Band. S. 43 ff.). Ein Stahlrohr AA' *(Fig. 89)*
nten bei A' durch eine gewellte Stahlplatte BB' abgeschlossen,

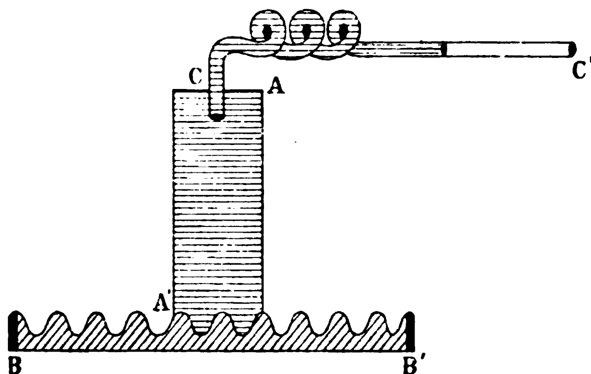
Abgekürzte Methoden. Wenn nun auch nicht daran gezweifelt werden kann, daß das Brunssche Programm, wie wir es soeben auseinandersetzten, die zuverlässigste Lösung des Problemes, *die wahre Gestalt der Erde zu bestimmen*, garantiere, so ist doch auf der anderen Seite auch gewiß, daß der dahin führende Weg ein mühsamer ist und nur in weit abliegender Ferne die Erreichung des Zieles erhoffen läßt. Dieser Umstand forderte dazu auf, sich nach minder weit aussehenden, wenn schon vielleicht des gleichen Grades von Genauigkeit nicht teilhaftigen Verfahrungsweisen umzusehen. Einige solche sollen noch kurz besprochen werden.

So geht Haupt [1]) von der Annahme aus, daß man

---

selbst aber mit Quecksilber gefüllt. Oben bei *A* taucht in die Flüssigkeit ein zunächst vertikales, dann aber im längeren Schenkel horizontal ausgezogenes, spiralig gewundenes und mit gefärbtem

Fig. 89.



Alkohol gefülltes Rohr *CC'* ein. Sobald sich die Erdschwere, d. h. die Anziehungsgröße ändert, thut dies auch — ähnlich wie für den Luftdruck das Dosenaneroid — die Wellplatte *BB'*, und deren Gestaltsänderung spricht sich im Stande der Flüssigkeitssäule in *CC'* aus.

[1]) Den Einfluß von Gebirgen auf das Resultat eines Nivelle-

hältnismäßig kleine Teile der Erdoberfläche immerhin ellipsoidisch gekrümmt voraussetzen dürfe, und diese zelnen Ellipsoide ermittelt er im Einzelfalle mittelst *konformen,* d. h. die kleinsten Flächenstücke ähnlich r „winkeltreu“ abbildenden Projektion. Ein gewisser chteil der Methode liegt darin, daß sie nicht allgemein chführbar, den mit starken Lotstörungen behafteten irken vielmehr aus dem Wege zu gehen genötigt ist. dererseits gedenkt J. Bischoff[1]) aus einer Anzahl r scharfer Mondortbestimmungen auf die geoidischen weichungen zu schließen; die von demselben entkelten Formeln sind durchaus korrekt, doch stellen allerdings der praktischen Anwendung derselben ezu unübersteigbare Schwierigkeiten entgegen. Am sten Aussicht auf Erfolg verspricht wohl das von lmert[2]) in Vorschlag gebrachte *astronomische Nivellett;* auf einem Erdmeridian werden Beobachtungsstationen sehr kurzen Entfernungen voneinander etabliert; dort den die Lotablenkungen gemessen, und so wird die immung des Geoides wenigstens längs seiner Meridiane Fall zu Fall konstruiert. Auf Grund solcher Messungen mochte Helmert[3]) unlängst umfassende Aufschlüsse

ts hat Haupt schon in einer früher erschienenen Abhandlung schätzen gelehrt. Neben älteren Arbeiten v. Baeyers und ipts über Lotablenkungen in Nr. 84 (2) der „Astr. Nachrichten“ hauptsächlich jene umfänglichere Darlegung des letztgenannten däten in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen“ (12. Band. S. 288 ff.) vergleichen.

[1]) J. Bischoff, a. a. O., S. 16 ff. Der Autor selbst ist sich Schwierigkeiten voll bewußt. Im Protokoll der Gradmessungsferenz von Nizza äußert sich Förster (S. 62) folgendermaßen: it en appréciant les intentions de M. Bischoff, nous avons vé que sa proposition d'utiliser des observations azimutales de une pour une détermination plus exacte de la position relative leux endroits de la surface de la Terre, donne à ce problème solution trop étroite et trop peu favorable dans la plupart des nstances.“

[2]) Helmert, a. a. O., 1. Band. S. 564 ff. 2. Band. S. 599.

[3]) Diese kritische Zusammenstellung findet man (deutsch und zösisch) im ersten und zweiten Anhange des soeben erwähnten chtes über die Konferenz von Nizza (besonders paginiert). Ver-

über terrestrische Lotstörungen und teilweise auch über die dafür verantwortlichen Ursachen zu geben.

Die weitere Prüfung dieser Methoden ist zunächst Sache der *Geodäsie.* Die *mathematische Erdkunde* wird jedoch nicht umhin können, von jedem methodischen Fortschritte wie von jeder Erweiterung des thatsächlichen Wissensstandes ungesäumt Akt zu nehmen.

---

wiesen ist dabei auf eine ähnlichem Zweck gewidmete Schrift von Andrae (Problèmes de haute géodésie, extrait de l'ouvrage danois „Den danske Gradmaaling", Kopenhagen 1881).

Zweites Kapitel.

eographische Ortsbestimmung auf der Erde selbst.

nwieweit kommt für Fragen der Ortsbestimmung die Abveichung der Erde von der Kugelgestalt in betracht?

Geoid und Ellipsoid. Die Aufgabe, einen bemten Punkt einer Fläche nach geometrischen Regeln *bestimmen, d. h. von jedem anderen Punkte zu unter-den,* setzt voraus, daß die betreffende Fläche selbst im geometrischen Sinne regelmäßige, durch ein quantiv ausdrückbares Bildungsgesetz charakterisierte sei. wir durch die den Schluss unseres ersten Kapitels enden Betrachtungen erfuhren, ist das *Geoid,* die mit wirklichen Erdgestalt übereinstimmende Fläche, *nicht* diesem Charakter. Glücklicherweise aber sind, wie uns gleichfalls zu überzeugen Gelegenheit hatten, die idischen Abweichungen vom Referenzellipsoide so ge-, daß das uns nunmehr beschäftigende Problem von n nicht im geringsten beeinflußt werden kann. Wir en vielmehr das Recht, die Erde als ein Umdrehungsosoid von bekannten Abmessungen zu betrachten und behandeln.

Begriff der Parallaxe. Schon früher (S. 319) davon die Rede, daß der Begriff des Horizontes sich gewisse Modifikation gefallen lassen muß, wenn man der Kugel zum Ellipsoide übergeht. Solange beide

Körper sich nur wenig voneinander unterscheiden, wird diese Aenderung nicht viel auf sich haben, wenn der Himmelskörper, dessen Stellung zum Horizonte in Frage kommt, eine hinlänglich große Entfernung besitzt. Da nun die Ortsbestimmung wesentlich dadurch bedingt ist, daß man die Position eines Punktes der Himmelskugel möglichst scharf festlegt, so kann immerhin, wenn der betreffende Punkt der Erde verhältnismäßig nahe steht, die Verschiedenheit des Horizontes auf einer sphärischen und auf einer sphäroidischen Erde sich bis zu einem gewissen Grade geltend machen, und es empfiehlt sich jedenfalls, sich über die Größe eines solchen Einflusses ein Urteil zu bilden. Hierzu verhilft die geometrische Erörterung der Parallaxe [1]).

Als *Parallaxe* oder *parallaktischen Winkel eines Punktes S im Weltraume* bezeichnen wir denjenigen Winkel, unter welchem einem im fraglichen Punkte befindlichen Beobachter *ein bestimmter Halbmesser der Erde* erscheint. Aus dieser Definition erhellt, dass die Parallaxe eine zunächst noch schwankende Größe ist. Um eine gewisse Bestimmtheit herbeizuführen, setzen wir fest, daß stets derjenige Halbmesser gemeint sein soll, welcher den Beobachtungspunkt *A* mit dem Mittelpunkte verbindet. Die einer beliebigen Höhe des Punktes *S* über dem Horizonte von *A* entsprechende, von dieser Höhe also abhängige Parallaxe wird deshalb die *Höhenparallaxe*, die einer Höhe Null entsprechende Parallaxe, welche nunmehr eine ganz bestimmt definierte Größe ist, wird *Horizontalparallaxe* genannt.

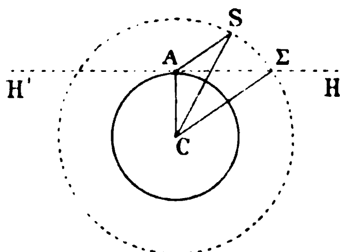
Die Parallaxe auf der Erdkugel. In *Fig. 90* bedeute der innere der beiden um das gemeinsame Zentrum *C* beschriebenen Kreise einen Durchschnitt der Erd-, der äußere einen solchen der Himmelskugel; *A* sei ein Punkt

---

[1]) Das Wort παράλλαξις bedeutet seinem ursprünglichen Sinne nach einen *Richtungsunterschied.* Als astronomischer Begriff scheint die Parallaxe zuerst durch Hipparch (s. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 174) eingeführt worden zu sein.

Erdoberfläche, HH' sein (scheinbarer) Horizont. In tehe ein Himmelskörper; ziehen wir AS und CS, so $\sphericalangle ASC = p'$ die Höhenparallaxe von S. Die Linie *l* durchschneidet die Himmelskugel in Σ; wird noch gezogen, so ist $\sphericalangle A\Sigma C = p$ die Horizontalparallaxe

Fig. 90.



Punktes Σ. Um eine analytische Beziehung zu er-en, setzen wir die Erddistanz $SC = \Sigma C$ — die wir äufig noch mit dem Radius der Himmelskugel [1]) zu tifizieren haben — gleich ρ, den Höhenwinkel $SA\Sigma$ ch h, und wenn sonach r wieder, wie gewöhnlich, den halbmesser bedeutet, so haben wir aus den Dreiecken S und $CA\Sigma$

$$\rho : r = \sin (90^0 + h) : \sin p'; \ \sin p' = \frac{r \cos h}{\rho}, \ \sin p = \frac{r}{\rho}.$$

cos h immer ein echter Bruch, für $h = 0^0$ am größten, $h = 90^0$ aber selbst gleich Null ist, so haben wir folgenden Satz erhalten:

Auf der sphärischen Erde bekommt die Parallaxe ihren

---

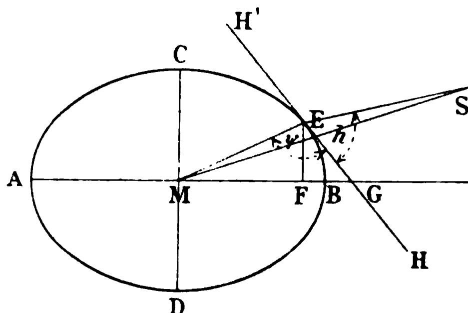
[1]) Den Halbmesser der scheinbaren Himmelskugel durften wir origen Kapitel konsequent = 1 setzen. Eben die Parallaxen-mmung wird uns im nächsten Kapitel dahin führen, diese An-ne als eine falsche zu verwerfen; vorläufig aber wollen wir eben durch die hier angeführten Betrachtungen das Recht rn, an der bequemen alten Anschauung noch für das Orts-mmungsproblem festhalten zu dürfen.

grössten Wert als Horizontalparallaxe, während sie für das Zenit den Wert Null annimmt.

Wenn mithin von Parallaxe die Rede ist, so wird darunter, falls nicht besonders etwas anderes bemerkt wird, meist die Horizontalparallaxe verstanden.

Die Parallaxe auf dem Erdsphäroid. In *Fig. 91* sei $ACBD$ eine Meridianellipse, M der Erdmittelpunkt, $AB = 2a$ die große, $CD = 2b$ die kleine Achse. In E, einem Punkte, der durch seine Abszisse $MF = x_1$ und

Fig. 91.



seine Ordinate $EF = y_1$ gegeben ist, sei die den Horizont des Punktes E repräsentierende Berührungslinie HH' an die Ellipse gelegt. S sei wieder der in der Entfernung $MS = \rho$ vom Erdzentrum befindliche Himmelskörper; dann ist $\sphericalangle ESM = P'$ die gesuchte Höhenparallaxe. $\sphericalangle SEH$ ist wiederum $= h$, $\sphericalangle HEM$ werde $= \psi$ gesetzt, dann hat man, ähnlich wie oben,

$$\rho : ME = \sin(h + \psi) : \sin P'; \; \sin P' = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} . \sin(h + \psi)}{\rho}.$$

Im Dreieck MEG, welches dadurch zustande kam, daß EH der verlängerten großen Achse in G begegnete, kennt man $\sphericalangle EMG = \text{arc tang} \frac{y_1}{x_1}$, $\sphericalangle MGE = -\text{arc tang} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, und da aus der Ellipsengleichung (s. S. 299)

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

ergibt, so ist $\sphericalangle MGE = \text{arc tang} \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$; da aber $\psi = -\text{tang}\,(\sphericalangle EMG + \sphericalangle MEG)$ ist, so folgt er

$$\text{tang}\,\psi = -\frac{\text{tang}\,(\sphericalangle EMG) + \text{tang}\,(\sphericalangle MEG)}{1 - \text{tang}\,(\sphericalangle EMG) \cdot \text{tang}\,(\sphericalangle MEG)}$$

$$= -\frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}.$$

inigt man und beachtet, daß auch die Gleichung $^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2$ erfüllt ist, so findet man zum usse

$$\text{tang}\,\psi = -\frac{a^2 b^2}{x_1 y_1 (a^2 + b^2)},$$

$$\sin\psi = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 b^4 + x_1{}^2 y_1{}^2 (a^2 + b^2)^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{x_1 y_1 (a^2 + b^2)}{\sqrt{a^4 b^4 + x_1{}^2 y_1{}^2 (a^2 + b^2)^2}}.$$

ren wir oben, nachdem $\sin(h + \psi) = \sin h \cos\psi$ $\cos h \sin\psi$ gesetzt war, diese Werte ein, so wird

$$\sin P' = \frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}{\rho} \cdot \frac{x_1 y_1 (a^2 + b^2) \sin h + a^2 b^2 \cos h}{\sqrt{a^4 b^4 + x_1{}^2 y_1{}^2 (a^2 + b^2)^2}}$$

allgemeine Ausdruck für den Sinus der Höhenparallaxe [1]). Vorausgesetzt ward dabei allerdings, daß der

[1]) Berechnungen dieser Art sind zuerst angestellt worden von aldi (Sur la détermination de la figure de la terre par la

Stern, dessen Parallaxe bestimmt werden soll, in der durch den Beobachtungsort gelegten Meridianebene sich befinde.

Befindet sich der betreffende Ort entweder am Aequator oder an einem der Erdpole, so wird das Produkt $x_1 y_1$ gleich Null; es wird dann also, den Fahrstrahl $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r_1$ gesetzt,

$$\sin P_{(0)}' = \frac{r_1}{\rho} \cos h.$$

Auf einer kugelförmigen Erde ist die Lage des Beobachtungsortes ohne jeden Belang, und es wird demzufolge, da nunmehr r_1 dem Halbmesser r gleichkommt, die zuletzt angeschriebene Formel in die uns bereits bekannte von oben übergehen.

Verschiedenheit der Parallaxen. Der Einfluß der Elliptizität des Erdmeridianes wird sich nun in der

---

parallaxe de la Lune, Hist. de l'acad. royale de Paris, année 1734. S. 59 ff.) und gleichzeitig von Maupertuis (Sur la parallaxe de la Lune, Paris 1734). Der Zweck, den beide Astronomen im Auge hatten, war allerdings ein demjenigen, den wir hier verfolgen, entgegengesetzter: sie wollten durch Mondbeobachtungen die genaue Erdgestalt bestimmen, ähnlich, nur primitiver, wie dies neuerdings Bischoff (s. o.) angestrebt hat. „Donc on peut reconnaître," sagt Maupertuis, „par les parallaxes horizontales de la lune observées en différents lieux, si la terre est une sphère ou un sphéroide, et si ce sphéroide est allongé ou applati." Natürlich: wenn für zwei Erdorte resp. x_1, y_1, h und P', für drei dagegen x_1, y und h bekannt ist, so kann man mittelst der zwei oder drei Gleichungen, die man besitzt, die noch fehlenden zwei oder drei unbekannten Größen berechnen. Auch J. A. Euler arbeitete in diesem Sinne seinen „Versuch, die Figur der Erde durch Beobachtungen des Mondes zu bestimmen" (Schriften d. kurbayer. Akad. d. Wissensch., 1768. S. 197 ff.) aus. „Da es unleugbar ist," meint derselbe, „daß die auf einem und demselben Mittagskreise beobachteten Mondhöhen von der Figur der Erde abhängen, und diese hinwiederum einen Einfluß auf jene notwendig haben müsse, so stehet mit allem Recht zu vermuten, daß die Beobachtungen der mittäglichen Mondshöhen dazu dienen könnten, die Figur der Erde aus denselben zu bestimmen." Allgemeiner gehalten sind die Untersuchungen von Tob. Mayer (In parallaxim Lunae ejusdemque a terra distantiam inquisitio, Comm. Soc. Reg. Scient. Gotting., 1752. S. 159 ff.) und Kästner (Parallaxe auf dem Sphäroid; Weit. Ausf. d. mathem. Geogr., Göttingen 1795. S. 212 ff.).

se abschätzen lassen, daß man die Größe P' unter rundelegung der bekannten Werte von r, a, b für chiedene geographische Breiten φ berechnet [1]) und erhaltenen Resultate miteinander vergleicht. Es stellt worauf als der erste der große Euler aufmerksam acht zu haben scheint [2]), heraus, daß nur dann, wenn r Punkt S mit dem Mittelpunkte des Mondes zunenfällt, ein nennenswerter Unterschied zwischen den Formel I und II berechneten Werten sich ergibt. die Fixsterne ist die Parallaxe, von der wir bisher chen — eine andere Art, die sogenannte *jährliche llaxe,* wird uns später im dritten Kapitel (V. Abitt) begegnen — überhaupt nicht vorhanden; für die en Planeten ist sie zwar merklich, aber noch sehr deutend; für die Sonne endlich, Merkur und Venus ngt sie zwar Berücksichtigung [3]), jedoch keine solche, der die Abweichung des Erdkörpers von der Kugelalt irgend ins Gewicht fiele. Anders bei unserem anten:

So oft bei einer auf das Ortsbestimmungsproblem bechen Rechnung eine Korrektur bezüglich der Parallaxe Mondes sich als erforderlich erweist, ist diese Korrektur Massgabe der für eine ellipsoidische Erde ermittelten llaktischen Formel anzubringen. Im allgemeinen da- darf von jetzt ab die Erde als kugelförmig ange- werden.

---

[1]) Da man (S. 302) zwischen geographischer und geozentrischer e kaum einen Unterschied zu machen genötigt ist, so kann unter φ_1 die zum Punkte x_1, y_1 gehörige Breite verstanden, $ab : \sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi_1 + b^2}$, $y_1 = ab \operatorname{tang} \varphi_1 : \sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi_1 + b^2}$.

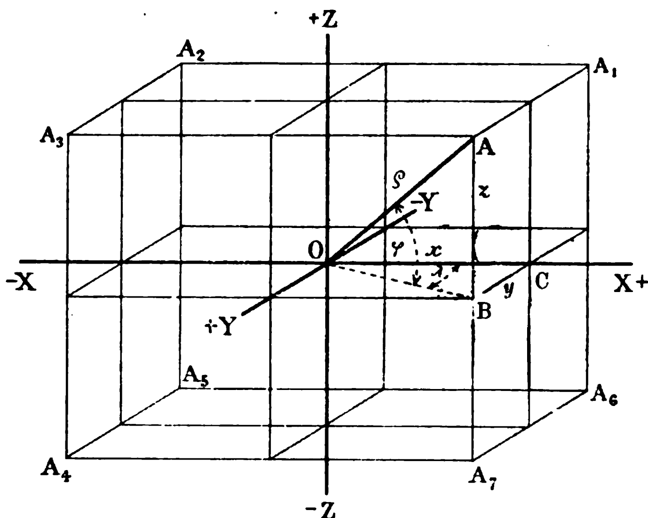
[2]) L. Euler, Theoria parallaxeos ad figuram terrae sphaeroi- accomodata, Acta Acad. Imp. Petropol., 1789, I. S. 241 ff. der Fall, daß die Erdnähe eines Kometen eine so große e, um ihm eine die Berücksichtigung der Erdelliptizität erende Parallaxe zu erteilen, wird von Euler nebenbei in be- t gezogen.

[3]) Vgl. R. Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 166 ff. Der Ein- der Parallaxe auf die Koordinatenwerte eines Sternes wird hier nein durch Formeln ausgedrückt.

II. Die Koordinatenbestimmung und ihre Fehlerquellen; Refraktion.

Die drei Koordinaten eines Erdortes. Von Koordinatenbestimmung auf der Himmels- und Erdsphäre ist oben (in Abschnitt VII und XIII des ersten Kapitels) bereits vielfach die Rede gewesen, allein da der betreffende

Fig. 92.



Punkt als an einer bestimmten Fläche haftend vorausgesetzt ward, so genügten *zwei Koordinaten* zu seiner Festlegung. Nunmehr haben wir die Aufgabe in ihrer allgemeinen Form zu stellen und zu lösen.

Die gewöhnliche Art, einen Punkt im Raume zu fixieren, besteht darin, daß man denselben durch Senkrechte auf ein gegebenes System *dreier sich in einem Punkte unter rechten Winkeln schneidender Ebenen* bezieht. *O (Fig. 92)* sei der Durchschnittspunkt; *OX, OY, OZ*

n die drei Durchschnittslinien, von denen also immer zwei auf der dritten senkrecht stehen. Man kann n ersichtlich von drei *Koordinatenebenen*, einer XY-, r XZ- und einer YZ-Ebene sprechen. Um den kt A, der eine willkürliche Lage hat, zu bestimmen, en wir von ihm auf die XY-Ebene eine Senkrechte , und von B aus wiederum ziehen wir in der XY-ne ein Lot BC zu OX. Wenn dann $OC = x$, $BC = y$, $= z$ bekannt sind, so ist auch A gegeben. Allergs noch nicht *eindeutig*. Um auch die Eindeutigkeit erlangen, unterscheiden wir in der uns schon bekannten ise an der X-, Y- und Z-Achse je eine positive und e negative Richtung und ordnen jeder *der drei Koordinaten* ein bestimmtes Vorzeichen zu. Die drei Koordienebenen zerlegen den unendlichen Raum in acht konente Teile, und in jedem dieser Raumausschnitte belet sich ein Punkt, dessen Koordinaten *dem Absolutte nach* mit denen von A übereinstimmen. Diese acht kte sind die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepiums, dessen Mittelpunkt O ist, und wir können diese t Eckpunkte $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ durch ihre ordinaten — nunmehr eindeutig — darstellen wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} +x \\ +y \\ +z \end{Bmatrix} \quad A_1\begin{Bmatrix} +x \\ -y \\ +z \end{Bmatrix} \quad A_2\begin{Bmatrix} -x \\ -y \\ +z \end{Bmatrix} \quad A_3\begin{Bmatrix} -x \\ +y \\ +z \end{Bmatrix} \quad A_4\begin{Bmatrix} -x \\ +y \\ -z \end{Bmatrix} \quad A_5\begin{Bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{Bmatrix}$$

$$A_6\begin{Bmatrix} +x \\ -y \\ -z \end{Bmatrix} \quad A_7\begin{Bmatrix} +x \\ +y \\ -z \end{Bmatrix}$$

n dieser Darstellung eines Raumes durch *orthogonale ordinaten* macht auch die Astronomie gelegentlich auslehnten Gebrauch [1]); gewöhnlich aber bedient sie sich

[1]) Will man die Bewegung eines Himmelskörpers unter Zundelegung des Newtonschen Gravitationsgesetzes ganz allgen untersuchen, so muß man von den sogenannten Lagrangeen Bewegungsgleichungen ausgehen, welche die drei rechtwinkn Koordinaten des bewegten Punktes als Funktion der Zeit stellen. Die ganze Mechanik des Himmels (s. u. VII. Abschnitt dritten Kapitel) stützt sich auf obige Koordinatenbestimmung.

der *Polarkoordinaten.* In unserer Figur sei $\sphericalangle COB = \lambda$, $\sphericalangle BOA = \varphi$, $OA = \rho$; sobald λ, φ und ρ bekannt sind, ist dies auch Punkt A. Dabei kann λ alle Werte zwischen 0° und 360°, φ alle Werte zwischen $-90°$ und $+90°$ annehmen, während ρ unter allen Umständen positiv bleibt. Die Vermittlung zwischen den orthogonalen und den polaren Koordinaten wird durch die drei Gleichungen

I. $x = \rho \cos\varphi \cos\lambda, \quad y = \rho \cos\varphi \sin\lambda, \quad z = \rho \sin\varphi$

oder auch

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,sin}\left(z : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$
$$\lambda = \operatorname{arc\,tang}(y : x)$$

hergestellt, mittelst deren man vom einen Systeme zum anderen übergehen kann.

Wir lassen ein für allemal die Z-Achse mit der Himmelsachse [1]), die XY-Ebene mit der des Aequators, die XZ-Ebene mit der des ersten Meridianes zusammenfallen. *Alsdann ist λ mit der geographischen Länge, φ mit der geographischen Breite identisch.* Was wir ρ nannten, ist gleich $r \pm H$, wo r den Radius der bis zur Meeresfläche gerechneten Erdkugel, H die *Erhebung oder Senkung unter den Meeresspiegel* bedeutet. Da r bekannt ist (s. S. 318), so handelt es sich bloß noch um die Ermittlung von H. Wir können also folgendes aussprechen:

Irgend ein wie immer der Erde [2]) angehöriger Punkt ist seiner geographischen Lage nach vollständig bekannt, sobald man für ihn die Angulargrössen φ und λ, sowie die Lineargrösse H, die — positive oder negative — Meereshöhe, kennt. In der Auffindung dieser drei Werte besteht somit das ganze Ortsbestimmungsproblem.

---

[1]) Daß das in die Erde hineinfallende Stück der Himmelsachse zugleich auch die Umdrehungsachse der ersteren ist, braucht an dieser Stelle nicht besonders hervorgehoben zu werden.

[2]) Wir meinen (s. S. 39) einen der Litho-, Hydro- oder Atmosphäre des Erdballes angehörigen Punkt. Aber auch wenn derselbe weiter vom Mittelpunkte der Erde entfernt, ein Himmelskörper wäre, könnte doch seine Koordinatenbestimmung in bezeichneter Weise erfolgen.

Parallaxe und Gestirnshalbmesser. Unter den Kautelen, welche bei jeder Ortsbestimmung erforderlich ind, wenn der anvisierte Stern *nicht ein Fixstern ist*[1]), aben wir besonders zwei hervorzuheben: *Der Gestirnsort nuss parallaktisch korrigiert und, sofern das Gestirn einen cheinbaren Durchmesser von messbarer Grösse hat, auf len Mittelpunkt reduziert werden.* Von der erstgenannten Korrektion ist bereits im vorigen Abschnitte, wennschon unächst unter einem anderen Gesichtspunkte, gehandelt vorden; sowie dieselbe angebracht ist, befindet sich der Stern an dem Punkte der Himmelskugel, an welchem er, om Mittelpunkte der Erde aus gesehen, erscheinen würde, nd damit ist ersichtlich jedes Element der Unbestimmtneit nach dieser Seite hin aus dem Wege geräumt.

Die Bestimmung des scheinbaren Durchmessers eines rößeren Gestirnes, sei dies nun Sonne, Mond oder einer ler größeren Planeten, erfolgt, da es sich um eine Bogenröße handelt, gewöhnlich mittelst eines Winkelmeßinstrunentes[2]). Ist Δ der scheinbare Durchmesser, so muß

---

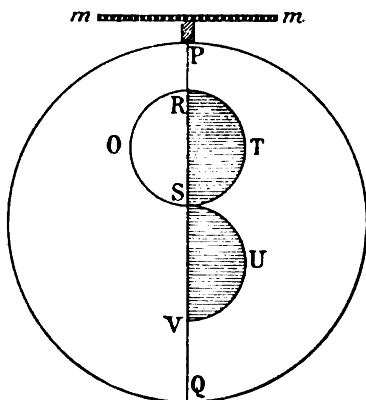
[1]) Ein Fixstern bedarf, wie wir schon sahen, keiner Berückichtigung der aus der Größe der Erdkugel entspringenden parallakischen Verschiebung. Aber auch die zweite Korrektion fällt für hn weg, denn selbst in Fernrohren von der stärksten raumdurchringenden Kraft erscheinen Fixsterne nur als winzige Lichtpunkte.

[2]) Auf älteren Andeutungen von Short und Bouguer fußend, at Dollond, der bekannte Erfinder des modernen achromatischen 'ernrohres, ein sehr einfaches und praktisches Instrument zur Messung des scheinbaren Durchmessers einer Gestirnscheibe anegeben (A Contrivance for Measuring small Angles, Philos. Transact., 1753), dem später — eben wegen seiner Anwendung auf die Ernittlung der scheinbaren Größe der Sonne — der Name *Heliometer* eigelegt ward (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 593 ff.). Fraunhofer ührte dieses Instrument mit seiner wohlbekannten Genialität aus, nd Bessel bediente sich desselben mit dem größten Erfolge zur Bestimmung der Jahresparallaxe einiger Fixsterne. Theoretisch egründet wurde die Eigenart des heliometrischen Meßverfahrens urch Hansen (Ausführliche Methode, mit dem Fraunhoferchen Heliometer Beobachtungen anzustellen, Gotha 1827). Urprünglich war der Hauptbestandteil des Instrumentes — s. *Fig. 93* — ine in der Mitte vertikal zerschnittene Objektivlinse; *PQ* sei der chnitt, längs dessen also beide Hälften ganz genau aufeinander assen. Man bringt nun den Himmelskörper, dessen Diameter man

etwa die Höhe des Scheibenmittelpunktes über dem Horizonte gleich $\left(h \mp \frac{1}{2} \Delta\right)$ gesetzt werden, wenn man die Höhe h, sei es des oberen oder unteren Scheibenrandes, d. h. des vom Horizonte am weitesten oder am wenigsten weit entfernten Punktes der Scheibe, gemessen hat. Die Sonne beispielsweise hat [1]) am kürzesten Tage einen

messen will, so in das Gesichtsfeld, daß die Scheibe durch den Schnitt PQ ebenfalls in zwei kongruente Teile zerteilt wird; RS ist der zu bestimmende Durchmesser. Eine feine Schraube mm ermöglicht es aber, die bewegliche Hälfte längs der festen zu ver-

Fig. 93.



schieben, und es ist bekannt, welchem Winkelwerte eine einmalige Umdrehung der Schraube auf das genaueste entspricht. Man dreht nun so lange, bis die beweglich gewordene Scheibenhälfte die unbeweglich gebliebene gerade von außen berührt; erstere ist bei uns schraffiert und aus ihrer ursprünglichen Lage RTS in die neue Lage SUV übergegangen. Die Drehung, welche notwendig war, um diese neue Position herbeizuführen, liefert den Winkelwert von $RS = SV$. Fraunhofers Verbesserung bestand darin, daß er auch die Hälfte ROS beweglich machte.

[1]) Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 95 ff. Der kleinste Sonnendurchmesser (Juni) verhält sich zum größten (Dezember) wie 29 : 30; die Differenz ist also niemals eine erhebliche, und wenn man ge-

ıeinbaren Halbmesser von 977, am längsten einen solchen ı 945 Bogensekunden; wenn also am 21. Dezember · obere Sonnenrand an einem Orte direkt anvisiert und ıe Höhe über dem Horizonte gleich 36° 18′ 52″ geıden wurde, so betrug der kürzeste Winkelabstand . Sonnenmittelpunktes vom Horizonte (36° 18′ 52″)° 16′ 17″ =) 36° 2′ 35″.

Wenn der Sternort parallaktisch und zentrisch reziert worden ist, würde er, falls unsere Erdkugel im ren Raume stünde, völlig genau bestimmt sein. Der ıstand jedoch, daß wir sämtliche Himmelskörper nur rch das Medium unserer Atmosphäre hindurch erꞇken, bewirkt eine weitere Ortsverschiebung, der nunhr Rechnung zu tragen ist.

Das Wesen der atmosphärischen Strahlenechung. Beim Durchgange durch Stoffe von unicher Brechbarkeit wird jeder Lichtstrahl von seinem ege abgelenkt. Das Auge, welches mit seiner Thätigt auf das zu allerletzt vor seinem Eintritte in das Sehgan vom Lichte zurückgelegte Wegstück angewiesen , verlegt deshalb jedes Objekt an eine andere Stelle · Himmelskugel, als an die, wohin es wirklich gehört, d es ist leicht, folgendes einzusehen:

Die Strahlenbrechung innerhalb unserer Lufthülle hat · Folge, dass kein Licht aussendendes Objekt, es müsste ı denn im Zenitalpunkte des Beobachters befinden, an ıem wahren Orte erkannt wird, und es muss deshalb jeder Beobachtung eine Korrektion wegen der Lichtchung angebracht werden.

ınlich (vgl. oben S. 163) den Sonnendurchmesser $= \frac{1}{2}^{0}$ setzt, d man in keinem Falle einen nennenswerten Fehler begehen. mlich ebenso verhält es sich mit dem scheinbaren Durchmesser Mondes, der je nach seiner Entfernung von der Erde unter ıkeln erscheint, als deren Grenzwerte nach Hansen 33′ 36″ l 29′ 24″ zu gelten haben. Der astronomische Kalender enthält jeden Tag oder sogar für jede Stunde des Tages auch diese änderlichen Größen.

Es macht dabei einen, wennschon mehr graduellen als prinzipiellen Unterschied aus, ob der ins Auge gelangende Strahl *die ganze Atmosphäre* oder nur *gewisse Schichten derselben* durchlaufen hat, d. h. ob er von einem Himmelskörper oder von einem irdischen Gegenstande herkommt. Im ersten Falle haben wir es mit der *astronomischen*, im zweiten mit der *terrestrischen Refraktion* zu thun.

Unsere Atmosphäre können wir uns unter normalen Verhältnissen [1]) als aus einer kontinuierlichen Folge von konzentrischen Kugelschalen zusammengesetzt denken, innerhalb deren die Dichtigkeit annähernd konstant ist, während an der Grenzfläche je zweier solcher Schalen die Dichtigkeit zunimmt, wenn man sich der Erde selbst nähert. In *Fig. 94* stellt M den Mittelpunkt der Erdkugel vor, deren Durchschnitt mit der Zeichnungsebene der ganz ausgezogene Kreis repräsentiert, und die gestrichelten Kreise entsprechen den erwähnten Trennungsflächen aufeinander folgender Kugelschalen von gleicher Dichte. Der Stern S sendet einen Strahl aus, der in H an die äußere Grenzfläche der Atmosphäre gelangt und von hier nach G, von da an weiter nach F, E, D gebrochen wird, um endlich durch eine letzte Brechung das Auge des in C befindlichen Beobachters zu erreichen. Wenn n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 die den einzelnen Begrenzungsflächen entsprechenden Brechungskoeffizienten sind, und wenn Mh, Mg, Mf, Me, Md resp. die den Brechungspunkten zugeordneten Einfallslote bedeuten, so müssen dem Brechungsgesetze von Snellius (s. S. 126) zufolge die nachstehenden Gleichungen gelten:

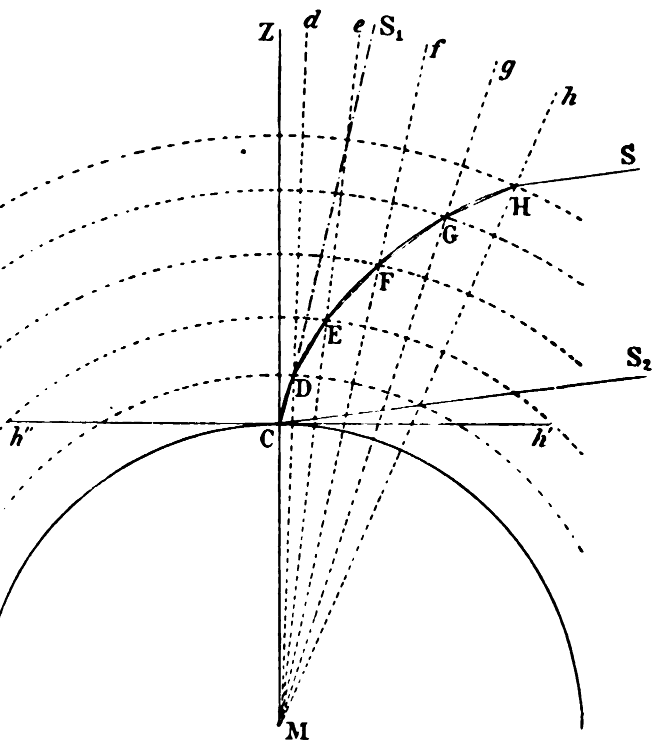
$$\frac{\sin(\sphericalangle SHh)}{\sin(\sphericalangle GHM)} = n_1, \quad \frac{\sin(\sphericalangle HGg)}{\sin(\sphericalangle FGM)} = n_2,$$

[1]) Erst in neuerer Zeit ist man auf die Wahrnehmung geführt worden, daß die Annahme, sämtliche vom Erdzentrum gleichweit entfernte Punkte in der Luft seien durch Luftteilchen von gleicher Dichte besetzt, nicht immer zutrifft; zum Schlusse dieses Abschnittes wird der Sache näher getreten werden.

$$\frac{\sin(\sphericalangle GFf)}{\sin(\sphericalangle EFM)} = n_3, \quad \frac{\sin(\sphericalangle FEe)}{\sin(\sphericalangle DEM)} = n_4,$$

$$\frac{\sin(\sphericalangle EDd)}{\sin(\sphericalangle CDM)} = n_5.$$

Fig. 94.



Die Brechungskoeffizienten sind sämtlich > 1; so-
muß, wie es auch die Figur bestätigt, die gebrochene
htlinie $SHGFEDC$ gegen die Zenitalrichtung MCZ
kav verlaufen. DC ist der unmittelbar ins Auge ge-

langende Strahl, und es sieht mithin der Beobachter in C das Lichtobjekt S thatsächlich in S_1, wenn S_1 den Durchschnitt der verlängerten CD mit der scheinbaren Himmelskugel bezeichnet. Legt man durch C den scheinbaren Horizont $h'h''$ an die Erdkugel und zieht — vorausgesetzt, daß sich der Lichtpunkt S sehr weit von C entfernt befindet, durch C die Grade CS_2 parallel zu HS, so ist $\sphericalangle h'CS_2$ die *wirkliche*, $\sphericalangle h'CS_1$ die *durch die Strahlenbrechung alterierte Höhe* des Punktes S. Da offenbar $\sphericalangle h'CS_1 > \sphericalangle h'CS_2$ ist, so sind wir zu dem folgenden Satze gekommen:

Die Refraktion vergrössert alle Höhen, verkleinert alle Zenitdistanzen.

Die Lehre von der astronomischen Refraktion vor Laplace. Es hat lange gedauert, bis man das Wesen der Refraktion richtig verstehen lernte, und der Fortschritt zu tieferer Einsicht erfolgte nur in sehr allmählichen Etappen [1]). Daß das Licht, wenn es aus der Luft in Wasser eintritt, eine Brechung erleidet, wußte bereits der Grieche Cleomedes [2]), und Ptolemäus hat bereits experimentell zu erforschen gesucht [3]), welche Brechungswinkel gewissen Einfallswinkeln zugehören. Die bedeutenderen Optiker des Mittelalters, Ibn Haitham (Alhazen) und Witelo, waren ihrerseits gleichfalls mit

---

[1]) Eine sehr gute Uebersicht über diese einzelnen Etappen gewährt eine Preisschrift von Bruhns: Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung (Leipzig 1861).

[2]) Die „Circularis inspectio meteorum" des Cleomedes ist 1542 zu Basel gedruckt worden. Darin wird (Heller, Geschichte der Physik, 1. Band, Stuttgart 1882. S. 150) das bekannte, einfache Experiment von der in einer Schale liegenden, dem Auge des Beschauers entrückten, aber durch Eingießen von Wasser sichtbar gemachten Münze beschrieben.

[3]) Von der Ptolemäischen Optik ist nur ein Teil, der aber gerade die uns hier interessierenden Fragen enthält, in der lateinischen Bearbeitung des Amaratus Eugenius Siculus auf uns gekommen. Die Aechtheit des Fragmentes hat Henri Martin nachgewiesen (s. dessen Abhandlung im „Bulletino di storia e di bibliografia delle scienze matematiche e fisiche", 4. Band. S. 464 ff. und die Zusatznotiz des Fürsten Boncompagni, ebenda, S. 470 ff.).

Sache wohl vertraut, aber sie knüpften daran keine eren Nutzanwendungen für die Astronomie, sondern ließen das dem Nürnberger Bernhard Walther, Freunde u. Gehilfen Regiomontans (s. o. S. 137)[1], allerdings noch keine rechte Abhilfe zu bringen wußte, ern nur riet, keine dem Horizonte benachbarten Sterne eobachten. Tycho Brahe ging tiefer auf die Sache), aber seine Bestrebungen waren gehemmt durch irrige Anschauungen: die Refraktion sollte für ver-edene Himmelskörper selbst eine verschiedene, sie e aber für Höhen $> 45^0$ überhaupt nicht mehr von luß sein. Klarer hierüber dachte Kepler, der auch Auffindung des später von Snellius entdeckten chungsgesetzes sehr nahe gekommen war[3]), aber erst ninic Cassini[4]) lieferte eine *Refraktionstafel*, welche ihre Zeit — den Ausgang des 17. Jahrhunderts — hinlänglich genau gelten mochte; ziemlich gleichzeitig nnte Picard[5]), daß die Größe der Refraktion auch *Barometer- und Thermometerstande* abhängig sei.

Der große Aufschwung, den die Mathematik in der vton-Leibnizschen Periode nahm, regte dazu an, das blem der astronomischen Refraktion unter einem neuen, der empirischen Gesichtspunkte anzugreifen. Da die nte der Atmosphäre sich nicht, wie wir der Uebersicht-keit halber in unserem Diagramme annahmen, sprung-se ändert, da selbe vielmehr von innen nach außen stetig abnimmt, so beschreibt das Licht thatsächlich

[1]) Vgl. Delambre, Histoire de l'astronomie du moyen âge, 1819. S. 339 ff.

[2]) Tychos Methode (Astronomiae instauratae progymnas-, Frankfurt a. M. 1618. S. 15), die Refraktion durch Ver-chung der oberen — wenig alterierten -- mit der unteren — alterierten — Höhe eines Zirkumpolarsternes zu bestimmen, ient noch heute Beachtung.

[3]) Eingehend sind die Vorstadien in der Entdeckung dieses tigen Gesetzes auseinandergesetzt bei Kramer (Descartes das Brechungsgesetz des Lichtes, Abhandlungen zur Gesch. athem., 4. Heft, Leipzig 1882).

[4]) Bruhns, a. a. O., S. 33 ff.

[5]) Picards verbesserte Tafel s. bei Delambre, Histoire de ronomie moderne, 2. Band, Paris 1821. S. 618.

nicht eine gebrochen-gradlinige, sondern eine *krummlinige* Bahn, und die Anstrengungen der Geometer waren demzufolge, nachdem sie in den Besitz der geeigneten analytischen Methoden gelangt waren, darauf gerichtet, *die Gleichung der Refraktionskurve* — Bouguer[1]) nennt dieselbe „courbe solaire“ — *aufzustellen.* Die Namen eines Hermann, Brook Taylor, Jakob, Johann und Daniel Bernoulli, sowie verschiedener anderer geachteter Männer des fraglichen Zeitalters sind mit diesen Bemühungen verknüpft[2]), welche freilich damals noch zu keinem rechten Ergebnisse führen konnten, denn erstens wußte man mit der Zusammensetzung des Luftkreises noch zu wenig Bescheid, um die richtige Differentialgleichung der Lichtkurve anzuschreiben, und zweitens hätte man mit den vorhandenen Mitteln diese Gleichung auch noch nicht zu integrieren vermocht. Für die Bedürfnisse der Praxis wurde jedenfalls weit mehr geleistet von Simpson, der durch eine geistvolle Kombination von Hypothese und Rechnung zu der seinen Namen tragenden Formel geführt wurde:

Ist z die wahre Zenitdistanz eines Sternes, $(z - P)$ die durch die Refraktion P beeinträchtigte scheinbare (gemessene) Zenitdistanz, bedeuten ferner a und b zwei konstante Grössen, so findet man den Wert der Refraktion P durch Elimination der Hilfsgrösse x aus nachstehenden beiden Gleichungen[3]):

$$\frac{\sin z}{\sin x} = \frac{1}{a}; \; P = b(z - x).$$

Es ist somit, wenn man x wegschafft,

$$P = b(z - \operatorname{arc} \sin (a \sin z)).$$

Bei Simpson war $a = \sin 86^0 \, 58' \, 30''$, $b = \frac{2}{11}$. Die

[1]) Bouguer, Méthode d'observer exactement sur mer les hauteurs des astres, Paris 1749.

[2]) Bruhns, a. a. O., S. 47 ff.

[3]) Simpson, Mathematical Dissertations, London 1743. S. 46 ff.

Bradley[1]) an der Formel von Simpson angebrachte ·ektion bezog sich mehr nur auf die in dieselbe egangenen Konstanten, und auch die späteren Ar- n von Tob. Mayer, Lambert, Lagrange, Oriani . w.[2]) gingen sachlich nicht bedeutend über erstere us. Eine auch die Horizontalrefraktionen mit größerer ırfe als bisher darstellende Formel wurde von Kramp eleitet[3]).

Die Lehre von der astronomischen Refraktion ler Neuzeit. Die Differentialgleichungen, welche den verschiedenen Mathematikern des 18. Jahrhun- s für die Lichtkurve angegeben worden waren, ent- chen übereinstimmend nicht den physikalischen That- en, welche nach und nach über die Abnahme von druck und Temperatur in den höheren Luftschichten ınnt geworden waren. Anders steht es mit jener erentialgleichung, zu welcher Laplace[4]) auf einem g neuen Wege gelangte, und welche von den be- rtesten Forschern der Gegenwart als verlässige Grund- für eine allen Anforderungen genügende Refraktions- rie anerkannt worden ist. Auf eine meritorische tellung müssen wir als zu weit führend verzichten, . soll die Gleichung selbst ihren Platz finden. Wir

---

[1]) Die nach der modifizierten Simpsonschen Formel ent- nen Tabellen finden sich in Bradleys „Astronomical Obser- ns made at the Royal Observatory at Greenwich" (Oxford 1798. ff.). Eine von der Bradleyschen abweichende Konstanten- nmung ist diejenige von Hennert (Ueber die astronomische lenbrechung, Hindenburgs Archiv der reinen und ange- ten Mathematik, 2. Band. S. 1 ff.).

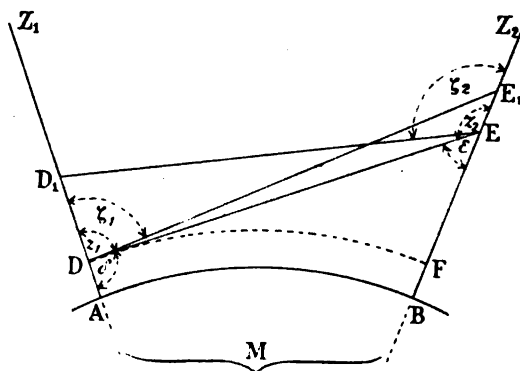
[2]) Eine gute Uebersicht über alle diese mehr bloß mathe- sch interessanten Arbeiten gibt Bruhns (S. 60 ff., S. 67 ff.).

[3]) Kramps Verdienst (Analyse des réfractions astronomiques rrestres, Straßburg 1799) bestand wesentlich darin, für das ral von $(t^m - t.\ e^{-(t^n)})\,dt$, genommen zwischen den Grenzen 0 ɔ, eine bequeme Reihenentwicklung ausfindig zu machen, welche für die Horizontalrefraktion nicht versagte.

[4]) Laplace, Traité de Mécanique céleste, vol. IV, Paris 1805. 5.

verweisen auf *Fig. 95*, in welcher A und B zwei Orte auf der Oberfläche der kugelförmigen Erde vom Halbmesser r sein sollen, während D und E resp. vertikal über diesen Punkten gelegen sind, so zwar, daß $BE > AD$ ist. Von E geht ein Lichtstrahl in gekrümmter Bahn

Fig. 95.



nach D. Die Refraktion P bewirkt, daß die scheinbare Zenitdistanz z_1 des Punktes E für D nicht $\sphericalangle Z_1DE$, sondern $\sphericalangle Z_1DE_1$ ist, wo E_1 einen auf der Zenitallinie BEZ_2 von E um das Stück EE_1 nach oben verschobenen Punkt bezeichnet. $EF = BE - AD$ setzen wir gleich ξ, während mit L die Gesamthöhe und Dicke der Atmosphäre [1]) ausgedrückt sein möge. Die Luft in nächster Nähe des Punktes, dem die Meereshöhe ξ zukommt, habe die Dichte Δ, die Luft am Meeresspiegel habe die Dichte

[1]) Genaue Angaben über die Höhe der Atmosphäre lassen sich auch heute noch nicht machen, doch scheint es sicher, daß noch in einer Entfernung von 30000 m vom Erdboden die Luftteilchen die Fähigkeit besitzen, das Licht zurückzuwerfen. In die Laplacesche Formel selbst ist die Größe L zunächst allerdings nicht eingegangen; es tritt dies aber ein, wenn man mit v. Bauernfeind von der Proportion $\Delta : \Delta_0 — (L = \xi)^5 : L^5$ Gebrauch macht.

versteht man noch unter α die Refraktionskonstante Luft, so ist nach Laplace das Differential

$$dP = \frac{\alpha \sin z}{\alpha - 1} \cdot \frac{d\Delta}{\Delta_0} \times$$

$$\frac{1 - \frac{\xi}{r + \xi}}{\ldots {}^2 z + \left(\frac{2\xi}{r + \xi} - \frac{\xi^2}{(r + \xi)^2}\right) \sin^2 z - 2\alpha \left(1 - \frac{\Delta_0}{\Delta}\right)\Big]^{\frac{1}{2}}}.$$

handelt es sich also zunächst darum, eine Beziehung chen ξ und Δ herzustellen, mittelst deren ξ als Funk- von Δ ausgedrückt werden kann, und alsdann den lruck rechts nach Δ zu integrieren. Dies kann nur ngenäherter Form geschehen.

Beide Aufgaben sind gelöst worden in einer Ab- lung v. Bauernfeinds[1]), auf welche zu verweisen uns hier bescheiden müssen. In wesentlich verschie- r Weise hat Jordan, selbstverständlich ebenfalls nur oximativ, die Größe P durch ξ mittelst einer ge- ssenen Formel dargestellt. Man ersieht aus der Ge- des Differentiales, daß durch dasselbe jede Art der aktion wiedergegeben wird. Integriert man zwischen Grenzen o und ξ, so erhält man *den allgemeinen Aus- k für die terrestrische Refraktion*, der selbstverständ- da eben die vom Lichtstrahle durchmessene atmo- rische Schicht je nach der Lage des Objektes von iselnder Dicke ist, das variable Element ξ in sich en muß. Natürlich wird dieses konstant, sobald es um ein bestimmtes, Licht aussendendes Objekt in bener Entfernung von der Meeresfläche handelt. n man hingegen zwischen den Grenzen o und L die gration vollzieht, so ergibt sich sofort *der allge-*

---

[1]) v. Bauernfeind, Die astronomische Strahlenbrechung auf d einer neuen Aufstellung über die Konstitution der Atmo- e, Astron. Nachr., Nr. 1478—80; abgekürzte Darstellung in genannten Autors „Elem. der Vermessungskunde" (2. Band. 7 ff.).

meine Ausdruck für die astronomische Refraktion, und in diesem darf außer der für die einzelnen Sterne wechselnden Zenitdistanz keine veränderliche Größe vorkommen, weil ja jeder von einem transatmosphärischen Punkte ausgehende Lichtstrahl die ganze Lufthülle, wenigstens wenn die Seehöhe des Beobachters $= 0$ ist, zu durchlaufen hat.

In neuester Zeit ist man noch einem Faktor auf die Spur gekommen, welcher für die Größe der Refraktion von unerwartet einschneidendem Einflusse ist; dies ist die *Temperaturveränderung mit zunehmender Erhebung über den Erdboden* und zwar wurde diesem Gegenstande zuerst von Jordan[1]) die Beachtung gewidmet, welche er verdient. Die erwähnte Jordansche Refraktionsformel stützt sich nicht auf ein bestimmtes Gesetz dieser Temperaturveränderung, sondern begnügt sich mit der Einführung eines *unbestimmten Temperaturkoeffizienten*, indem, unter t_1 und t_2 die Temperaturen des End- und Anfangspunktes eines Bogenstücks der Lichtkurve, unter h die Vertikaldistanz beider Punkte, unter n endlich den erwähnten Koeffizienten verstanden, $nh = t_1 - t_2$ gesetzt wird. Dieses n muß dann im Einzelfalle den gegebenen Verhältnissen entprechend gewählt werden, worüber von Hartl[2]) dankenswerte Studien angestellt worden sind. Im allgemeinen nehmen bekanntlich die Lufttemperaturen von unten nach oben zu ab[3]), allein eine durchgreifende

---

[1]) Die erste Idee zu dieser neuen Behandlung des Refraktionsproblemes enthält Jordans Note „Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Refraktion" (Astr. Nachr. Nr. 2095).

[2]) Hartl, Ueber den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung und den meteorologischen Elementen, Zeitschrift d. österr. meteorol. Gesellschaft, 16. Band. S. 112 ff.; id., Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung, Mitteil. d. k. k. militärgeographischen Institutes, 3. Band, Wien 1883.

[3]) Ein generelles Gesetz für diese Abnahme ist nicht festzustellen; die Jordansche Tafel zeigt, daß der vertikale Temperaturgradient nach oben hin langsam zunimmt; im Durchschnitte entspricht einer Höhenvergrößerung von 100 m eine Temperaturverminderung von 0,7°. Im speziellen Interesse der Refraktionstheorie hat Weilenmann (Studien über die Refraktion, Nr. 24 und 25 der von R. Wolf in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Ge-

Regel ist dies keineswegs, vielmehr tritt in nicht seltenen Fällen die sogenannte *Temperaturumkehr* ein [1]), und diese wird auch auf den Betrag der Refraktion ihre Einwirkung auszuüben nicht verfehlen. So bemerkt Jordan [2]), daß die häufig am Morgen und Abend zu beobachtenden starken Refraktionen nur durch eine Zunahme der Lufttemperatur in größerer Höhe erklärlich seien. Hier ist eben *n* negativ geworden, und man erkennt also, daß die Einführung dieser Größe einen entschiedenen Vorteil mit sich bringt, wie dies u. a. auch von Helmert anerkannt wird [3]). — Schließlich sei noch bemerkt, daß der Refraktionskoeffizient einer Beobachtung v. Baeyers [4]) zufolge auch *dem halben Tagesbogen proportional sein soll.*

Die Refraktionskorrektur einer astronomischen Beobachtung. Der astronomische Kalkul wird von diesen wesentlich die Physik der Atmosphäre berührenden feineren Untersuchungen der Neuzeit zunächst nicht näher berührt, da für ihn eine Berücksichtigung der Bradley-Simpsonschen Regel (s. o.) in der Hauptsache genügt. Wir werden im folgenden diejenige Korrektur charakterisieren, welche der Strahlenbrechung halber an jeder gemessenen Höhe eines Gestirnes angebracht werden muß, und werden dabei die Darstellung Weyers als eine unmittelbar aus der Praxis hervorgegangene zu Grunde legen [5]). Es ist hierbei also immer zu berück-

---

sellschaft zu Zürich fortlaufend edierten „Astron. Mitteilungen") diese Frage behandelt.

[1]) Das Zuverlässigste, was wir über die Temperaturumkehr in der Höhe wissen, bietet Hanns wohlbekannte Abhandlung „Die mittlere Wärmeverteilung in den Ostalpen" (Zeitschr. d. d. u. österr. Alpenver., 17. Band. S. 22 ff.). Die alpinen Zentralthäler sind nach Hann während der kalten Jahreszeit durchaus kälter, als es die sie umgebenden Hochgipfel sind.

[2]) Jordan, Handb. d. Vermessungskunde, 2. Band. S. 463.

[3]) Helmert, Die mathem. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, 2. Band. S. 590 ff.

[4]) v. Baeyer, Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840. S. 117.

[5]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung im 1. Bande der „Allgem. Enzyklopädie der Physik" (Leipzig 1869. S. 660 ff.).

sichtigen, daß man es nur mit einer Näherung zu thun hat und zwar mit einer minder feinen, als sie unter Verwertung der neuesten theoretischen Forschungen (s. o.) sich erzielen ließe; für die bei der geographischen Ortsbestimmung sich ergebenden Aufgaben dürfte aber die nachstehende Darlegung ausreichend sein.

Bestände die ganze Atmosphäre aus einer allenthalben gleich dichten Masse, so würde, unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten, die Bedingungsgleichung

$$\sin(z + P) = \text{Konst.} \sin z$$

erfüllt sein müssen. Wenn die Konstante so gewählt wäre, daß eine gewisse mittlere Dichte durch die ganze Lufthülle verteilt gelten könnte, so hätte obige Formel den Wert einer ersten Annäherung. Für eine andere Zenitdistanz z' ist auch die Refraktion P' eine andere geworden, und es bestehen somit die Relationen:

$$\frac{\sin(z + P)}{\sin z} = \frac{\sin(z' + P')}{\sin z'};\ \cos P + \sin P \operatorname{cotang} z$$
$$= \cos P' + \sin P' \operatorname{cotang} z'.$$

Da P und P' nur ganz ausnahmsweise größere Werte erhalten [1], so kann für gewöhnlich der Kosinus durch die Einheit, der Sinus durch den Bogen ersetzt werden, und es besteht also die folgende Proportion:

$$P : P' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'.$$

Für $z' = 45^0$ wird die Tangente $= 1$, während P' für diesen Spezialfall durch die Erfahrung bestimmt werden muß. Man ermittelte $z' = 57{,}7''$ und hatte also die Näherungsformel $P = 57{,}7'' . \operatorname{tang} z' = 57{,}7'' . \operatorname{cotang} h$

[1] Eine ganz außerordentliche Steigerung der Refraktion soll mitunter in den Polargegenden vorkommen. Die holländische Expedition zur Auffindung einer nordöstlichen Durchfahrt, welche 1596 auf der Insel Nowaja Semlja überwintern mußte, sah die Sonne am 24. Januar wieder erscheinen, während sie der Berechnung nach erst am 11. Februar erwartet wurde. Man hat (s. Bruhns, S. 20 ff.) viel über die Erklärung dieses Phänomens gestritten, doch hält Kramp (vgl. seinen Brief an Hindenburg in dessen „Archiv", 2. Band. S. 509) entschieden daran fest, daß da nur ein Fall von stark vergrößerter Horizontalrefraktion vorliege.

erhalten. Für $h \gtreqless 20^0$ erwies sich die bis zu dieser Grenze recht genaue Formel als unzureichend, und man substituiert ihr deshalb für den bezüglichen Bereich den Bradleyschen Ausdruck (s. o.)

$$P = 57{,}7'' \,.\, \text{cotang}\,(h - 3\,P).$$

Aus dieser Gleichung muß also im gegebenen Falle P näherungsweise berechnet werden, denn dieselbe ist ersichtlich *transzendent.*

Es erübrigt noch, diese *mittlere Refraktion*, welche nur unter Voraussetzung eines ganz bestimmten *barischen* und *thermischen Zustandes der Atmosphäre* giltig ist, mit den die Variationen von Luftdruck und Wärme darstellenden Zusatzgliedern zu versehen. Wir dürfen die Refraktion der Luftdichte und damit auch dem Drucke der Luft proportional setzen, so daß, wenn b und $(b + \Delta b)$ die den Refraktionen P und P' zugehörigen Barometerstände sind, die Proportion $b : (b + \Delta b) = P : P'$ angesetzt werden kann. Es ist mithin

$$P' = P \,.\, \frac{b + \Delta b}{b}.$$

Unter k verstehen wir einen Erfahrungskoeffizienten; nehmen wir an, daß die Aenderung im Wärmezustande der Luft, durch welche die Refraktionsgröße P in P' übergeführt wird, einer Veränderung von Δt Graden entspreche, so haben wir wiederum die Proportion $(1 + k\,\Delta t) : 1 = P : P'$, woraus sich

$$P' = P \,.\, \frac{1}{1 + k\,\Delta t}$$

berechnet. Führen wir beide Reduktionsglieder in unsere obige Fundamentalgleichung für P ein, so ergibt sich zum Schlusse

$$P = 57{,}7'' \,.\, \text{cotang}\,(h - 3\,P) \,.\, \frac{b + \Delta b}{b} \,.\, \frac{1}{1 + k\,\Delta t} \equiv P_0 \,.\, b' \,.\, t'.$$

In den astronomischen und nautischen Kalendern findet man für einen gewissen normalen Barometer- und Thermometerstand die mittlere Refraktion P_0 bereits berechnet

vor, so daß man also nicht immer erst in jedem Einzelfalle die obige transzendente Gleichung aufzulösen nötig hat. Ebenso sind in diesen Tabellenwerken besondere Tafeln enthalten, in denen man für die der unmittelbaren Beobachtung entnommenen Werte Δb und Δt sofort die Korrektionsgrößen b' und t' nachschlagen kann, so zwar, daß nicht multipliziert, sondern bloß addiert zu werden braucht.

Ein Zahlenbeispiel möge noch besonders klarlegen, wie jede Einzelbeobachtung von den ihr anhaftenden Unvollkommenheiten befreit zu werden vermag. Ein Schiffer hat zum Zweck der Festlegung seines Ortes mit seinem Spiegelsextanten die Höhe des Mondes bei seinem Durchgange durch den Meridian bestimmt. Würde er diese Beobachtung, so wie sie ist, weiter verwenden, so beginge er einen nicht unbeträchtlichen Fehler. Wie er aber wirklich zu verfahren hat, möge aus folgendem erhellen[1]).

Der Spiegelsextant wird bekanntlich so gebraucht, daß man einen bestimmten Punkt des in Rede stehenden Himmelskörpers mit seinem Spiegelbilde — ein künstlicher Horizont vertritt die Spiegelfläche — zur Deckung bringt und nunmehr am Limbus abliest. So bekommt man nicht die einfache, sondern die doppelte Meridianhöhe; wenn also die Anvisierung des unteren Mondrandes $14^0\,10'$ betrug, und wenn der Indexfehler[2]) den negativen Wert von $2'30''$ hatte, so beträgt die vorläufige, nur mit Rücksicht auf das Beobachtungsinstrument korrigierte Höhe des dem Horizonte nächst gelegenen Punktes der Mondscheibe $\frac{1}{2}(14^0\,10' - 2'30'') = \frac{1}{2}(14^0\,7'30'') = 7^0\,3'45''$. Für diese Höhe h sucht man in der Tabelle den Wert der mittleren Refraktion P_0 und findet ihn $= 7'16''$; das Barometer zeigte[3]) 29 Zoll 3 Linien franz. $=$ 31,173 Zoll

[1]) Vgl. das kurze Schema in Weyers „Vorlesungen über nautische Astronomie" (Kiel 1871. S. 55).

[2]) Vom Index- oder Kollimationsfehler der Spiegelinstrumente und von seiner Ermittlung ist weiter oben (S. 123 ff.) einläßlich gehandelt worden.

[3]) Die meisten älteren Tafeln richten sich, da nun einmal die Briten das meerbeherrschende Volk sind, nach englischem Maße

engl., das Thermometer $+7\frac{1}{4}^0$ R. $= 48{,}9^0$ F., und da in den Tafeln von Domke[1]), auf welche der Seemann unseres Beispieles angewiesen war, der Normalbarometerstand $b = 29{,}6$ Zoll engl., der Normalthermometerstand $t = 50^0$ F. zu Grunde gelegt ist, so mußte mit den Werten $\Delta b = 1{,}573$ Zoll und $\Delta t = -1{,}1^0$ F. in die betreffenden Rubriken eingegangen werden, um die barometrische Korrektion $= -22''$, die thermometrische $= -1''$ zu finden. Demgemäß ist die mit Rücksicht auf Refraktion vollständig korrigierte Höhe des unteren Randes

$$7^0 3' 45'' - (7' 16'' + 22'' + 1'') = 7^0 3' 45'' - 7' 39'' = 6^0 56' 6''.$$

Weiter muß jetzt (s. o.) die parallaktische Korrektion angebracht werden. Die Aequatorialhorizontalparallaxe des Mondes ergibt sich aus der Tafel $= 1^0 1' 30''$, die Größe, welche von diesem Bogen — als dem Maximum aller Parallaxen (s. o.) — abgezogen werden muß, um die Höhenparallaxe zu ermitteln, ist für jede Breite in dem Almanach ebenfalls voraus berechnet. Die Polhöhe, unter der die Beobachtung vorgenommen war, ist $= +54^0 19'$; hiezu liefert die Tafel das Ergänzungsglied $8{,}2''$, welches (s. den vorigen Abschnitt) der abgeplatteten Gestalt der Erde Rechnung trägt[2]). Wenn wir die Erde als Kugel betrachten dürften, so würde jetzt die Höhenparallaxe durch die einfache Relation $(61' 30'' - 8{,}2'') \cos h$ gefunden werden; beim Monde aber ist, wie uns der vorige Abschnitt belehrte, die Abplattung der Erde nicht zu ver-

---

und englischer (Fahrenheitscher) Thermometergraduierung. Bessels Refraktionstafeln, die heute noch hohen Wert haben, sind für altfranzösische Zolle und Reaumurgrade eingerichtet.

[1]) Domke, Nautische, astronomische und logarithmische Tabellen, Berlin 1855. Beiläufig bemerkt, ein recht wenig zuverlässiger Ratgeber, indem Gernerths Revision (Zeitschr. f. d. österr. Gymnasien, 1863. S. 407 ff.) unter 32500 Tabularlogarithmen bei Domke nicht weniger denn 838 fehlerhafte zu entdecken vermochte.

[2]) In der Tafel steht nur die Horizontalparallaxe für die Breite Null, und für jede andere Breite ist, um die Lokalhorizontalparallaxe zu erhalten, ein Zusatzglied der Tabelle zu entnehmen. Strenge genommen fällt dieses Glied für eine sphäroidische Erde etwas anders als für eine sphärische aus.

nachlässigen; zur korrigierten Höhe h ist noch die Differenz zwischen geographischer und geozentrischer Breite hinzu zu addieren, und diese macht (vgl. o. S. 302) für $54^{\circ}\,19'$ Breite etwa $11''$ aus. Es ist also die Höhenparallaxe

$$P' = 61'22''\,.\cos(6^{\circ}56'6'' + 11'') = 60'53'';$$

um diese Größe P' erscheint für den scheinbaren Horizont der Mondrand näher gerückt, und wir haben folglich P' als additiv in Rechnung zu bringen. Thun wir dies, so wird die auf Instrumentalfehler, Parallaxe und Refraktion korrigierte Höhe $= 6^{\circ}56'6'' + 1^{\circ}0'53'' = 7^{\circ}56'59''$. Eigentlich aber kommt es uns nicht auf die Höhe des unteren Mondrandes, sondern vielmehr auf die des Mondmittelpunktes selber an; es ist also noch der aus der Tafel zu entnehmende scheinbare Scheibenradius mit $+16'47''$ in Rechnung zu bringen, und wir haben durch diese Reduktionen das gewünschte Resultat erhalten: Der Mittelpunkt des Mondes hatte im fraglichen Zeitpunkte von dem wahren, d. h. durch das Erdzentrum gelegten Horizonte des Beobachtungsplatzes einen kürzesten Angularabstand von $(7^{\circ}56'59'' + 16'47'' =)\, 8^{\circ}13'46''$. Würde man die von der Elliptizität der Erde herrührenden Korrektionen außer acht gelassen haben, so hätte man das Schlußresultat nur um $2''$ anders erhalten — ein neuer Beleg dafür, daß es bei Fragen der Ortsbestimmung im allgemeinen ohne weiteres gestattet ist, die Erde als Kugel zu betrachten, selbst wenn der Mond das Objekt der Beobachtung sein sollte.

Die vorstehenden Erörterungen geben wohl zur Genüge Klarheit darüber, wie jede einzelne astronomische Beobachtung und Rechnung mit Rücksicht auf die Refraktion zu korrigieren ist. Es gilt dies insbesondere für alle die Aufgaben, mit denen wir uns im Abschnitt IX des ersten Kapitels beschäftigt haben. Die Refraktion bringt es dahin, daß jedes Gestirn eher auf- und später untergeht, daß also sein Tagesbogen größer wird, als wir an jener Stelle berechnet haben; die Refraktion vergrößert ebenso die Dauer der Dämmerung (s. S. 150 ff.);

die Refraktion endlich macht die (S. 160 ff.) gegebene Zeitbestimmung für den Auf- und Untergang eines scheibenförmigen Himmelskörpers unrichtig, wenngleich nur in minimalem Betrage. Da nämlich auf den oberen Rand der Scheibe der Einfluß des Refraktionsfehlers ein geringerer ist, als auf den unteren, so dürfte strenge genommen nicht eine absolut kreisförmige, es müßte vielmehr eine elliptisch verzogene Scheibe, deren Hauptachse dem Horizonte parallel verliefe, in Betracht gezogen werden. Besonders maßgebend aber bleibt für die Folge[1]): *Keine gemessene Höhe darf bei einer Ortsbestimmung verwendet werden, ehe sie nicht um den Betrag der Refraktion vergrössert worden ist.*

Geodäsie und terrestrische Strahlenbrechung. Für Astronomie und mathematische Geographie im engeren Sinne könnte der vorstehend gegebene Abriß der Refraktionslehre als zureichend angesehen werden. Die höhere Geodäsie aber, und zwar insbesondere in ihrer — den Gegenstand des nächsten Kapitels bildenden — Anwendung auf Messung von Vertikaldistanzen, ist am Studium der terrestrischen Refraktion noch näher beteiligt, und aus diesem Grunde halten wir es für zweckmäßig, noch eine Uebersicht über die Untersuchungen an dieser Stelle einzuschalten, welche v. Bauernfeind über die Beziehung dieser speziellen Refraktion zu feldmesserischen Operationen angestellt hat[2]).

---

[1]) Eben weil dies ein für allemal gilt, braucht in den folgenden Abschnitten nicht immer wieder von neuem auf diese selbstverständliche Thatsache hingewiesen zu werden. Nur bei Durchrechnung von Zahlenbeispielen müßte uns natürlich diese Korrektion wieder begegnen.

[2]) v. Bauernfeind, Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion (aus den Abhandlungen d. k. bayr. Akad. d. Wissensch.), Erste Mitteilung, München 1880; Zweite Mitteilung, ebenda 1883; Dritte Mitteilung, ebenda 1888. Die erste Note enthielt, abgesehen von der Beschreibung der Untersuchungsmethode, hauptsächlich die im nordbayerischen Mittelgebirge, die zweite die in den Alpen gewonnenen Messungsresultate, während in der dritten aus diesen die theoretischen Schlüsse gezogen werden.

Eine direkte Methode zur Bestimmung des Wertes der terrestrischen Strahlenbrechung kann im Anschlusse an *Fig. 95* entwickelt werden. D und E sind zwei resp. um DA und EB ($EB > DA$) von der Meeresfläche AB entfernte Orte, eine durch D gelegte Niveaufläche schneidet EB in F, und der Höhenunterschied $EF = \xi$ beider Punkte ist durch geometrisches Nivellement (s. d. nächsten Abschnitt) mit einer der Wahrheit sehr nahe kommenden Genauigkeit ermittelt worden. Nicht minder kennt man die absolute Seehöhe $AD = BF = H$ des Punktes A, und da auch der Erdradius r bekannt ist, so kennt man in dem Dreieck DEM, welches durch Verlängern der Vertikalen DA und EB bis zum Erdmittelpunkte M entsteht, die Seiten $DM = r + H$, $EM = r + H + \xi$ und den von ihnen eingeschlossenen $\sphericalangle AMB = \mu$. Nach der bekannten **Gaußschen** Formel der ebenen Trigonometrie kann man jetzt die beiden Winkel $MDE = \delta$ und $MED = \varepsilon$ berechnen, indem man folgende beide Gleichungen anschreibt:

$$\delta + \varepsilon = 180^0 - \mu;$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\delta - \varepsilon) = \frac{r + H + \xi - r - H}{r + H + \xi + r + H} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\delta + \varepsilon)$$

$$= \frac{\xi}{2r + 2H + \xi} \operatorname{cotang} \frac{\mu}{2}.$$

z_1 und z_2 sind die beiden Zenitalpunkte von D und E, und $\sphericalangle EDZ_1 = z_1$, sowie $\sphericalangle DEZ_2 = z_2$ sind die an jedem der beiden Orte mit Beziehung auf den anderen im luftleeren Raume zu messenden Zenitdistanzen; diese *wahren* Zenitdistanzen wären also resp.

$$z_1 = 180^0 - \delta, \; z_2 = 180^0 - \varepsilon.$$

Das nun, was der Beobachter in D und E wirklich zu messen in der Lage ist, sind nicht die wahren, sondern die *durch die terrestrische Refraktion entstellten scheinbaren* Zenitdistanzen, nämlich $\sphericalangle Z_1DE_1 = \zeta_1$ *und* $\sphericalangle Z_2ED_1 = \zeta_2$. Diese Größen ζ_1 und ζ_2 werden durch unmittelbare Beobachtung erhalten; beachten wir also noch, daß (s. o.) die Summe $(2H + \xi)$ gegen r entschieden klein

ausfällt, so haben wir für die *Refraktionsbeträge* $\Delta \zeta_1$ und $\Delta \zeta_2$ folgende Bestimmungsgleichungen bekommen:

$$\Delta \zeta_0 = z_1 - \zeta_1; \quad \Delta \zeta_2 = z_2 - \zeta_2; \quad z_1 + z_2 = 180^0 + \mu;$$

$$-\operatorname{tang} \frac{1}{2} (z_1 - z_2) = \frac{\xi}{2(r+H)+\xi} \operatorname{cotang} \frac{\mu}{2}.$$

Hier sind ζ_1, ζ_2, H, ξ bekannte, resp. durch Messung gewonnene Größen, und der Zentriwinkel μ ist durch die Lage der beiden bekannten Orte A und B gleichfalls gegeben; kommen diesen nämlich resp. die Breiten β_1 und β_2, die Längen λ_1 und λ_2 zu, so ist (s. S. 253)

$$\cos \mu = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Die terrestrischen Refraktionen $\Delta \zeta_1$ und $\Delta \zeta_2$ werden sonach durch einfache Messung und Rechnung mit grosser Schärfe erhalten.

Die Arbeiten v. Bauernfeinds hatten nun besonders auch den Zweck, einen Vergleich anzustellen zwischen den Refraktionsbeträgen, welche nach Maßgabe der vorstehenden Methode ermittelt sind, und denjenigen, welche sich durch Integration der Laplaceschen Differentialgleichung (s. o.) ergaben. Unter den mancherlei wichtigen Folgerungen, welche sich hierbei einstellten, können hier begreiflicherweise nur einige wenige angeführt werden. Besonders bemerkt zu werden verdient, daß die Refraktion, ganz ebenso wie die Lufttemperatur, eine *tägliche Periode* besitzt, deren Amplitude mit jener *der täglichen Temperaturkurve* übereinstimmt. Es gelang ferner, für jene Fälle, in denen durch unregelmäßige Erwärmung der unteren Luftschichten der normale Gleichgewichtszustand der Atmosphäre beeinträchtigt erscheint[1]),

[1]) Die eigentlichen Schwankungen im Gleichgewichtszustande der Luft sind schon von Sabler (Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderung derselben, Dorpat 1839) bemerkt und studiert worden. Wer sich die Mühe nimmt, stundenlang durch ein unverrückbar aufgestelltes Fernrohr nach einem bestimmten Punkte zu blicken, wird in dieser Hinsicht lohnende Erfahrungen machen, wovon z. B. Linggs Aufsatz „Ueber einen märchenhaften Wechsel der Szenerie“ (Außerordentl. Beil. d.

eine gewisse Höhe ausfindig zu machen, jenseits deren — vom Boden an gerechnet — die übliche Annahme wieder in ihr Recht tritt, während diesseits den Schichten eine gleichmäßige Dichtigkeit zugeschrieben werden darf. Durch diese beiden Sätze ist unsere Einsicht in das Wesen der Strahlenbrechung bedeutend vertieft worden, wie dies u. a. v. Oppolzer bei seinem Versuche[1]), die physikalische Theorie der Refraktion auf eine völlig neue Grundlage zu stellen, unumwunden anerkannt worden ist.

Die Lateralrefraktion. Daß die Refraktionskurve eine ebene Kurve sei, aus der durch den Licht aussendenden Punkt, den Licht empfangenden Punkt und das Erdzentrum gelegten Ebene nirgendwo heraustrete, war bisher als eine sich von selbst verstehende Sache angenommen worden, und in der That stimmen die Beobachtungen mit dieser Voraussetzung auch in der Regel überein. Gleichwohl ist es denkbar, daß neben der für gewöhnlich allein ins Gewicht fallenden *Vertikalrefraktion* auch eine *Lateralrefraktion* sich geltend macht. Es genügt hierzu, daß die Dichte der Atmosphäre nicht lediglich eine Funktion des Halbmessers wäre; *sobald die Dichtigkeit zweier gleichweit vom Erdmittelpunkte entfernten Luftplatten eine verschiedene ist, wird der Lichtstrahl aus*

Allgem. Zeitung vom 21. und 22. Sept. 1888) Zeugnis ablegt. Den Einfluß der Tagesperiode der Temperatur auf die Größe der Refraktion hat bereits Huygens richtig herausgefühlt gehabt; er sagt in seinem berühmten Werke über das Licht (Traité de la lumière, neu herausgeg. von Burckhardt, Basel 1884. vgl. S. 338) folgendes: „Il y a une expérience, qui rend cette réfraction fort visible, qui est, en fixant une Lunette d'approche en quelqu'endroit, en sorte qui elle regarde un objet éloigné de demie lieue où plus, comme un clocher, ou une maison, si on y regarde à des heures différentes du jour, la laissant toujours attachée de même, l'on verra que ce ne seront pas les mêmes endroits de l'objet . . ., mais que d'ordinaire le matin et le soir, lorsqu'il y a plus de vapeurs près de la Terre, ces objets semblent monter plus haut . . ., et qu'ils baisseront vers le midi, quand ces vapeurs seront dissipés."

[1]) Vgl. den akademischen Vortrag v. Oppolzers „Ueber den Zusammenhang der Refraktion mit der Temperaturverteilung in der Atmosphäre" (Wien 1884).

der Vertikalebene abgelenkt und eventuell in eine Lichtlinie von doppelter Krümmung verwandelt werden. Alsdann würde also eine *vertikale* und daneben noch eine *seitliche Komponente* des Refraktionsbetrages unterschieden werden müssen. Aufmerksam war man auf diese Möglichkeit bereits vor geraumer Zeit geworden [1]), allein erst durch Pfaffs wochenlang hindurch fortgesetzte Beobachtungen wurde festgestellt, daß wirklich ein sehr weit entferntes Objekt, je nach der wechselnden Erwärmung der zwischenliegenden Luftschicht, nicht bloß nach unten und oben sich zu bewegen scheint, sondern sogar nach rechts und links hin aus der das Gesichtsfeld des Beobachters normal halbierenden Linie zu entschwinden vermag [2]). Die Geodäten unterließen es nicht, der Anomalie, welche ja möglicherweise alle Messungen illusorisch machen konnte, auf ihre wirkliche Größe und Einwirkung zu prüfen. Nachdem Schreiber [3]) und A. Fischer [4]) die erfreuliche Wahrnehmung gemacht hatten, daß der Einfluß der seitlichen Refraktion auf Horizontalwinkel und Höhenwinkel nur ganz ausnahmsweise von Belang sein kann, sammelte v. Bauernfeind während seiner auf ein allgemeineres Ziel (s. o.) gerichteten Arbeiten im Frankenwald ein äußerst reichhaltiges Erfahrungsmaterial auch über diesen Punkt und gewann auf Grund desselben das in nachstehendem Satze verdichtete Urteil [5]): „Nach meiner Ansicht sind Seitenrefraktionen nur dann zu fürchten, wenn die Visierlinien nahe an Bergwänden oder anderen wärmestrahlenden Gegenständen von großer horizontaler Erstreckung vorbeigehen." Auch in seiner späteren Mit-

---

[1]) Günther, Historische Notizen über die Lateralrefraktion, Sitzungsber. d. phys.-mediz. Societät zu Erlangen vom 11. Mai 1874.

[2]) F. Pfaff, Beobachtungen über Lateralrefraktion, Sitzungsberichte d. k. bayer. Akad. d. Wissensch., Math.-phys. Kl., 1872. S. 147 ff.

[3]) Schreiber, Ueber die Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station, Zeitschr. f. d. Vermessungswesen, 7. Band. S. 209 ff.

[4]) A. Fischer, Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Höhenwinkeln, Berlin 1882.

[5]) v. Bauernfeind, Ergebnisse etc., Erste Mitteilung, S. 65.

teilung über diesen Gegenstand [1]) hat der genannte Autor sich zu dieser Ansicht bekannt, in teilweiser Gegnerschaft allerdings zu einer von dem dänischen Geodäten Andrae aus den Beobachtungen am Döbra- und Kapellenberge gezogenen und dahin formulierten Folgerung, daß mit der Entfernung auch die Lateralrefraktion proportional zu wachsen scheine. Kommt sie aber auch wirklich vor, so ist die durch sie bewirkte Winkelveränderung doch höchstens auf ein paar Sekunden zu schätzen, und so scheint denn wenigstens das eine außer Zweifel zu stehen: *Die mathematische Geographie als solche wird von der Frage nach der Existenz einer lateralen Refraktion nicht berührt.*

III. Methoden zur Höhenmessung.

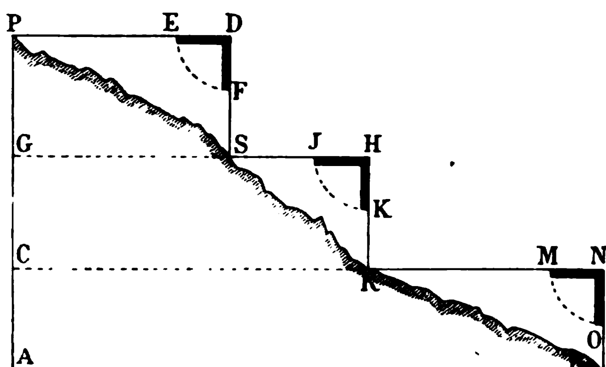
Wir haben im Beginne des vorigen Abschnittes gesehen, daß die Ortsbestimmung eines Punktes von der Ermittlung zweier Winkelgrößen und einer linearen Größe, der *See-* oder *Meereshöhe* abhängt. Wir haben es vorläufig nur mit dieser letzteren zu thun. Die Auswahl der Mittel, durch deren Anwendung die kürzeste Entfernung eines Punktes von der Meeresfläche, resp. von einer Horizontalfläche bekannter Höhe bestimmt werden kann, ist eine ziemlich vielseitige. Man kann die gesuchte Distanz in eine Anzahl von vertikalen Einzelstrecken einteilen und jede dieser letzteren direkt messen, um schließlich alle zu summieren; man kann von einer gemessenen Basis ausgehen und durch Messung gewisser Winkel die Daten für eine Berechnung der Höhe zu erlangen suchen; man kann von der Thatsache Gebrauch machen, daß die Länge der Barometersäule nach einem gewissen Gesetze sich verringert, sobald man aufwärts steigt, und man ist schließlich auch in der Lage, die Verzögerung des Siedeprozesses für irgend eine Flüssigkeit zum Maßstabe der erreichten Höhe zu nehmen. Je nachdem unsere Wahl im Sinne einer der vier genannten Möglichkeiten ausfällt,

[1]) Id., Ergebnisse etc., Dritte Mitteilung, S. 25 ff.

haben wir es mit der *geometrisch-nivellitischen,* mit der *trigonometrischen, barometrischen* oder *thermometrischen Höhemessungsmethode* zu thun.

Das Nivellement. Die Methode des Nivellierens, lange geringer geschätzt, als sie verdient, und erst von der wissenschaftlichen Geodäsie der neuesten Zeit wieder in ihre vollen Rechte eingesetzt [1]), ist ihrem Prinzipe nach

Fig. 96.



zweifellos die leichtestverständliche von allen. In *Fig. 96,* die einem didaktisch sehr zu empfehlenden Diagramme von Riccioli [2]) nachgebildet ist, soll die Höhe AP eines Berges ausgemessen werden, und man hat zu diesem Ende

---

[1]) Sehr gut präzisiert die Brauchbarkeit der einzelnen Verfahrungsweisen ein Vortrag Jordans „Ueber die Methoden und Ziele der verschiedenen Arten von Höhenmessungen“ (Verhandl. d. VIII. d. Geographentages. Berlin 1889. S. 200 ff). Das Nivellieren behandeln natürlich gründlich die Kompendien der praktischen Geometrie; vgl. z. B. v. Bauernfeind, Elem. d. Vermessungsk., 2. Band. S. 340 ff.; Jordan, Handb. d. Vermessungsk., 2. Band. S. 345 ff. Daneben darf nicht verschwiegen werden Stampfer-Herrs „Anleitung zum Nivellieren“ (7. Auflage, Wien 1872).

[2]) Riccioli, Almagestum novum, 2. Band, Bologna 1651. S. 593 ff.

zwischen die Spitze P und den Punkt B, in welchem die Böschungslinie PB den Horizont trifft, auf dieser letzteren die beiden Punkte R und S eingeschaltet. Ein massiver rechter Winkel ist dann jedesmal so angebracht, daß sein vertikaler Schenkel durch den anderen je zweier konsekutiver Punkte auf der Berglehne hindurchgehe. Zuerst sei MNO diese Lage des rechten Winkels, alsdann IHK, endlich EDF; die verlängerten Horizontallinien schneiden AP bezüglich in C und G. So ist die gesuchte Berghöhe

$$AP = AC + CG + GP = BN + RH + SD$$

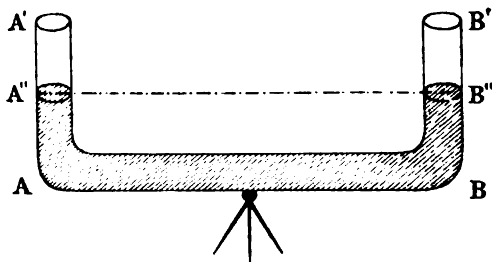
geworden; die drei Vertikalstrecken BN, RH, SD lassen sich direkt messen, und damit ist die Aufgabe ohne alle Umschweife erledigt.

In der wirklichen Praxis freilich sind zwei hier mit Stillschweigen übergangene Punkte von höchster Bedeutung: *Die horizontale Stellung eines jeden Endschenkels* und *die bequeme Messung einer jeden Teilstrecke*. Ersteres erreichte man früher durch Anwendung eines Senklotes, während man gegenwärtig die sich hier von selbst darbietende Wasserwage benützt[1]; das Messen selbst voll-

---

[1]) Bei den Römern wurde zu Nivellierzwecken die *Kanalwage* benützt, d. h. eine mit Wasser gefüllte Röhre AB, die an beiden

Fig. 97.



Enden *u*-förmig umgebogen war, so daß in den Schenkeln AA' und BB' *(Fig. 97)* das Wasser ebenfalls bis zu einer gewissen Höhe reichte. Steht die Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch,

zieht sich an der *Nivellierlatte* und *Zieltafel*. Letztere, die man in den mannigfaltigsten Formen hergestellt hat[1]), soll dazu dienen, die Endpunkte der Teilstrecken genau zu markieren, indes ist neuerdings dieses Hilfsmittel vielfach beiseite gelassen worden, indem die Meßlatten selbst, wenn auf ihnen eine einfache Teilung von schwarzen Strichen auf weißem Grunde angebracht ist, sich als ausreichend erweisen. Ein Gehilfe sorgt dafür, daß die Meßlatte, welche in unserer obigen Zeichnung stets dem vertikalen Endschenkel des rechten Winkels entspricht, genau senkrecht zum Horizonte eingestellt werde; der Beobachter selbst dagegen verfügt über ein sogenanntes *Nivellierinstrument*[2]), ein Fernrohr mit Fadenkreuz, welches auf einem Dreifuße mittelst der Libelle zu einer genauen horizontalen Achsenstellung gebracht werden kann. So kann dann die Vertikaldistanz, welche zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Stellungen des Instrumentes enthalten ist, an der Nivellierlatte mit einer Schärfe abgelesen werden, die auf keinem anderen Wege zu erreichen ist.

Die Art der Messung, welche wir soeben beschrieben, war, wie man sagt, das *Nivellieren aus einem Endpunkte*.

---

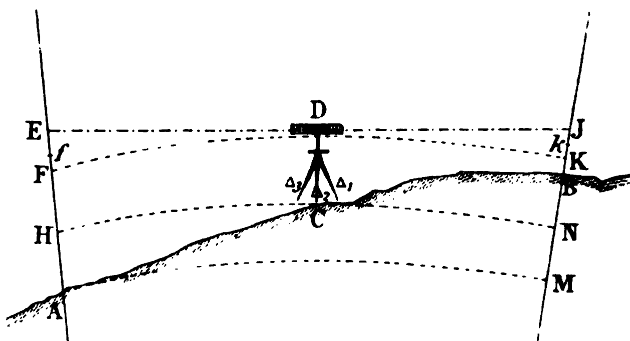
so daß resp. $AA'' = BB''$ die Flüssigkeitshöhe darstellt, so ist die Verbindungslinie $A''B''$ horizontal und kann als Richtungslinie für ein Nivellement verwendet werden. Vitruvius beschreibt dieses Instrument sehr eingehend (vgl. A. Terquem, La science romaine à l'époque d'Auguste, Paris 1885); trotz der Unvollkommenheit der Kanalwage wußten die römischen Ingenieure mit deren Hilfe große Unternehmungen, wie z. B. einen Tunnelbau für einen Kanal im heutigen Algerien, auszuführen. Für Zwecke, die keine große Genauigkeit erheischen, steht das Instrument noch heute im Gebrauche, ja Kahle (Nivellement und Winkelmessung mit geschlossener Kanalwage, D. Rundschau f. Geogr. u. Statistik, 11. Jahrgang. S. 63 ff. S. 123 ff.) hat dargethan, daß man sich des Apparates in der ihm von Botz erteilten Form — ein Glasrohr in Gestalt des Perimeters eines Parallelogrammes — mit Vorteil für flüchtige topographische Aufnahmen im Terrain zu bedienen vermag.

[1]) Stampfer-Herr, a. a. O., S. 108.

[2]) Sehr beliebt sind die Nivellierfernrohre von Stampfer, Ertel und G. Starke, insonderheit des letzteren mit Durchschlagsfernrohr versehenes *Universalnivellierinstrument*.

So genau es ist, so unterliegt es doch, abgesehen von der besonders zu besprechenden Korrektion der Refraktion, noch einem nicht ganz geringzuschätzenden Fehler. Wenn nämlich *(Fig. 98)* die in Frage kommende Distanz AB eine sehr beträchtliche ist, so sind die Lotrichtungen von A und B, da sie sich ja im Mittelpunkte der Erde begegnen müssen,

Fig. 98.



nicht mehr in aller Strenge parallel. Diesen Fehler der Erdkrümmung beseitigt das *Nivellieren aus einem Zwischenpunkte,* wovon *Fig. 97* einen Begriff zu geben sucht[1]). AB sei der Bergabhang, und irgendwo in C zwischen A und B sei horizontal der Dreifuß Δ_1, Δ_2, Δ_3 aufgestellt, auf dem das horizontale Fernrohr D aufruht. Wir denken uns in A und B die Erdradien gezogen und zugleich durch A und C Kugelflächen konzentrisch zum Meeresniveau gelegt, welche diese Halbmesser resp. in A und M, H und N durchschneiden; dann ist $BM = BN + NM = BN + AH$ die gesuchte Vertikaldistanz der Punkte B und A. In diesen beiden sind Meßlatten errichtet, welche die nach beiden Seiten verlängerte Fernrohrachse resp. in E und I begegnet, so daß also die Ablesungen l_2 in B und l_1 in A gemacht werden können, d. h. es ist $l_1 = AE$ und $l_2 = BI$. Man hat

[1]) v. Bauernfeind, a. a. O., 2. Band. S. 344 ff.

$$l_1 = AH + FH + FE,\ l_2 = BK + KI,$$

und wenn nun C annähernd in der Mitte zwischen A und B gewählt worden ist, so kann ohne Bedenken $FE = KI$ gesetzt werden. Dann aber ist $l_1 - l_2 = AF - BK$, und die Differenz der Lattenablesungen liefert sofort die wahre — nicht die mit dem Fehler der vernachlässigten Erdkrümmung behaftete — Differenz der Höhen, nämlich die Strecke MB. Auch der Refraktionsfehler wird bei dieser Methode zum Verschwinden gebracht. Die Strahlenbrechung hebt den Punkt F nach f, den Punkt K nach k; Ff und Kk sind so gut wie gleich, und beide Größen fallen also wieder bei der Bildung der Differenz heraus, sowie nicht minder die Instrumentfehler.

Präzisionsnivellements. Für die Geodäsie sowohl, wie für die physikalische Erdkunde sind von größter Bedeutung die sogenannten *Präzisionsnivellements*. Seit dem Jahre 1864, seitdem (s. o. S. 329) die europäische Gradmessung ins Leben getreten ist, werden regelmäßig solche Bestimmungen ausgeführt, um einerseits die Gestalt der Erde immer genauer zu ermitteln (s. o. S. 331), andererseits aber für die Möglichkeit spontaner Ortsveränderungen im Inneren der Erdkruste einen festen Anhaltspunkt zu gewinnen [1]). Eines der Länder, in deren

[1]) An und für sich ist es nichts weniger als unwahrscheinlich, daß jene großen tektonischen Störungen, als deren — allerdings erheblich von Erosion und Denudation gefördertes — Endergebnis sich das gegenwärtige Modell der Erdoberfläche darstellt, noch unaufhörlich ihre kleinen Nachspiele im Gezimmer der Erde haben werden, um so mehr, da die niemals rastende geologische Metamorphose stets auch Volumveränderungen der betroffenen Gesteine in ihrem Gefolge hat. Kahle (Höhenänderungen in der Umgegend von Jena infolge Hebung oder Senkung des Bodens, Mitteil. d. geogr. Ges. f. Thüringen, 5. Band. S. 95 ff.) hat aus der Dyas und dem Muschelkalk des nördlichen Thüringen eine Menge von Beispielen gesammelt, wo Höhenverschiebungen gewisser Punkte beobachtet worden sein sollen, doch erachtet er den endgiltigen Beweis für die Richtigkeit solcher immer wenig kontrollierbarer Einzelwahrnehmungen noch nicht für erbracht, sondern erwartet ihn mit Recht von einem Präzisionsnivellement der Gegend. Nur ein solches kann auch die angeblichen Folgen von Erdbeben bewahrheiten oder widerlegen; nach der Katastrophe von Agram

Bereiche mit am frühesten wirkliche Präzisionsnivellierungen planmäßig vorgenommen wurden, war Bayern [1]), und dieses Beispiel soll uns denn auch hier zunächst das maßgebende sein. Man wählt eine Anzahl von Fixpunkten aus [2]) und bestimmt deren kürzesten Abstand von einer (s. o. S. 427) als Norm gewählten Niveaufläche, indem man dann die Nivellements verschiedener Staaten verknüpft, kann man die Küsten verschiedener Meere miteinander verbinden und *einen mittleren Meeresspiegel* feststellen, auf welchen sich dann sämtliche *Höhenangaben* oder *Koten* beziehen lassen. Die Voraussetzung, daß sämtliche Meere, wenn man irgend eines derselben beliebig herausgreift, für die ganze Ausdehnung ihrer Wasserfläche die Kote Null zu erhalten hätten, ist ja nach den früher (s. S. 443) entwickelten Anschauungen über die geoidischen Niveauflächen nicht mehr haltbar, wiewohl lange Zeit unverbrüchlich an ihr festgehalten ward [3]). Nach Seibts Untersuchungen über die großen euro-

---

z. B. (s. Pilar, Grundzüge der Abyssodynamik, Agram 1880. S. 156 ff.) wollte man wissen, daß eine entfernt und hoch gelegene Kapelle auch für Orte sichtbar geworden sei, die vordem zu tief lagen, somit also eine Hebung erfahren haben müßten. Es leuchtet ein, daß die endgiltige Verbescheidung solcher Fragen einzig und allein der Geodäsie überlassen bleiben muß.

[1]) Vgl. v. Bauernfeind, Das bayerische Präzisionsnivellement und seine Beziehungen zur europäischen Gradmessung, München 1880. In einer Reihe von der Münchener Akademie eingereichten Denkschriften hatte der genannte Autor schon früher fortlaufend Bericht von dem Fortschreiten des bayerischen Nivellierungswerkes erstattet.

[2]) Sartorius v. Waltershausen hatte die Eingrabung von Marken in Felswände anempfohlen, doch zieht man es heutzutage vor, an den Wandungen ausgezeichneter öffentlicher Gebäude durch Messingbolzen, kleine Metallplatten u. s. w. die Fixpunkte zu kennzeichnen. Hauptpunkte *(der ersten Ordnung)* werden durch kleine Denkmäler verewigt.

[3]) Die über Landengen (von Suez, von Panamá u. s. w.) hinweggeführten Nivellements wurden in früherer Zeit einfach als fehlerhaft betrachtet, wenn sie einen Niveauunterschied der angrenzenden Meere ergaben. Diesen Standpunkt vertritt z. B. Peschel-Ruges „Geschichte der Erdkunde" (S. 742 ff.).

päischen Präzisionsnivellements [1]) liegt die Ostsee *bei Swinemünde* ungefähr 0,66 m über dem Mittelmeere *bei Marseille*, während das Mittelwasser der Nordsee *(Amsterdamer Normalnull)* um nahe 0,1 m über dem der Ostsee gelegen ist. Selbstthätige Flutmesser, sogenannte *Mareographen*, wie sie von dem Hamburger Mechaniker Reitz in vorzüglicher Güte geliefert werden, ermöglichen für einen bestimmten Küstenpunkt die Fixierung eines gewissen Normalstandes, von dem das Nivellement auszugehen hat. Die Höhenmarke, nach welcher man sich in Deutschland richtet, ist am Hauptgebäude der Berliner Sternwarte angebracht und befindet sich genau 37 m über dem Pegel von Amsterdam.

Beim Präzisionsnivellement, welches eben, wie sein Name besagt, nichts anderes als ein mit größtmöglicher Akribie vollzogenes geometrisches Nivellement ist, kann nur das Lattenablesen aus der Mitte Platz greifen, weil dasselbe von vornherein Gewähr für Fehlerfreiheit bietet. Unter Festhaltung gewisser Leitlinien [2]), welche im allgemeinen mit den Haupteisenbahntraçen des fraglichen Gebietes übereinstimmen werden, bildet man dann gewisse Polygone oder, wie man gewöhnlich sich ausdrückt, *Schleifen*, deren Eckpunkte als ausgezeichnete Fixpunkte angesehen werden. Für Bayern z. B. existieren 7 solche Schleifen, deren Umfangslänge, wenn man die verbindenden Seiten bloß einfach rechnet, im ganzen 1 835 059 m beträgt. Nivelliert man den ganzen Perimeter durch [3]),

[1]) Seibt, Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde, Berlin 1881. Neuere Revisionen ergaben einen kleineren Wert.

[2]) Die beiden mehr meridionalen Leitlinien des bayerischen Nivellements sind resp. die Linienzüge Koburg—Nürnberg—Augsburg—Immenstadt—Lindau und Hof—Eger—Weiden—Regensburg—München—Rosenheim—Kufstein; als im wesentlichen ostwestlich gerichtete Ergänzungslinien treten ihnen zur Seite Eger—Neumarkt—Lichtenfels—Bamberg—Schweinfurt—Aschaffenburg und Simbach—München—Augsburg—Ulm.

[3]) Die Nivellierung und der Anschluß von Schleifen wird in den Lehrbüchern der Vermessungskunde als besonderes Kapitel behandelt (v. Bauernfeind, a. a. O., 2. Band. S. 345 ff.; Jordan, a. a. O., 2. Band. S. 394 ff.).

so muß, wenn gar kein Fehler begangen worden und keine störende Masse (s. u.) in der Nähe ist, für den mit dem Anfangspunkte zusammenfallenden Schlußpunkt die bereits bekannte Höhenkote herauskommen, d. h. der *Schlussfehler* muß Null sein. In Wirklichkeit wird sich dies nie oder doch höchstens nur ganz ausnahmsweise ereignen, und wenn, wie sich dies für später von selbst versteht, noch keine Ausgleichung nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]) erfolgt ist, so muß immer ein Schlußfehler vorhanden sein: *die Grösse desselben liefert ein Mass für die Genauigkeit der Arbeit.* Kennt man den Schlußfehler f für einen Polygonalumfang p, so ist der mittlere Nivellierfehler für den laufenden Kilometer der Begrenzungslinie gleich $f:\sqrt{p}$. Die normativen Festsetzungen der genannten Gradmessungskommission aus dem Jahre 1867 erklären einen Kilometerfehler von $\pm$ 3 mm noch für zulässig, während bei dem Präzisionsnivellement, welches bei Koburg und Kahl — Bahnstation zwischen Aschaffenburg und Hanau — an das preußische angeschlossen worden ist, das Fehlermaximum sich bloß auf $\pm$ 1,8 mm belief. Beiläufig bemerkt, ist bei der geometrischen Kotierung Bayerns nirgendwo ein Anzeichen von spontaner Bodenbewegung (s. o.) hervorgetreten.

Der Attraktionsfehler eines Nivellements. Während, wie wir sahen, die durch die Strahlenbrechung bedingten Unrichtigkeiten sich durch geeignete Wahl des Standpunktes, von dem aus man nivelliert, so gut wie gänzlich ausmerzen lassen, ist die Tragweite eines anderen Fehlers erst in neuerer Zeit klar erkannt und rechnerisch geprüft worden. Es ward oben schon (s. S. 390) darauf

---

[1]) Abgesehen von der Methode der kleinsten Quadrate (s. S. 307 ff.), an welche hier natürlich in erster Linie zu denken ist, kann auch von einem wesentlich vereinfachenden Rechnungsmodus v. Bauernfeinds Gebrauch gemacht werden (Näherungsverfahren zur Ausgleichung der zufälligen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen, Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wissenschaften, Math.-Phys. Kl., 1876. S. 243 ff.).

aufmerksam gemacht, daß die *Massenanziehung seitlicher Objekte* ebenso wie das Bleilot, so auch die Blase der Libelle aus ihrer normalen Lage herausbringt. Einen der ersten — wo nicht überhaupt den ersten — Fall von klarem Verständnisse dieser Thatsache glauben wir bei dem österreichischen Geodäten Fuchs [1]) nachweisen zu können. Indem derselbe auf verschiedenem — barometrischem, trigonometrischem und zuletzt nivellitischem — Wege dem Niveauabstand der Orte Agordo und Belluno (in den südlichen Dolomiten) zu ermitteln bemüht war, hatte er stets über die geringe Uebereinstimmung seiner Resultate zu klagen, und indem er den zahlreichen Fehlerquellen auf die Spur zu kommen suchte, fand er u. a. auch, daß die asymmetrische Lage gewaltiger Gebirge zu seinem auf der anderen Seite von der weiten venezianischen Ebene begrenzten Messungsgebiete die richtig scheinende Auffassung seines Niveaus thatsächlich immer fehlerhaft gemacht habe. „Untersuchen wir," sagt er hierüber (a. a. O.), „die Folgen jener Ablenkung, so wird es sogleich klar, daß alle natürlichen Horizonte, durch flüssige Körper gebildet, um denselben Winkel aus der tangierenden Ebene fallen werden (oder aus der wirklichen, auf dem Erdhalbmesser vertikal stehenden Horizontalebene), um welche das Pendel aus der vertikalen Richtung fällt. Die Libelle unserer Meßinstrumente wird, bei scheinbarer Horizontalstellung, mit dem Erdradius einen der Achse der Erhebung zugekehrten stumpfen Winkel bilden, und daher der abzunehmende Höhenwinkel (bei Visierungen der Achse zu) genau um das Maß der Ablenkung zu klein werden."

Diese Auffassung des Sachverhaltes stellt sich bei näherer Betrachtung als eine durchaus zutreffende heraus. Neuerdings hat Helmert [2]) gezeigt, daß jede Nivellementsschleife schon um deswillen — Ausnahmefälle abgerechnet — einen Schlußfehler haben muß, weil die

---

[1]) W. Fuchs, Ueber den Einfluß der Gestalt des Terrains auf die Resultate barometrischer und trigonometrischer Höhenmessungen, Wien 1843. S. 53 ff.

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 500 ff.

Grundvorstellung, daß die einzelnen Niveauflächen zugleich Parallelflächen sind, nach einem Fundamentalsatze der höheren Geodäsie (s. o. S. 424) nicht haltbar ist. Der Schlußfehler ist identisch mit dem Integral von dH, wo H die Vertikaldistanz zweier in verschiedenen Gleichgewichtsflächen gelegenen Punkte darstellt. Wir erinnern uns (s. o. S. 450 ff.), daß, unter W_C und W_A die Potentialwerte zweier solcher Punkte C und A (C höher gelegen als A) verstanden, die Gleichung

$$W_C = W_A - \int_A^C g\,dH$$

zu Recht besteht, und daß somit *Höhenunterschiede* resp. *absolute Meereshöhen* in aller Strenge auf diesem Wege überhaupt nicht zu erhalten sind. Für die kleinen Gebiete, die ein einzelnes Nivellierungspolygon umschließt, wird dieser prinzipielle Fehler allerdings niemals einflußreich werden können. Was nun den durch Gebirgsmassen u. dgl. bedingten Schlußfehler anbelangt[1], so erreicht derselbe sein Maximum, wenn das Profil auf der einen Seite vertikal ausfällt, doch wird, wie eine Ueberschlagsrechnung zeigt, selbst bei solchen Präzisionsnivellements, welche die Pässe eines hohen Gebirges, der Alpen z. B., übersteigen, der Schlußfehler kaum höher als auf 1 cm steigen, was diesmal nicht mehr ist, als die Vorschriften der Gradmessungskommission gestatten. Unterirdische Massendefekte, wie unterirdische Massenanhäufungen können gleichfalls Fehler in verschiedenem Sinne erzeugen, und bei den Nivellementsergebnissen für die Meereshöhen können diese Fehler sich wohl bis zu 0,5 m erheben. Dagegen werden die vom Monde als anziehenden Körper bewirkten Verzerrungen der Gleichgewichtsflächen sich nicht, die von der Sonne herrührenden nur unter besonderen, kumulativ wirkenden Umständen geltend machen können.

Das Gesagte bestätigt die bereits ausgesprochene Wahrheit, daß der fixe Horizont, auf welchen man sämtliche Meereshöhen bezieht, *nur durch freie, an sich will-*

---

[1]) Ebenda, 2. Band. S. 519 ff.

kürliche Uebereinkunft gelegt werden kann. Die sogenannten *Mittelwasserstände* sind eben keine eigentlichen Niveauflächen [1]), und keine der unzähligen Gleichgewichtsflächen, die man sich innerhalb der Erdrinde gelegt denken kann, hat ein Recht darauf, als das *Geoid schlechtweg* angesehen zu werden.

Indem wir uns jetzt der trigonometrischen Höhenmessung zuwenden, stellen wir noch ausdrücklich fest [2]), daß diese eigentlich etwas anderes liefert, als das geometrische Nivellement. Während letzteres nämlich auf die Meereshöhe H abzielt, ermittelt man trigonometrisch die Größe $(N + H)$, wo N — vgl. Fig. 88 — die Erhebung oder Depression des Geoides gegenüber dem Referenzellipsoide bedeutet. Für die altimetrische Praxis werden wir freilich von dieser grundsätzlichen Verschiedenheit der beiden Methoden Abstand zu nehmen haben.

Das Prinzip der trigonometrischen Höhenmessung. Wenn überhaupt — vgl. die zur Messung eines Meridiangrades gegebenen Erläuterungen (S. 225 ff.) — eine wie immer im Raume gelegene Strecke durch ein Minimum von eigentlichen Messungsoperationen ermittelt werden soll, so mißt man zunächst mit Aufgebot höchster Schärfe eine *Basis*, und von dieser aus werden ausschließlich Winkel bestimmt. So gewinnt man ein Polygon, als dessen Schlußseite die gesuchte Strecke sich im trigonometrischen Kalkul darstellt. Einen sehr allgemeinen Fall sehen wir in *Fig. 99* vor uns. hh' ist eine Horizontalebene, der die Grundfläche der als isolierter Bergkegel aufgefaßten Erhebung ECF angehört; CD reprä-

---

[1]) Es ist hiernach die Angabe v. Boguslawskis (Handbuch der Ozeanographie, 1. Band, Stuttgart 1884. S. 35) zu berichtigen, daß die auf Mittelwasser reduzierte Fläche der Ostsee zwischen Kiel und Pillau eine wirkliche Niveaufläche der Erde sei. Mit dieser an sich unrichtigen Ansicht, die allerdings ursprünglich auf v. Baeyer zurückgeht, läßt es sich trotzdem vereinbaren, daß der Normalpegel von Swinemünde zum Ausgangspunkte aller Meereshöhen genommen wurde, allein an sich hätte man eben mit demselben Rechte einen beliebigen anderen Nullpunkt wählen können.

[2]) Helmert, a. a. O., 2. Band. S. 549 ff.

sentiere die Erhebung der Spitze über dem Horizonte hh', dessen absolute Höhe als bekannt angenommen sein möge. Am besten wird die Grundlinie in dieser Ebene selbst ausgewählt; wir nehmen indes an, daß dies aus irgend einem Grunde nicht thunlich war, und daß also die Basis

Fig. 99.

in einer anderen Ebene $l\,l'\,k'\,k$ abgesteckt werden mußte, welche die Ebene $h\,h'$ in der Linie $l\,l'$ durchschneidet. $A\,B$ sei die Basis; die Vertikalabstände $AA' = a$ und $B\,B' = b$ können als bekannt gelten, während der Grundlinie selbst die Länge c zukommen soll. Man mißt nun zuvörderst die beiden Winkel $B\,A\,C = \alpha$ und $A\,B\,C = \beta$, welche die von den beiden Fixpunkten nach der Bergspitze C gezogenen Gesichtslinien mit der Basis $A\,B$ einschließen, und hat dann auch die beiden Strecken $A\,C$ und $B\,C$, denn durch Anwendung des Sinussatzes auf das ebene Dreieck $A\,B\,C$ folgt

$$A\,C = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad B\,C = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Andererseits nehmen wir als bekannt die Winkel an, welche die von den Basisendpunkten nach dem Fußpunkte D

gezogenen Linien mit AB bilden; es sei $\sphericalangle BAD = \alpha_1$, $\sphericalangle ABD = \beta_1$. Dann ist

$$AD = \frac{c \sin \beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}, \quad BD = \frac{c \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Wenn AD und BD bekannt sind, so gilt ein Gleiches für

$$A'D = \sqrt{\overline{AD}^2 - a^2}, \quad B'D = \sqrt{\overline{BD}^2 - b^2}.$$

Zieht man durch A und B resp. AS und BT parallel zu $A'D$ und $B'D$ bis zum Durchschnitte mit dem Perpendikel CD, so wird die Höhe

$$H \equiv CD = CS + SD = CT + TD,$$

oder, wenn man die entsprechenden Werte einsetzt, wird

$$H = \sqrt{\frac{c^2 \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{c^2 \sin^2 \beta_1}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)} + a^2} + a$$
$$= \sqrt{\frac{c^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} - \frac{c^2 \sin^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)} + b^2} + b.$$

Der eine dieser beiden Werte von H dient dem anderen zur Kontrolle.

Für gewöhnlich wird man es so einrichten, daß die Basis in die Horizontalebene selbst fällt, worauf dann also $a = b = o$ wird. Die vier Winkel α, β, α_1, β_1 stehen aber unter sich in Verbindung; drei derselben sind an sich beliebig zu wählen, der vierte ist von diesen dreien abhängig. Denn da

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \,.\, BC \,.\, \cos(\sphericalangle ACB)$$
$$= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \,.\, BD \cos(\sphericalangle ADB)$$

ist, so kommen wir, indem wir die einzelnen Werte substituieren und durchweg mit c^2 heben, zu folgender Bedingungsgleichung:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)} + \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)} + \frac{2 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin^2(\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird es also möglich sein, etwa β durch α_1, β_1, α auszudrücken. Das Dreikant $ABCD$ hat in dem gegenwärtig von uns zu betrachtenden Falle einen rechten Winkel an der Kante AD; bezeichnet man also mit h_1 den $\sphericalangle CAD$, so ist nach dem Kosinussatze der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos h_1}; \ \cos \alpha = \cos \alpha_1 \cos h_1.$$

Eine gleiche Relation gilt für das Dreikant $BACD$, wenn h_2 den $\sphericalangle CBD$ ausdrückt. Je nachdem man also β und α durch α_1, β_1, h_1 oder durch α_1, β_1, h_2 darstellt, kommt man nach Umformungen mancherlei Art zu den nachstehenden Relationen [1]):

$$H = c\sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2(\alpha_1+\beta_1)}} = \frac{c \sin \beta_1 \operatorname{tang} h_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)},$$

$$H = c\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha_1+\beta_1)}} = \frac{c \sin \alpha_1 \operatorname{tang} h_2}{\sin(\alpha_1+\beta_1)}.$$

Diese beiden Relationen sind an der Figur unmittelbar zu verifizieren, und sie sind es, mit deren Hilfe gewöhnlich Höhen trigonometrisch bestimmt werden.

Im letzteren Falle ist auch die Art der Winkelmessung eine unmittelbar einleuchtende. Die in der Horizontalebene gelegenen Winkel α_1 und β_1 werden am Horizontalkreise, die beiden Elevationswinkel h_1 und h_2 werden am Vertikalkreise des Theodoliten abgelesen. Eine Anvisierung des ja doch in der großen Mehrzahl der Fälle nicht direkt sichtbaren Punktes D ist dann nicht

---

[1]) Wollte man nicht auf α_1, β_1 und h_1, h_2, sondern auf α, β und h_1, h_2 reduzieren, so würden die beiden Kontrollformeln für H diese Gestalt annehmen:

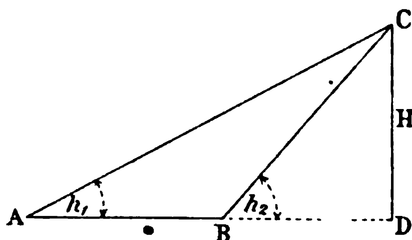
$$H = \frac{c \sin \beta \sin h_1}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c \sin \alpha \sin h_2}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Für wirkliche Anwendung sind dieselben ganz ungeeignet, weil es sehr schwer angeht, den Kreis, in dem die Winkel gemessen werden, in eine willkürliche Ebene ABC einzustellen.

notwendig, da man ja weiß, daß die Anfangsschenkel der Winkel h_1 und h_2 horizontale grade Linien sind.

Ginge die Verlängerung der Basis C durch den Fußpunkt D hindurch, so würde $\alpha_1 = \beta_1 = o$, eine Berechnung von CD nach den obigen Formeln somit illusorisch

Fig. 100.



werden. Aus *Fig. 100* jedoch, in welcher die Buchstaben A, B, C, D, c, h_1, h_2 die uns bereits geläufige Bedeutung beibehalten, und in welcher nur die drei Punkte A, B, D in einer geraden Linie gelegen sind, geht hervor, daß alsdann

$$H = (c + BD) \operatorname{tang} h_1 = c \operatorname{tang} h_1 + BC \cos h_2 \operatorname{tang} h_1$$
$$= c \operatorname{tang} h_1 + \frac{c \sin h_1 \cos h_2 \operatorname{tang} h_1}{\sin (h_2 - h_1)}$$

wird, und rechnet man aus, so ergibt sich

$$H = c \frac{\sin h_1 \cos h_1 \sin h_2 - \sin^2 h_1 \cos h_2 + \sin^2 h_1 \cos h_2}{\cos h_1 \sin (h_2 - h_1)}$$
$$= \frac{c \sin h_1 \sin h_2}{\sin (h_2 - h_1)}.$$

Diese Formel eignet sich trefflich für die logarithmische Berechnung. Wenn endlich der Basisendpunkt B auf den Fußpunkt D selbst trifft, dann wird $h_2 = 90^0$, $\sin h_2 = 1$, $\sin (h_2 - h_1) = \cos h_1$ und $H = c \operatorname{tang} h_1$, wie dies

auch aus einer Figur natürlich unmittelbar hervorgehen würde [1]).

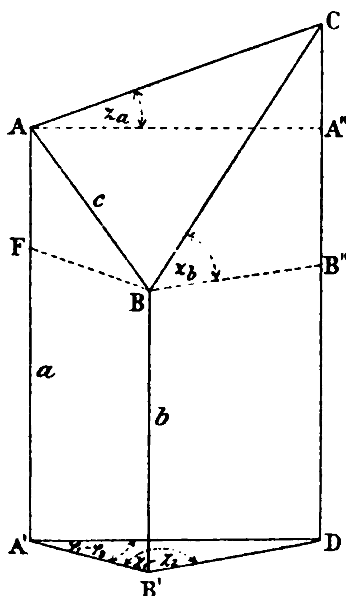
Nach unserer obigen Darstellung würde, wenn die Absteckung einer horizontalen Basis unmöglich ist, auf die Anwendung des Theodoliten verzichtet werden müssen. Indessen ist dies doch nur scheinbar so; in Wirklichkeit kann man auch mit diesem selbstredend bequemsten In-

---

[1]) Geschichtliche Nachrichten über die trigonometrische Höhenmessung findet man in Peschel-Ruges Geschichtswerk (S. 62. S. 426. S. 688 ff.), wo allerdings dafür das wenig bezeichnende — weil eigentlich mit dem Nivellement gleichbedeutende — Wort „geometrische Methode" gebraucht ist. Daneben verdient Beachtung Wolkenhauers Abhandlung „Zur Geschichte der Höhenmessungen" (D. Rundschau f. Geogr. u. Statistik, 2. Jahrgang. S. 225 ff. S. 276 ff.). Berghöhen nach rationeller Methode soll als der erste der Messenier Dikaearch gemessen haben (Plinius, Hist. nat., lib. II, cap. 65), und ihm folgte darin (Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes, Leipzig 1880. S. 173) der gelehrte Bibliothekar von Alexandrien mit der ausdrücklichen Absicht, darzuthun, daß solche Höhen gegenüber der Größe des Erdhalbmessers verschwänden (a. a. O., S. 207). Wie man aber bei diesen ersten Versuchen zu Werke gegangen, das läßt sich den vorhandenen unvollständigen Nachrichten nicht mit Sicherheit entnehmen; die Worte „διὰ τῆς διόπτρας" deuten darauf hin, daß Elevationswinkel gemessen wurden, und daß die Berechnungsweise eine soweit trigonometrische war, als sie es beim Wissensstande des dritten vorchristlichen Jahrhunderts sein konnte. Die erste zuverlässigere trigonometrische Höhenbestimmung ward von Blancanus zu Parma an dem sich gerade noch über den Horizont dieser Stadt erhebenden Monte Baldo ausgeführt (s. dessen Sphaera mundi, III, Bologna 1620. S. 95); wie wenig genau aber die Messungen waren, auf die man sich stützte, erhellt u. a. daraus, daß ein Geometer vom Range des Snellius (Eratosthenes Batavus, Leyden 1617. S. 257 ff.) für Aetna und Pic de Teyde Höhen fand, welche die wirklichen um weit mehr denn 100% übertreffen! Zu wirklicher Genauigkeit brachte man es erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, um welche Zeit Borda und Pingré die Höhe des zuletzt genannten Inselvulkanes mit einem nur etwa 0,003 des Gesamtbetrages erreichenden Fehler ermittelten. — Die Alten dachten auch daran, Berghöhen aus der Länge des von der Erhebung geworfenen Schattens herzuleiten; zumal der Athos schien sich gut dazu zu eignen, weil zu einer gewissen Jahreszeit der Schatten dieses gewaltigen Kegels sich auf dem Marktplatze der Stadt Myrina (auf Lesbos) scharf abzeichnete. Die hierzu erforderlichen Formeln entwickelt mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie Kästner (Weit. Ausführ. d. math. Geogr., S. 467 ff.).

strumente zurecht kommen[1]), falls man einen kleinen Umweg nicht scheut. In *Fig. 101* ist $AB = c$ die nicht horizontale Basis, deren Endpunkte von der horizontalen

Fig. 101.



Grundebene resp. um $AA' = a$ und $BB' = b$ entfernt sind. $CD = H$ ist wiederum die gesuchte Höhe. Zieht man $BF \parallel B'A'$ bis zum Durchschnitte mit AA', so ist $BF = A'B'$, und das rechtwinklige Dreieck ABF ergibt

[1]) Eine sehr detaillierte Anweisung, der wir oben in der Hauptsache gefolgt sind, gibt Güssfeldt (Reise in den Andes von Chile und Argentinien, Berlin 1888. S. 415 ff.). Die Basismessung erleichterte sich derselbe durch die von dem bekannten Forschungsreisenden Reiss angegebenen *Messtangen*, deren jede aus sechs gleichlangen, je 1 m messenden hohlen Metallzylindern bestand. Zum Transporte konnte man dieselben so zusammenschieben, daß man nur einen massiven Zylinder von 1 m Länge zu tragen hatte.

$$A'B' = \sqrt{\overline{AB}^2 - (AA' - BB')^2} = \sqrt{c^2 - (a-b)^2}.$$

Nun stellt man den Theodoliten horizontal, sowohl in A, als auch in B auf und visiert aus jedem dieser beiden Punkte sowohl nach C, als auch nach dem anderen Basisendpunkte. Die Visierrichtungen AC, AB und BC, BA bestimmen mit der durch den Index festgelegten Richtung je vier Winkel φ_1 und φ_2, χ_1 und χ_2, und es ist dann, wenn man in der Horizontalebene das Dreieck $A'B'D$ verzeichnet,

$$\sphericalangle DA'B' = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \sphericalangle DB'A' = \chi_1 - \chi_2.$$

Jetzt lassen sich die Seiten $A'D$ und $B'D$ berechnen; zieht man ferner AA'' senkrecht auf CD und ebenso BB'', so kann man am Höhenkreise die $\sphericalangle CAA'' = z_a$ und $CBB'' = z_b$ ablesen, und da $CA'' = A'D \operatorname{tang} z_a$, $CB'' = B'D \operatorname{tang} z_b$ ist, so gelangt man zu den folgenden, sich wiederum gegenseitig verifizierenden Schlußformeln:

$$H = \frac{\sqrt{c^2 - (a-b)^2} \,.\, \operatorname{tang} z_a \,.\, \sin(\chi_1 - \chi_2)}{\sin(\varphi_1 + \chi_1 - \varphi_2 - \chi_2)} + a,$$

$$H = \frac{\sqrt{c^2 - (a-b)^2} \,.\, \operatorname{tang} z_b \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \chi_1 - \varphi_2 - \chi_2)} + b.$$

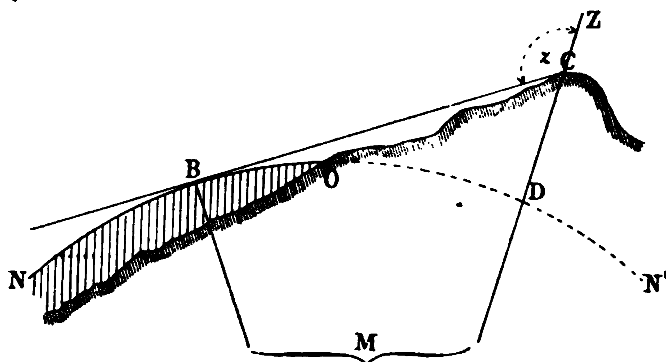
Korrektionen beim trigonometrischen Höhenmesser. Daß eine Messung solcher Art, bei der eine ganze Anzahl von Höhenwinkeln bestimmt werden muß, von den *Refraktionsfehlern* sorgfältig zu befreien ist, liegt auf der Hand. In den ausführlichen geodätischen Werken werden denn auch diese Fehler samt den zugehörigen Korrekturen einläßlich besprochen [1]). Wir an dieser Stelle können natürlich darauf nicht eingehen.

---

[1]) v. Bauernfeind, a. a. O., 2. Band. S. 336 ff.; Jordan. a. a. O., 2. Band. S. 437 ff. Die Notwendigkeit, die fragliche Korrektion überhaupt anzubringen, war bereits von Snellius (s. o.) eingesehen und hervorgehoben worden; auch Riccioli (s. o.) war sich hierüber klar, und es beruht deshalb auf einem Irrtum, wenn man mit J. C. Fischer (Geschichte der Physik seit Wiederherstellung der Künste und Wissenschaften bis auf die neuesten

Auch von der *Krümmung der Erde* haben wir bisher abgesehen, indem wir die Flächen, in denen die Basis abgesteckt war, als eben voraussetzten. Wenn der Berg, dessen Vertikalabstand von der nächst benachbarten Meeresfläche ermittelt werden soll, dieser nahe genug gelegen ist, um das Wasser vom Gipfel aus zu erblicken, so kann die *Methode der Messung der Horizontaldepression* [1]) zur Anwendung gelangen [2]). *M (Fig. 102)* ist der Erdmittelpunkt, *CD* die zu messende Berghöhe *H*, und in *C*

Fig. 102.



sei der Winkel $BCZ = z$ gemessen, welche eine von *C* aus an die Wasserfläche gelegte Tangente mit der Zenitalrichtung *CZ* einschließt. Statt *z* ist, unter *P* die Refraktion verstanden, ein Winkel $(z + P)$ in Rechnung zu bringen. Das Dreieck *MCB* ist in *B* rechtwinklig, und

Zeiten, 2. Band, Göttingen 1882. S. 150) die erste Anregung hierzu in Hookes „Micrographia" (London 1665. S. 236) nachweisen zu können glaubt.

[1]) Man übersieht leicht, daß, von der Strahlenbrechung abgesehen, hier dieselbe Formel gebraucht wird, deren wir uns früher (S. 219) zur angenäherten Bestimmung des Erdradius bedienten. Damals war *r*, diesmal ist *H* die Unbekannte.

[2]) v. Bauernfeind, a. a. O., 2. Band. S. 334 ff.

man hat also, wenn r seine wohlbekannte Bedeutung beibehält[1]),

$$\frac{r}{r+H}=\sin[180^0-(z+P)];\ H=r\frac{\sin^2\left(45^0-\frac{z+P}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}(z+P)\cos\frac{1}{2}(z+P)}.$$

Alles in allem ist die trigonometrische Höhenmessung, selbst wenn man dabei alle von der Geodäsie geforderten Kautelen anwendet, niemals in gleichem Grade zuverlässig, wie dies der nivellitischen Methode nachgerühmt werden kann. Jenes große „trigonometrische Nivellement" zwischen Swinemünde und Berlin, welches im Sommer und Herbst 1835 durch v. Baeyer auf Humboldts und Bessels Anregung vorgenommen ward, wird durch ein gewöhnliches Lattennivellement (s. o.) *mit kurzen Zielweiten* jetzt leicht in Schatten gestellt werden[2]).

---

[1]) Man kann der obigen Formel leicht noch eine andere, für die logarithmische Auswertung vielleicht noch geeignetere Gestalt erteilen. Für einen beliebigen Winkel α gelten nämlich die folgenden Identitäten:

$$1-\sin\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\cos\alpha\,.\frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\left(\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^2}$$

$$=\cos\alpha\,.\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\alpha}=\cos\alpha\,.\frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\cos\alpha\operatorname{tang}\left(45^0-\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Dividiert man auf beiden Seiten mit $\sin\alpha$, setzt für α den Wert $(z+P)$ und substituiert endlich in der obigen Gleichung, so erhält man

$$H=r\operatorname{cotang}(z+P)\operatorname{tang}\left[45^0-\frac{1}{2}(z+P)\right].$$

So drückt u. a. v. Bauernfeind (s. o.) diese Relation aus.

[2]) Jordan, Ueber die Methoden etc., S. 201 ff.

Wesen und Geschichte der barometrischen Höhenmessung. „Besäßen wir," so sagt Peschel[1]) bei Besprechung des trigonometrischen Höhenmessens, „kein anderes Verfahren für Höhenmessungen, so würde sich unser Wissen von den Unebenheiten der Erdoberfläche nur spät und langsam haben vermehren lassen. Glücklicherweise lernte man sich eines Werkzeuges bedienen, welches rasch und bequem die Dienste der Dreiecksmessungen vertrat." Leider ist dieser Ausspruch nur sehr bedingt richtig, denn wenn es auch mit der Raschheit und Bequemlichkeit seine Richtigkeit hat, so kann doch, wie wir jetzt sehr genau wissen, die Präzision des immerhin nur indirekten Verfahrens unter keinen Umständen derart gesteigert werden, um wirklich als vollwichtiger Ersatz für die Triangulation zu dienen. Es wird dies leicht einleuchtend werden, wenn wir jetzt zur Darlegung der Grundsätze fortschreiten, auf denen das *Höhenmessen mit dem Barometer* beruht.

Bald nachdem Torricelli den Druck der Luft durch das Experiment erwiesen und im Anschlusse daran Viviani das *Barometer* — den *Luftschweremesser* — konstruiert hatte[2]), verfiel der französische Mathematiker Pascal auf den glücklichen Gedanken, das neue Instrument altimetrisch auszunützen[3]). Je stärker die Luft auf den offenen Schenkel der gebogenen Röhre drückt, in welcher sich die markierende Flüssigkeit befindet, um so höher steigt dieselbe in dem geschlossenen Schenkel, und ebenso wird ein Nachlassen des Luftdruckes sofort durch das Sinken der Flüssigkeitssäule in letzterem Schenkel angedeutet werden. Als Füllflüssigkeit dient heute aus-

---

[1]) Peschel-Ruge, a. a. O., S. 688.

[2]) Gewöhnlich werden die Verdienste der beiden Schüler Galileis nicht richtig auseinandergehalten, indessen muß Viviani als derjenige bezeichnet werden, der für die Idee des Freundes zuerst den technischen Ausdruck fand (Poggendorff, Gesch. d. Phys., S. 324).

[3]) Die hier in Frage kommenden Schriften Pascals sind: Expériences nouvelles touchant le vide, Paris 1647; Traité de l'équilibre des liqueurs, ebenda (posthum) 1663.

schließlich *Quecksilber*[1]). Denken wir uns nun die Atmosphäre absolut bewegungslos, so wird die Dichte und damit auch der Druck, den die Luft ausübt, in dem Maße kleiner werden, je weiter man sich vom Erdmittelpunkte, d. h. vom Erdboden entfernt: *mit zunehmender Höhe muss das Quecksilber in der Barometerröhre mehr und mehr sinken.* Das ergab sich Pascal bereits beim Besteigen eines der Türme von Notre-Dame zu Paris und noch weit deutlicher, als Perier den Puy de Dôme in der Auvergne bestieg[2]). Da man sonach im Barometerstande ein durchaus zuverlässiges Maß für den Druck der Luft besaß, so handelte es sich für die Zwecke der Höhenmessung nur noch um folgendes: *Nach welchem Gesetze nimmt der Luftdruck ab, wenn die Seehöhe wächst?*

Dieses Gesetz kannte Pascal noch nicht, und es dauerte noch geraume Zeit, bis es in korrekter Form ausgesprochen wurde. Den Grund zur Möglichkeit der Aufdeckung des Kausalzusammenhanges legte die Entdeckung des uneigentlich nach Mariotte benannten, richtiger nach Boyle zu benennenden Gesetzes[3]), welches folgendermaßen ausgesprochen werden kann: *Das Volumen irgend eines Gases ist umgekehrt proportional dem auf diesem lastenden Drucke*[4]). Jedenfalls war es Mariotte,

---

[1]) Betreffs anderer barometrischer Füllungen sehe man nach die Angaben in des Verf. „Geophysik" (2. Band. S. 95).

[2]) Am Fuße des etwa 1000 m hohen Berges, nämlich in der Stadt Clermont, beobachtete Pater Chastin am 19. September 1648 eine Barometerhöhe von 26" 3½"', während Perier oben auf dem Berge nur 23" 2"' erhielt.

[3]) In seiner Polemik gegen Linus, der die Existenz des Luftdruckes bestreiten wollte, resp. in seiner diesem Zwecke dienenden Schrift „Defensio de elatere et gravitate aëris adversus objectiones Francisci Lini" (London 1661), umschrieb Boyle das aus seinen Versuchen unmittelbar hervorgehende Theorem, indem er allerdings dessen eigentliche Formulierung seinem Schüler Townley überließ (Poggendorff, a. a. O., S. 479). Mariotte hat von diesen Vorarbeiten schwerlich Kenntnis gehabt, als er seinerseits eine Versuchsreihe begann, durch welche die Kompression abgesperrter Gasmassen erforscht werden sollte. Näheres darüber in den „Oeuvres de Edme Mariotte" (Leyden 1717, 1. Band. S. 150 ff. S. 381 ff.).

[4]) Das Gesetz ist in dieser Formulierung nur angenähert richtig, und insbesondere stimmt es mit dem wirklichen Verhalten

der unverzüglich auch den von ihm selbständig gefundenen Satz auf die Theorie des barometrischen Höhenmessens anwandte und eine Formel aufstellte, deren numerische Behandlung zwar äußerst mühsam wird, die aber für nicht allzu große Höhen zu leidlich richtigen Resultaten verhilft[1]).

Die wahre *logarithmische Höhenformel* ist zuerst von Edmund Halley[2]) angegeben worden, und wirklich nach ihr gerechnet scheint erstmalig von dem Züricher Alpinisten J. J. Scheuchzer[3]) worden zu sein. Die Regeln Maraldis, Feuillées, J. Cassinis[4]) und selbst Daniel Bernoullis sind ausnahmslos geringwertiger als die einfache Regel Halleys[5]). Freilich fehlte noch viel daran,

---

der elastisch-flüssigen Körper um so weniger überein, je mehr diese sich dem Uebergange in den tropfbarflüssigen Aggregatzustand nähern. Eine allgemeinere, auch die Temperatur mit umfassende Einkleidung dieses Naturgesetzes ist von Kuhn (Ueber die Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur bei Gasen, Wien 1875) vorgeschlagen worden.

[1]) Mariottes Gedanke war es, die Zustandsänderungen der Luft innerhalb Schichten von je 5 Fuß Höhe als unwesentlich beiseite zu lassen. An der Erde sollte die normale Barometerhöhe von 336''' = 4032 Zwölftellinien herrschen, und alsdann waren die Beziehungen für die einzelnen Luftschichten und die ihnen entsprechenden Höhen durch folgendes Schema gegeben:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Schicht:} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{Seehöhe:} & \frac{4032}{4032}\,.\,5 & \frac{4032}{4031}\,.\,5 & \frac{4032}{4030}\,.\,5 & \frac{4032}{4029}\,.\,5\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} \text{Schicht:} & n & n+1 \\ \text{Seehöhe:}\ \ldots & \frac{4032}{4032-n}\,.\,5 & \frac{4032}{4032-n-1}\,.\,5\ldots \end{array}$$

[2]) Halley, Discourse of the Rule of the Decrease of the Height of the Mercury in the Barometer, according as Places are elevated above the Surface of the Earth, Philosoph. Transact., 1686. S. 104 ff.

[3]) Scheuchzer, Naturgeschichten des Schweizerlandes, 3. Band, Zürich 1708. S. 152 ff.

[4]) Wegen dieser verschiedenen Regeln vgl. Poggendorff (a. a. O., S. 738).

[5]) Nach Mariotte berechnete Scheuchzer die Meereshöhe von Zürich zu 1638, nach Cassini de Thury zu 1828 Pariser Fuß. Eine Differenz von nahezu 200 Fuß!

daß diese letztere bei all ihrer theoretischen Richtigkeit auch als eine praktisch brauchbare gelten konnte, denn eine Menge von Einflüssen, welche Berücksichtigung erheischen, war zur Zeit noch vollständig ignoriert worden. Es war Deluc, der nach dieser Seite hin bahnbrechend vorging und in einer zusammenhängenden Reihe von Arbeiten die vielen Faktoren klarlegte [1]), welche bei der Berechnung barometrischer Messungen mitspielen, und ihm stellte sich sein Landsmann Saussure in diesem Streben zur Seite [2]). Mit den kräftigen Hilfsmitteln seiner Analyse stellte Laplace [3]) eine neue barometrische Formel auf, die nach der empirischen Seite hin zu prüfen und zu verifizieren sich Ramond besonders angelegen sein ließ [4]). Die in neuerer Zeit als notwendig erkannten

[1]) Das fundamentale Werk Delucs sind die „Recherches sur les modifications de l'atmosphère" (Genf 1772; ins Deutsche übertragen, Leipzig 1776—78). Im vierten Abschnitte wird zuerst der Einfluß der am oberen und unteren Beobachtungsorte herrschenden Temperatur in die Höhenformel eingeführt (s. u.).

[2]) Saussure ist bekanntlich der erste Montblanc-Besteiger. Die von ihm ausgeführte barometrische Messung dieses höchsten Berges von Europa verschaffte der Methode und der Delucschen Formel, nach welcher die Rechnung ausgeführt ward, hohe Achtung in Fachkreisen, da die ermittelte Meereshöhe von 2450 Toisen sich als eine für den ersten Versuch sehr befriedigende erwies. Die Korrespondenzablesungen hatten Saussures Sohn in Chamouni und Senebier in Genf gemacht. Vgl. den dritten Band der für die Physik der Erde nach den verschiedensten Seiten hin hochbedeutsamen „Voyages dans les Alpes" (Neuchatel 1779—96).

[3]) Laplace, Traité de mécanique céleste, vol. IV, Paris 1805. S. 290.

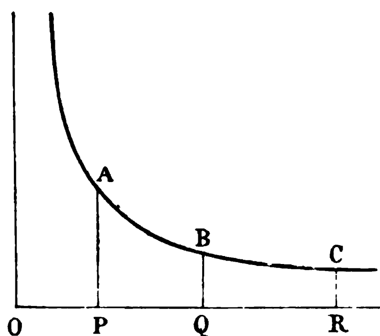
[4]) Die — häufiger zitierten als gelesenen — Arbeiten Ramonds erschienen gesammelt 1811 zu Clermont-Ferrand unter dem Titel „Mémoires sur la formule barométrique de la mécanique céleste et les dispositions de l'atmosphère qui en modifient les propriétés." Es werden zuerst Beobachtungen diskutiert, welche der Autor an Pyrenäenbergen zur schärferen Bestimmung der Laplaceschen Konstante gemacht hatte; sodann geht es an eine Untersuchung der aus den verschiedenen Tagesstunden, der Lage des Beobachtungsortes und den atmosphärischen Zuständen resultierenden Einwirkungen; an dritter Stelle folgt eine Erörterung der täglichen Barometerschwankungen, an vierter die Zurückweisung der von Prony im Gegensatze zu Laplace vorgeschlagenen Konstante, und zuletzt endlich gibt Ramond eine zusammenfassende, über-

Verfeinerungen wollen wir erst dann ins Auge fassen, wenn wir die Höhenformel selbst kennen gelernt haben werden.

Ableitung der einfachen barometrischen Höhenformel. Der Satz, auf dessen Beweis es uns ankommt, läßt sich aussprechen, wie folgt: *Versteht man unter* b_1 *die am höher, unter* b_2 *die am niedriger gelegenen Orte gemachte barometrische Ablesung, so dass also* $b_1 < b_2$ *ist, so ist die Höhendifferenz dieser beiden Orte* $H = Konst. \log \frac{b_2}{b_1}$. Zur Bewahrheitung stehen uns drei Wege offen.

I. Beweis von Halley. In der vorhin zitierten Abhandlung stellt Halley die Luftschweren in verschie-

Fig. 103.



denen Höhenpunkten, resp. die ersteren proportionalen Barometerstände durch die auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes *(Fig. 103)* abgetragenen Strecken OP, OQ, OR dar und konstruiert als-

---

sichtliche Anweisung zum Höhenmessen mit dem Barometer. In vielen Hinsichten greift Ramond den späteren Arbeiten auf diesem Gebiete vor.

dann eine gleichseitige Hyperbel, welche die Achsen zu Asymptoten hat. Errichtet man in P, Q, R Senkrechte, welche den verzeichneten Hyperbelast resp. in A, B, C schneiden, so entfließen aus dem Bildungsgesetze genannter Kurve die folgenden Gleichungen:

$$OP \,.\, AP = OQ \,.\, BQ = OR \,.\, CR = c.$$

Unter c wird eine konstante Größe verstanden. Man hat also die Proportionenkette $OP : OQ : OR = \frac{1}{AP} : \frac{1}{BQ} : \frac{1}{CR}$, und es sind demnach, dem Boyleschen Gesetze zufolge, die Strecken AP, BQ, CR die Maßzahlen für die Volumina der zwischen den den einzelnen Höhen entsprechenden Niveauflächen gelegenen Luftschichten. Diesen Luftschichten sind deren Höhen oder Dicken proportional, und die Gesamthöhe der Schicht, welche resp. durch die Barometerstände OP und OQ abgegrenzt erscheint, ist gleich dem Aggregate aller Ordinaten zwischen AP und BQ, d. h. gleich dem Flächenraume des gemischtlinigen Trapezes $APQB$. Dieses aber ist gleich $c \log \frac{OQ}{OP}$, und damit ist der Lehrsatz geometrisch erhärtet.

II. Beweis durch Infinitesimalrechnung. Ganz ungleich schneller führt natürlich die höhere Analysis zum Ziele. Der Luftdruck ist umgekehrt proportional dem Volumen, somit ist, wenn b den variierenden Barometerstand bezeichnet, k aber eine gewisse Konstante bedeutet, der Zuwachs der Höhe[1]) mit der Abnahme db des Druckes durch die Gleichung $dh = k \,.\, \frac{db}{b}$ verknüpft. Wir integrieren beiderseits und finden $h = k \log b + \text{Konst.}$ Den Höhen h_1 und h_2 $(h_1 - h_2 = H)$ entsprechen die Barometerstände b_1 und b_2, somit ist $H = k\,(\log b_1 - \log b_2)$.

III. Elementarer Beweis. Obwohl nicht durch Strenge ausgezeichnet, scheint sich diese Art und Weise, den Zu-

[1]) Die Höhe H wird selbstredend vom Meeresspiegel aus gerechnet.

sammenhang klarzustellen, doch durch ihre Leichtfaßlichkeit zu empfehlen, und aus diesem Grunde sehen wir dieselbe auch in populären Lehrbüchern regelmäßig anderen Methoden vorgezogen [1]). Wir gehen möglichst allgemein vor und denken uns aus der über der Meeresfläche ruhenden Luft ein zylindrisches oder prismatisches Stück ausgeschnitten, welches durch äquidistante Horizontalflächen in Kammern von der gleichbleibenden Höhe l zertrennt sein möge. Wenn l sehr klein ist, so können wir annehmen, für das Innere jeder solchen Kammer sei der Stand des Barometers ein gleichbleibender, und dieser ändere sich bloß sprungweise an der Grenzfläche zweier nächst benachbarter Zellen. Der Normalstand an der Grenzfläche 0 sei b, der Stand an der Grenzfläche 1 aber $(b-1)$, dann haben wir, wenn b_0, b_1, $b_2 \ldots b_i$ resp. die an den den Indizes entsprechenden Grenzflächen obwaltenden Barometerstände sind, auf Grund des Boyle-Mariotteschen Gesetzes die nachstehenden Proportionen:

$$b_2 : b_1 = b_1 : b_0, \quad b_3 : b_2 = b_2 : b_1 \ldots b_{i+1} : b_i = b_i : b_{i-1} \ldots$$

Wir rechnen aus, setzen für b_0 und b_1 die uns bekannten Werte ein und überzeugen uns so von der Richtigkeit folgender Thatsachen:

An der Grenzfläche

0	herrscht der Barometerstand	$b_0 = b = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^0$,
1	„ „ „	$b_1 = b - 1 = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^1$,
2	„ „ „	$b_2 = \frac{b_1^2}{b_0} = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^2$,
3	„ „ „	$b_3 = \frac{b_2^2}{b_1} = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^3$
. . . . .	. . . .	. . . .
$i+1$	„ „ „	$b_{i+1} = \frac{b_i^2}{b_{i-1}} = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^{i+1}$.

---

[1]) Genau anzugeben, von wem zuerst diese elementare Herleitung in Vorschlag gebracht ward, sind wir außer stande. Wir

Nunmehr sei in der Höhe $h_2 = ln_2$ der Barometerstand b_2 und in der Höhe $h_1 = ln_1$ der Barometerstand b_1 abgelesen; dann ist, unsere bisherige Bezeichnung beibehalten,

$$H = h_1 - h_2 = l(n_1 - n_2).$$

Diese Differenz $(n_1 - n_2)$ läßt sich nun aber nach unserem Schema leicht durch b_1 und b_2 ausdrücken, denn wir haben

$$b_1 = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^{n_1}, \quad b_2 = b \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^{n_2}.$$

Indem wir logarithmieren, finden wir

$$\log b_1 = \log b + n_1 [\log (b-1) - \log b],$$
$$\log b_2 = \log b + n_2 [\log (b-1) - \log b],$$
$$n_1 - n_2 = \frac{\log b_2 - \log b_1}{\log b - \log (b-1)}.$$

Den reziproken Wert des ein für allemal zu berechnenden Ausdrucks $(\log b - \log (b-1))$ multiplizieren wir mit l, setzen das Produkt $= k$ und bekommen so in bekannter Weise

$$H = k (\log b_2 - \log b_1) = k \log \frac{b_2}{b_1} = - k \log \frac{b_1}{b_2}.$$

Allein, wie schon bemerkt, repräsentiert der Ausdruck nur sozusagen den *Grundstock* der barometrischen Höhenformel; damit dieselbe den in der Natur wirklich bestehenden Verhältnissen sich genau anschmiege, sind mit obigem Ausdrucke noch sehr viele verschiedene Glieder multiplikativ zu verbinden, denen wir jetzt auch unsererseits näher treten wollen.

Die genaue barometrische Höhenformel. Nachdem Deluc (s. o.) und Laplace (s. o.) bereits einige

---

fanden dieselbe zuerst in Gamaufs „Erinnerungen aus Lichtenbergs Vorlesungen über die physikalische Geographie“ (Wien-Triest 1818. S. 459 ff.). Allerdings ist die Entwicklung daselbst eine etwas weitschweifige, allein der Grundgedanke ist doch der gleiche.

von diesen Zusatzgliedern berücksichtigt hatten, stellten sich später, hauptsächlich durch die Untersuchungen von Bessel[1]), Rühlmann[2]) und v. Bauernfeind[3]) heraus, daß folgenden physikalischen Einflüssen Rechnung getragen werden müsse, die wir mit kurzen Bemerkungen hier zusammenstellen.

I. Die Temperaturen t_1 und t_2 des oberen und unteren Beobachtungsplatzes sind gewöhnlich verschieden; denkt man sich die Abnahme — für gewöhnlich — proportional der Höhe erfolgend und nimmt man ferner an, daß α der Ausdehnungskoeffizient der Luft sei, so ist α mal der Mitteltemperatur der additive Korrektionsausdruck. Unser obiger Logarithmus ist sohin mit $\left(1 + \alpha \,.\, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$ zu multiplizieren.

II. Die Erde ist keine stillstehende Kugel, sondern ein, wie wir hier antizipieren müssen, sich um seine (kleinste) Achse drehendes Ellipsoid. Die Quecksilberhöhe, die gemessen werden soll, ist bedingt durch die Anziehung, welche die Erde auf das Quecksilber ausübt, und diese wird um so größer sein, je weniger ihr die Schwungkraft entgegenwirkt. Es muß sonach ein Faktor beigefügt werden, welcher eine Funktion der geographischen Breite φ darstellt, und zwar kann derselbe, unter β eine neue Konstante verstanden, gleich $(1 + \beta \cos 2\varphi)$ gesetzt werden.

III. Die richtige Art, dem Einflusse der atmosphärischen Feuchtigkeit gerecht zu werden, ist von Bessel

---

[1]) Bessel, Ueber barometrische Höhenmessungen, Astronom. Nachr., Nr. 357.

[2]) Rühlmann, Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre, Leipzig 1870.

[3]) Spezieller wird auf dasjenige, was v. Bauernfeind für dieses Problem geleistet hat, erst im nächsten Paragraphen einzugehen sein; vorläufig halten wir uns nur an die Ableitung der einzelnen Korrektionsglieder, welche in den „Elem. d. Vermessungskunde“ (2. Band. S. 392 ff.) mit großer Ausführlichkeit und Sorgfalt gegeben ist und deshalb auch uns zu hauptsächlichster Richtschnur gedient hat.

(s. o.) vorgezeichnet worden. Die Dichtigkeit des Wasserdampfes, mit Beziehung auf trockene Luft, sei $\delta = \frac{5}{8}$. Wenn σ_1 die Dampfspannung am oberen, σ_2 die am unteren Beobachtungsorte bedeutet [1]), so ist, wie a. a. O. gezeigt wird, die Größe

$$1 + (1 - \delta)\left(\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2}\right)$$

diejenige, welche als Korrektion für den atmosphärischen Wassergehalt zu gelten hat.

IV. Bislang ward angenommen, daß b_1 und b_2 ohne weiteres das Maß des Luftdruckes selbst abgäben. Ganz richtig jedoch ist dies nicht, vielmehr tritt dies erst dann ein, wenn man die Quecksilbertemperaturen t'_1 und t'_2 an beiden Stationsorten abliest, mit deren Hilfe auf 0^0 reduziert und dabei zugleich die Abnahme der Schwere mit der Höhe in Betracht zieht. m soll den Modul des Briggsschen Logarithmensystemes [2]) vorstellen, alsdann ist, unter γ wieder eine neue Konstante gedacht, die Größe

$$\gamma\,(t'_1 - t'_2) - 2m \,.\, \frac{H}{r}$$

diejenige, welche von $\log \frac{b_2}{b_1}$ noch subtrahiert werden

---

[1]) Die Dampfspannung wird mittelst des *Augustschen Psychrometers* gemessen; vgl. z. B. van Bebber, Lehrbuch der Meteorologie, Stuttgart 1890. S. 111 ff.

[2]) Alle Logarithmen, deren wir bisher gedachten, waren *natürliche*, auf die Basis $e = 2{,}78\ldots$ bezügliche, während für die Rechnung nur die von Briggs erfundenen *künstlichen* Logarithmen mit der Grundzahl 10 sich eignen. Wenn nun a der künstliche und x der natürliche Logarithme ein und derselben Zahl b ist, so hat man $10^a = b$ und $e^x = b$, d. h. $10^a = e^x$, und wenn beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen werden, so ist $a \,.\, {}^e\!\log 10 = x$, während zugleich $a = {}^{10}\!\log b$ ist. Schafft man a weg, so verbleibt ${}^{10}\!\log b = {}^e\!\log b \,.\, \frac{1}{{}^e\!\log 10}$, und man kann deshalb aus dem natürlichen Logarithmen einer Zahl sofort deren künstlichen ableiten, indem man ersteren mit der konstanten Zahl $({}^e\!\log 10)^{-1}$ multipliziert. Dieser Bruch ist der oben genannte *Modulus*.

muß. Ziehen wir nur geringfügige Höhen in Betracht, so darf der Bruch $\frac{H}{r}$ als unerheblich vernachlässigt werden.

Indem wir die vier Ergänzungsglieder beifügen, stellt sich uns demgemäß die vollständige barometrische Höhenformel v. Bauernfeinds in folgender Gestalt dar[1]):

$$H = \text{Konst.} \left[1 + \frac{1}{2} \alpha (t_1 + t_2)\right]$$
$$\times (1 + \beta \cos 2\varphi) \left[1 + \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2}\right)\right]$$
$$\times \left[\log \frac{b_2}{b_1} - \gamma (t'_1 - t'_2) + 2m \cdot \frac{H}{r}\right].$$

Die Konstante hat im Metermaße den Wert 18405.

In praktischen Fällen wird die von dieser exakten Formel dargebotene Genauigkeit nur ausnahmsweise erstrebenswert erscheinen. Man hat deshalb mancherlei Vereinfachungen vorgeschlagen, zu denen hauptsächlich die Radausche[2]) und die Köppensche[3]) Barometerformel gehören. Nach letzterer kann kürzer

$$H = \left[18460 + 72 \left(t + \frac{45 - \varphi}{52}\right)\right] \log \frac{b'_2}{b'_1}$$

---

[1]) Etwas anders sieht die Formel bei Rühlmann (s. o.) und bei Jordan (a. a. O., 2. Band. S. 523) aus, doch ist die Divergenz keine den Kern der Sache treffende. Die Anziehung des Gebirges zu beachten, hat Jordan (ebenda, S. 553) nicht für notwendig befunden, worin ihm Helmert (a. a. O., 2. Band. S. 609) beipflichtet, weil ja eben das Geoid diesmal die Messungsbasis bildet.

[2]) Radau, Sur la formule barométrique, Moniteur scientifique, (2) vol. I. S. 337 ff.

[3]) Köppen, Bemerkungen über die vertikale Verteilung des Luftdruckes, Zeitschr. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol., 1882. S. 81 ff. Die Barometerstände b_1' und b_2' unterscheiden sich von den direkt abgelesenen Zahlen b_1 und b_2 darin, daß bereits eine Reduktion auf 0° C. stattgefunden hat. Von der Reduktion auf gleiche Schwere, wie sie in der Hauptformel für notwendig erachtet ward, ist dagegen hier Abstand genommen worden.

gesetzt werden, indem *t* die Mitteltemperatur der in Frage kommenden Luftsäule repräsentiert. Durch graphischen Kalkul die Aufgabe zu lösen, hat Symons[1]) gelehrt, wie auch andererseits Schubring[2]) ein Diagramm zur Reduktion beliebiger Barometerstände auf den Meereshorizont konstruierte.

Die altimetrische Arbeit wird dem Geographen und Forschungsreisenden wesentlich erleichtert durch *barometrische Tafeln.* Die einzelnen Glieder, durch deren Produkt die barometrische Hauptformel entsteht, können in Hilfstafeln zusammengestellt werden. Solche haben wir bereits aus älterer Zeit; diejenigen Tob. Mayers[3]) sind allerdings nicht im Drucke herausgekommen, aber Oltmanns[4]) trat schon zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts mit einem solchen Werke hervor, und ihm

---

[1]) Symons, Pocket Altitude Tables, London 1876. S. 11.

[2]) Schubring, Reduktion des Barometerstandes auf den Meeresspiegel mit Hilfe einer graphischen Tafel, D. meteorol. Zeitschrift, 3. Jahrgang. S. 521 ff. Diese Operation ist unerläßlich bei der Verzeichnung der *Isobaren* oder Ortskurven gleichen Luftdruckes, weil nur so homogenes und vergleichbares Zahlenmaterial gewonnen wird.

[3]) Die Tafeln des älteren Tobias Mayer scheinen sich nach dem, was Hellmann (Repertorium der deutschen Meteorologie, Leipzig 1883. Sp. 325) darüber mitteilt, druckfertig im Nachlasse des berühmten Mathematikers vorgefunden zu haben. Vielleicht, ja wahrscheinlich hat dieselben Tob. Mayer der jüngere für seine „Physikalisch-mathematische Abhandlung über das Ausmessen der Wärme mit Rücksicht und Anwendung auf das Höhenmessen mit dem Barometer“ (Frankfurt a. M.-Leipzig 1776) verwerten können. Auf Grund dieser letzteren Vorlage hat Hollmann (s. H. Meyer, Die ersten barometrischen Höhenmessungen im Harz, D. meteorologische Zeitschrift. 4. Jahrgang. S. 183 ff.) seine am Brocken gemachten Beobachtungen berechnet und so für diesen Berg (um 1788) eine Höhe von etwa 2800′ (Par.) ermittelt, was freilich hinter der wahren Höhenkote (3057′) noch sehr erheblich zurückbleibt.

[4]) Oltmanns, Tables hypsométriques, dressées par le calcul des nivellements barométriques d'après la formule de Mr. Laplace, Paris 1809. Deutsche abgekürzte Ausgaben dieses Werkes brachten v. Zachs „Monatl. Korrespondenz“ (16., 19., 21. Band) und Gilberts „Annalen der Physik“ (38. Band).

folgten v. Lindenau[1]), Biot[2]), Gauß[3]), v. Lamont[4]), Plantamour[5]) und neuerdings besonders Schoder[6]). Auch Jordan hat seinem mehrgenannten Werke Tabellen der bezeichneten Art angehängt[7]).

Zum Schlusse möchten wir noch den, der tiefer in die Theorie und Praxis des barometrischen Höhenmessens einzudringen gedenkt — und wir wünschen, daß sich recht viele Geographen in diesem Falle befinden möchten —

---

[1]) v. Lindenau, Tables barométriques pour faciliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par le baromètre, Gotha 1809; vgl. auch die vorgenannten „Ann. d. Phys." (32. Band).

[2]) Biot, Tables barométriques portatives, Paris 1811. Wegen der inneren Anlage dieser Sammlung vgl. Jordan (a. a. O., 2. Band. S. 550).

[3]) Gauß, Tafeln fürs Höhenmessen mit dem Barometer, Berl. Astron. Jahrbuch für 1818 (Berlin 1815); Tafeln zur Berechnung der Höhen vermittelst des Barometers, Schumachers Astr. Jahrbuch für 1836.

[4]) Die Lamontschen Tafeln bilden den Anhang zu dem von diesem Astronomen herausgegebenen „Verzeichnis der vorzüglichsten im Königreiche Bayern gemessenen Höhenpunkte" (München 1851. S. 69 ff.).

[5]) E. Plantamour, Résumé des observations thermométriques et barométriques faites à l'observatoire de Genève et au Grand St.-Bernard pendant les dix années 1841 à 1850 suivi de tables hypsométriques, Genf 1851. Die Handlichkeit seiner Tafeln thut deren Verfertiger dadurch dar, daß er nach denselben in sehr einfachem, je nur eine halbe Quartseite einnehmendem Schema die Erhebung des St. Bernhard über Genf, sowie diejenige des Montblanc über dem St. Bernhard berechnet.

[6]) Schoder, Hilfstafeln zur barometrischen Höhenbestimmung, Stuttgart 1874. — Von anderen neueren Tafelwerken seien bei dieser Gelegenheit noch genannt: Neumeyer, Hilfstafeln für barometrische Höhenmessungen, München 1877 (eine aus der Praxis des militärisch-topographischen Dienstes hervorgegangene Arbeit) und Vogler-Feld, Graphische Barometertafeln zur Bestimmung von Höhenunterschieden durch eine bloße Subtraktion, Braunschweig 1880.

[7]) Jordan, a. a. O., Anhang, S. 13 ff. Besondere „Barometrische Höhentafeln" sind von Jordan auch separat (Stuttgart 1886) herausgegeben worden; dieselben geben direkt aus einer an beliebigem Orte gemachten Barometerablesung B die angenäherte Seehöhe nach der Formel (t Temperatur)

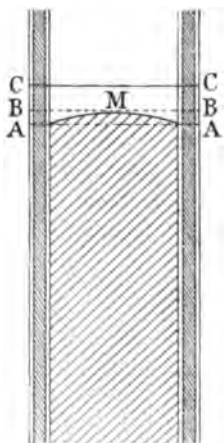
$$18464\,(\log 762 - \log B)\,(1 + 0{,}003665\,t).$$

Natürlich ist diese Formel nur so lange brauchbar, als die Temperatur sich innerhalb gewisser Grenzen (5^0 bis 35^0) bewegt.

auf einige Schriften hinweisen, die solchem Verlangen Genüge leisten. Wir nennen außer den viel benützten großen Kompendien v. Bauernfeinds und Jordans hauptsächlich die Leitfäden von Hartl[1]) und Schreiber[2]). Das letztere Werk wird auf keine den Gegenstand betreffende Frage die Antwort schuldig bleiben.

Kautelen beim barometrischen Höhenmessen. Selbst wenn auf alle die Punkte gebührend Rücksicht genommen ward, auf welche im vorstehenden aufmerksam gemacht worden ist, darf man die Aufgabe, eine exakte barometrische Höhenmessung zu liefern, noch nicht als abgeschlossen betrachten. Vielmehr sind zunächst noch bei der Ablesung des Barometerstandes selbst gewisse Vorsichtsmaßregeln unerläßlich.

Fig. 104.



Die Oberfläche des Quecksilbers in der Röhre ist bekanntlich keine horizontale, sondern es bildet sich infolge der sogenannten *Kapillardepression* eine konvexe Kuppe, ein *Meniskus*, heraus. Das Maß der Kapillardepression ist die lineare Größe, um welche, wenn keine gegenseitige Anziehung von Glas und Quecksilber bestände, die alsdann horizontal verlaufende Grenzfläche des Quecksilbers höher stehen würde, als jene Ebene, welche die Kuppe in deren höchstem Punkte tangiert. Man hat also bei jeder Ablesung auf zweierlei zu achten, wie aus *Fig. 104* ersehen werden mag. *M* ist hier die oberste Stelle der Flüssigkeitssäule, und wir haben uns durch *M* eine Tangentialebene *BB* an jene gelegt zu denken. Die

---

[1]) Hartl, Praktische Anleitung zum Höhenmessen mit Quecksilberbarometer und mit Aneroiden, Wien 1884.

[2]) Schreiber, Handbuch der barometrischen Höhenmessung, Weimar 1877.

Flüssigkeit und das Glas berühren sich längs der Peripherie eines Kreises, der in unserer Zeichnung durch AA dargestellt ist; man muß sich also wohl hüten, daß nicht beim Ablesen die Strecke AB vernachlässigt wird. Dann aber ist noch die eigentliche Kapillardepression BC in Rechnung zu bringen [1]). Beachtet man dieselbe, so kann der Fehler einer jeden Einstellung und Ablesung des Barometers leicht bis auf $\pm$ 0,1 mm herabgebracht werden, selbst wenn das Auge unbewaffnet ist. *Kathetometrische Beobachtung* [2]) steigert natürlich diese Genauigkeit beträchtlich.

Durchaus nicht gleichgiltig ist es fernerhin auch, *zu welcher Tageszeit* man die der Höhenberechnung zu Grunde gelegten Beobachtungen anstellt. Schon Saussure und Ramond (s. o.) hatten diese Frage gelegentlich in Erwägung gezogen, allein zu voller Klarheit darüber gelangte man erst durch die planmäßig ausgeführten Untersuchungen v. Bauernfeinds [3]). Aus diesen nämlich geht mit vollster Sicherheit hervor, daß die Ablesungen dann

---

[1]) Anschliessend an ältere Tafeln von Schleiermacher und Delcros (Ann. d. Phys. u. Chem., 60. Band. S. 377 ff.) hat auch Jordan (Anhang zu seinem Handbuch, S. 17) eine solche Tafel der Kapillardepression mitgeteilt.

[2]) Das Kathetometer ist nichts anderes als ein in den Experimentiersaal übertragenes Nivellierinstrument. Längs einer genau geteilten Vertikallatte bewegt sich ein stets horizontales Fernrohr in einem Schieber hin und her, und so kann man mit Leichtigkeit und Schärfe Höhendifferenzen messen.

[3]) Wir meinen hier die für die vorwürfigen Fragen in mehrfacher Beziehung grundlegende Schrift v. Bauernfeinds „Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre (München 1862). Hier wird dem Probleme sozusagen direkt auf den Leib gegangen: ein mittelhoher Alpenberg wurde vom Fuße bis zum Scheitel mehrfach nivelliert; in äquidistanten Teilpunkten der Höhe wurden Barometer und andere meteorologische Instrumente aufgestellt, und nun konnte man die barometrischen Messungen mit den von der Wahrheit nicht mehr nennenswert abweichenden nivellitischen direkt vergleichen. 233 Nivellierstationen waren im ganzen eingeschaltet, und auf jede derselben traf ein Fehler im Höchstbetrage von 0,2 Linien bayerisch (1′ = 10″ = 100‴).

mit bester Aussicht auf Zuverlässigkeit gemacht werden, *wenn man die Stunden gegen 10^h vormittags und gegen 4^h nachmittags hierzu wählt*[1]. Uebrigens hat man auch Mittel[2], um die zu anderen Tageszeiten gemessenen Lufttemperaturen — denn auf diese kommt es bei dem stets fluktuierenden Zustande der Atmosphäre (s. o.) ausschließlich an — so rechnerisch zu verbessern, als sei die Bestimmung in den Normalterminen erfolgt. Durch die an die eben genannten sich anschließenden Forschungen von Rühlmann[3] ist auch die Existenz einer *täglichen und einer jährlichen Periode der barometrischen Höhenkurve* außer Zweifel gesetzt worden.

Der Einfluß der *Windrichtung* auf die Schärfe einer barometrischen Messung ist früher vielfach überschätzt worden, so insbesondere von Kämtz[4]. In einer Abhandlung von Pick[5], welche wohl als eine der ersten das kritische Messer an die lange Zeit mit allzu großer Vertrauensseligkeit behandelte barometrisch-altimetrische Methode legte, wird auch dieser Punkt zum Gegenstande der Erörterung gemacht.

Höhenmessen mit dem Aneroide. Es war ausdrücklich bemerkt, daß alle Darlegungen der vorigen Paragraphen sich ausschließlich auf das Quecksilberbarometer beziehen sollten. Diesem aber ist in neuerer Zeit ein anscheinend sehr gefährlicher Konkurrent erstanden im *Metall-* oder *Federbarometer,* welches sich als Höhenmeßinstrument mehr und mehr einbürgert, zumal in den Kreisen der es wegen seiner Transportfähigkeit hoch schätzenden Touristen. Wir haben also auch dieses Werk-

---

[1] v. Bauernfeind, a. a. O., S. 75. Es ist zu bemerken, daß bei der Ermittlung der Normalstunden auch auf die Wärmestrahlung des Bodens bedacht genommen ward. Die vom Autor berechnete Fehlertafel zeigt, wie rasch zumal um Mittag der Fehler anwächst.

[2] Ebenda, S. 84.

[3] Rühlmann, a. a. O., S. 47 ff. S. 63 ff..

[4] Kämtz, Vorlesungen über Meteorologie, Halle 1840. S. 28.

[5] Pick, Ueber die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen, Sitzungsber. d. österr. Akad., Math.-Phys. Kl., 16. Band. S. 415 ff.

zeug kennen zu lernen und uns über seine Verwendbarkeit in der Altimetrie ein Urteil zu bilden.

Den Reigen der durch Veränderungen in der Gestalt eines elastischen Körpers den Luftdruck markierenden Barometer eröffnete das *„baromètre anéroide“* von Vidi[1]; es bestand aus einem luftleer gemachten Metallzylinder, der nach oben zu durch eine elastische Platte verschlossen war. Bei einem gewissen Normaldrucke der Luft bildet diese Platte eine horizontale Ebene; wird der Luftdruck geringer, so baucht sich der Deckel nach auswärts, wird der Luftdruck stärker, so baucht sich der Deckel nach einwärts auf. Die alternierende Bewegung des Mittelpunktes der elastischen Kreisscheibe wird durch ein Hebelwerk in eine drehende verwandelt, so daß ein Zeiger an einer Kreisskala die Stärke des momentanen Druckes angeben kann. Bald folgten Bourdon mit dem *„baromètre métallique“*, Naudet mit dem *„baromètre holostérique“* [2]); letzteres ist als eine Vervollkommnung des Vidischen Barometers anzusehen, während Bourdon ein etwas anderes Prinzip zur Geltung brachte. Ein hohle Metallröhre ist dergestalt kreisförmig gebogen, daß sie fast einen Vollkreis darstellt, daß also die beiden Enden der Röhre, in denen diese geschlossen ist, nur um einen ganz geringen — linearen wie angularen — Abstand auseinanderstehen. Symmetrisch zu den beiden Endpunkten liegt der Punkt, in welchem die Röhre befestigt wird. Wachsender Luftdruck läßt nunmehr die Enden der Röhre sich einander nähern, schwindender Luftdruck vergrößert die Entfernung dieser Enden, und wiederum übersetzt ein zweiarmiger Winkelhebel diese Oszillationen auf einen Zeiger, der über einem geteilten Limbus spielt.

---

[1]) Das Vidische Barometer findet sich, soweit Publikationen in deutscher Sprache in Frage kommen, zuerst beschrieben in Dinglers „Polytechn. Journal“ (1849, II. S. 107 ff.). Der Name rührt her von νηρός (feucht, naß) und dem α privativum; es ist also das der Flüssigkeit entbehrende Barometer durch dieses Wort ganz gut charakterisiert.

[2]) ὅλος bedeutet „ganz“, στερεός „fest“; die beste deutsche Uebersetzung von holostérique würde also wohl sein „ganz aus Festkörpern zusammengesetzt“.

Eine bedeutsame Modifikation des Vidischen Grundgedankens kam zur Geltung bei dem *Fühlhebelbarometer* von Goldschmidt[1]); die federnde Lamelle überträgt ihre Bewegungen auf einen einarmigen Hebel, dessen einer Arm sehr kurz, dessen anderer aber sehr lang ist, so daß des letzteren Endpunkt auch dann noch ziemlich große Wege beschreibt, wenn der von der Lamelle ausgehende Hub nur ein ganz geringfügiger war. Zur mikroskopischen Ablesung hat Reitz[2]) das Federbarometer eingerichtet. Wir werden uns, wie dies allgemeine Sitte geworden, der Bezeichnung *Aneroid* ohne besondere Rücksicht auf die spezielle Eigenart des Instrumentes bedienen, was zwar historisch (s. o.) nicht ganz, etymologisch aber vollauf zu rechtfertigen ist.

Die Graduierung der Skala eines Aneroidbarometers erfolgt niemals nach den theoretischen Vorschriften der Elastizitätslehre, obwohl dies sachlich keineswegs unmöglich wäre, sondern regelmäßig *durch Vergleichung mit einem Quecksilberbarometer.* Man sieht eben zu, wo sich der Zeiger bei einem gegebenen Stande des Vergleichsbarometers einstellt, und schreibt an diese Stelle die entsprechende Millimeter-Zahl.

Somit schiene es, als ob von vornherein ein Metallbarometer sich ebenso gut wie ein anderes für die Höhenmessung eignen müßte, allein es scheint doch nur so. *Das Aneroid ist Fehlern in weit höherem Masse unterworfen, als das Flüssigkeitsbarometer.* Ein, wie es fast scheinen möchte, irreparabler Mangel besteht darin, daß der elastische Festkörper, in dessen Gestaltsveränderungen wir ein Spiegelbild der Luftdruckschwankungen erblicken sollen, doch immer einen gewissen *Grad von Trägheit* besitzt und bei weitem nicht so rasch auf äußere Ein-

[1]) Das erwähnte Instrument ist von dem Züricher Mechaniker J. Goldschmidt schon 1857 erfunden, aber nicht hinsichtlich seiner Details bekannt gemacht worden. Letzteres geschah erst durch Koppe (Das Aneroidbarometer von Jakob Goldschmidt und das barometrische Höhenmessen, Zürich 1877).

[2]) Reitz, Ueber die Ausführung von Höhenmessungen nach dem Aneroidbarometersystem Reitz, Hamburg 1874.

wirkungen reagiert, wie die leicht bewegliche Flüssigkeitssäule. Dazu aber kommt noch die schwer zu kontrollierende *elastische Nachwirkung*, über welche neuerdings Schwirkus[1]) und Reinhertz[2]) Studien angestellt haben. Daneben verlangt noch eine ganze Anzahl von Fehlern Berücksichtigung, denen der Beobachter mit größerer Aussicht auf Erfolg entgegenzuarbeiten in der Lage ist. Diese Fehler sollen, da ihre Kenntnis zumal für den im Terrain hypsometrisch arbeitenden Geographen von höchster Wichtigkeit ist, im folgenden kurz besprochen werden[3]). Es sind deren vornehmlich drei, und also sind auch bei jeder Aneroidablesung drei Korrektionen in Rechnung zu bringen.

I. Die Standkorrektion. Man lese unter der Voraussetzung[4]), daß der herrschende Luftdruck der normale und ebenso die herrschende Temperatur die normale ist, im selben Augenblicke den Stand B_0 des Feder- und den Stand B_1 des Quecksilberbarometers ab. Die Differenz $(B_1 - B_0)$ oder auch, da B_1 gewöhnlich mit einem Stande von 760 mm identifiziert wird, $(760 - B_0)$ ist die Stand-

---

[1]) Schwirkus, Neue Gesichtspunkte für die Konstruktion der Aneroidbarometer und Manometer, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 1883. S. 89 ff.

[2]) Reinhertz, Ueber die elastische Nachwirkung beim Federbarometer, ebenda 1887. S. 153 ff.

[3]) Auf die gegen Aneroidmessungen bestehenden Bedenken wurde kräftig hingewiesen von Höltschl (Die Aneroide von Naudet und von Goldschmidt, Wien 1872), worin u. a. betont ward, daß der Gang des Zeigers beim Besteigen eines Berges oft ein ganz anderer ist, als beim Hinabsteigen (a. a. O., S. 82), und daß schon eine längere Eisenbahnfahrt den Standfehler des empfindlichen Instrumentes zu verändern vermag. Theoretisch und experimentell beleuchtet die Fehlerfrage eine Schrift v. Bauernfeinds (Beobachtungen und Untersuchungen über die Eigenschaften und die praktische Verwertung der Naudetschen Aneroidbarometer, München 1874). Die Konstanten sind hier durch Versuche mit Manometer und Luftpumpe — vgl. zu letzteren Höltschls Bemerkungen (a. a. O., S. 219 ff.) — genau ermittelt worden.

[4]) Da diese Voraussetzung nur in den seltensten Fällen wirklich erfüllt sein wird, so hat man eben die Reduktion auf Normaldruck und Normaltemperatur rechnerisch auszuführen.

korrektion x, welche mit ihrem Vorzeichen jedweder Ablesung hinzugefügt werden muß.

II. Die Teilungskorrektion. Die Skala jedes Metallbarometers ist in gleiche Teile eingeteilt, allein die dem entsprechende Annahme, daß die Bewegung des Zeigers sich genau proportional den Veränderungen des Luftdruckes vollziehe, ist nur angenähert richtig. Die zur Ausgleichung des entstehenden Fehlers anzubringende Korrektion hat den Wert $b(760 - B_1)$, wo b eine durch Versuche vorher zu ermittelnde Konstante bedeutet.

III. Die Temperaturkorrektion. Dieselbe hängt ab von der Beschaffenheit des Metalles, aus welchem der elastische Markierungskörper angefertigt ist. Wenn a den Temperaturkoeffizienten vorstellt, so ist bei t^0 die Temperaturkorrektion gleich at.

Um somit, wenn irgend eine Ablesung B'_0 am Aneroide gemacht ist, die derselben gleichwertige Ablesung B'_1 am Quecksilberbarometer zu erhalten, hat man von der Gleichung

$$B'_1 = B'_0 + 760 - B_0 + b(760 - B_1) - at$$

Gebrauch zu machen [1]). Die Temperaturkorrektion kann übrigens bei jenen *Kompensationsaneroiden,* welche seit einigen Jahren aus der Werkstätte des Berliner Mechanikers Bohne hervorgehen [2]), als verschwindend betrachtet werden.

Zur Berechnung der Aneroidbeobachtungen dienen besondere Hilfstafeln, die auf Grund einer von der Laplace-Bauernfeindschen einigermaßen verschiedenen

---

[1]) Bei Jordan (a. a. O., 2. Band. S. 494 ff.) wird diese Gleichung einläßlich diskutiert und namentlich auch die Möglichkeit erörtert, daß die einzelnen oben angeführten Korrektionsglieder nur die Anfangsglieder von Reihen wären, von denen, wenn es sich um größere Präzision handle, eine größere Anzahl von Termen berücksichtigt werden müßte.

[2]) Wegen des noch wenig bekannt gewordenen Bohneschen Kompensationsverfahrens ist zu vergleichen: Löwenherz, Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, Berlin 1880. S. 122.

Formel berechnet sind [1]). Dem Geographen verdienen die Tabellen von Frischauf [2]) und von Mohn [3]) besonders empfohlen zu werden. Wer aber mit dem Aneroide arbeitet, der hüte sich davor, seinen Resultaten einen Wert beizulegen, den sie nicht haben können, messe häufig den nichts weniger denn unveränderlichen Standfehler nach und vergegenwärtige sich stets die durch v. Bauernfeind [4]) ermittelte Erfahrungsthatsache: *Die Güten derselben mit Quecksilber- und Federbarometer gemessenen Höhe verhalten sich unter sonst gleichen Umständen zu einander wie 17 : 10.*

Die thermometrische Höhenmessung. Dieselbe erscheint zum Schlusse als einfaches Korollar der barometrischen. Nach E. Schmid [5]) hat zuerst Deluc die Wahrnehmung gemacht, daß der Siedepunkt einer Flüssigkeit in größerer Höhe sich erniedrige. Am Meeresufer siedet Wasser bekanntermaßen bei 100° C., in Quito (2850 m über dem Meere) bei 90°, auf dem Montblanc (4480 m) bei $85\frac{1}{2}$° [6]). Der Grund dieser Erscheinung ist leicht einzusehen. Jede Wärmezuführung veranlaßt die Moleküle eines Körpers zu lebhafterer Bewegung, und diese letztere wird, wenn die Temperatur des *Siedepunktes* erreicht ist, so energisch, daß die der Oberfläche benachbarten Flüssigkeitsteilchen sich aus dem Zusammenhange mit der Masse, der sie bisher angehörten, losreißen

[1]) Die betreffende Formel besitzt, wie wir uns erinnern, ein der radialen Abnahme der Erdschwere Rechnung tragendes Glied. Hier aber handelt es sich bloß um die Federkraft der Metalle, und von einer Rücksichtnahme auf die Attraktion des Erdkörpers ist daher keine Rede mehr.

[2]) Frischauf, Tafeln zur Berechnung barometrischer Höhenmessungen, Wien 1877.

[3]) Mohn, Praktisk veiledning til høidemaaling med barometer, Christiania 1888. Zumal die Menge ganz durchgerechneter Zahlenbeispiele sichert diesem Werkchen einen hohen Wert.

[4]) v. Bauernfeind, Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen, München 1883. S. 17.

[5]) E. E. Schmid, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig 1861. S. 832.

[6]) Eisenlohr, Lehrbuch der Physik, Stuttgart 1870. S. 472.

und in die Atmosphäre übergehen. Dieser Trennungsprozess wird ihnen um so schwerer gemacht, je stärker die Luft auf der Flüssigkeitsoberfläche lastet; läßt aber der Luftdruck nach, so bedarf es geringerer Wärmezufuhr, um das Stadium des Siedens herbeizuführen. Der Druck der Luft wird bei zunehmender Höhe immer geringer, es stellt sich also folgendes heraus: *Die Siedetemperatur einer Flüssigkeit gibt ein Mass zur Beurteilung der Stärke des Luftdruckes und damit zugleich der Höhe über dem Meere.*

Bald nach Delucs erster Andeutung[1]) trat Cavallo[2]) mit einem zum Höhenmessen aptierten *Kochthermometer* hervor, der dann durch Wollaston[3]) vereinfacht und verbessert wurde. Auch die späteren Hypsothermometer von Regnault, Magnus u. s. w. sind im wesentlichen übereinstimmend mit dem Wollastonschen Modell. Ein gewöhnliches, feines Thermometer[4]) kann auf ein metallenes Kochgefäß aufgeschraubt werden, welches destilliertes Wasser enthält, und dieses kann durch eine Flamme oder — in sehr großen Höhen — durch glühende Kohlen zum Sieden gebracht werden. Für die sich entwickelnden Dämpfe ist ein besonderes Abzugsrohr mit Klappverschluß angebracht. Um das Instrument bequem transportieren zu können, führt man es in zwei getrennten Teilen mit sich; will man eine Beobachtung machen, so stellt man das Kochgefäß fest auf, schraubt das Thermometer ein, zündet Feuer an und öffnet den Dämpfen freien Paß. Im Augenblicke des ersten Siedens liest man die Skala ab und entnimmt zu ihr aus einer Tabelle entweder bloß den Luftdruck, mit welchem man

---

[1]) Gintl vindiziert die erste Idee eines Thermobarometers nicht Deluc, sondern Fahrenheit.

[2]) Cavallo, Description of a Thermometrical Barometer, Philos. Transact., vol. 71. S. 524 ff.

[3]) Wollaston, On a Differential Barometer, ibid. vol. 107. S. 183 ff.

[4]) Der Abstand zwischen zwei Skalenstrichen kann sehr groß gemacht werden, weil ja das Thermometer nur etwa von 85° bis 101° zu reichen braucht.

dann in bekannter Weise weiter rechnet, oder gleich direkt die Seehöhe des Apparates.

Den theoretischen Zusammenhang zwischen den in Rede stehenden Größen auszumitteln, ist eine Aufgabe der Physik. Gestützt auf gewisse Interpolationsformeln von August und Baumgartner hat Gintl, der den Gegenstand zuerst im Zusammenhange abhandelte und zahlreiche Messungsbeispiele, wennschon vielleicht mit zu großem Optimismus, mitteilte [1]), die betreffenden Beziehungen entwickelt [2]). Ihm folgte Regnault [3]), der eine exakte Tafel für die numerische Relation zwischen Barometer- und Hypsothermometerstand ausarbeitete; wenn für zwei Stationen, die in der Vertikale um H abstehen, die Siedetemperatur resp. t_1 und t_2 $(t_1 < t_2)$ ist, so schlägt man in der Tabelle nach, welche Luftdruckswerte b_1 und b_2 resp. zu t_1 und t_2 gehören, und findet angenähert in Metern:

$$H = 18382 (\log b_2 - \log b_1).$$

Nach Regnault hat Zöppritz seine überaus kompendiösen Hypsometertafeln bearbeitet [4]), mittelst deren er eine Fülle afrikanischer, nach Kochthermometerangaben vorläufig bestimmter Höhenkoten endgiltig fixierte. Eine Näherungsformel, deren Konstanten allerdings für jedes Thermometer besonders bestimmt sein wollen, ist von Kunze [5]) aufgestellt worden.

Die hypsothermometrische Methode ist auch durch die Erfindung des freilich noch tragfähigeren Aneroides nicht überflüssig gemacht worden; *zur Kontrolle des Federbarometers ist und bleibt das Kochthermometer überaus nützlich.* Diese Thatsache ist von den berufensten Au-

---

[1]) Gintl, Das Höhenmessen mit dem Barometer, Wien 1835.

[2]) Ebenda, S. 30 ff.

[3]) Regnaults Messungen bildeten die Grundlage für die in den „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures" (vol. I, Paris 1881) enthaltene Tafel.

[4]) Zöppritz, Tabelle für Luftdruck und Siedetemperatur des Wassers, Königsberg 1883.

[5]) Kunze, Einige Beobachtungen an Kochthermometern, Verhandl. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin, 9. Band. S. 509 ff.

toren, wie Wild[1]), Mohn[2]), Jordan[3]) hervorgehoben worden, obwohl der letztere allerdings nicht unerwähnt läßt, daß die durch ein Quecksilberthermometer geleistete Standkontrolle durch das Siedethermometer der Genauigkeit nach nicht wohl erreicht werden kann.

IV. Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite.

Schon oben (S. 238) ward bewiesen, daß *geographische Breite* und *Polhöhe* ganz das gleiche sind. Wir haben es also lediglich mit der Ermittlung der letzteren zu thun [4]).

---

[1]) Repertorium der Meteorologie, 2. Band. S. 80 ff.; 3. Band. S. 102 ff.

[2]) Mohn, a. a. O., S. 32 ff.

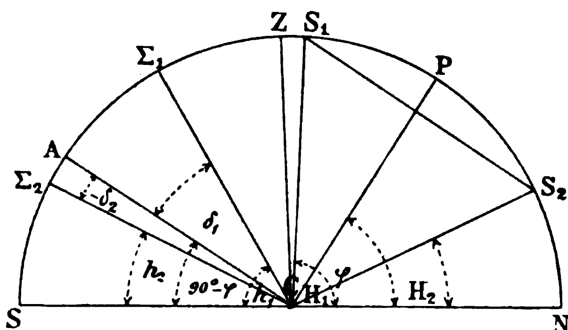
[3]) Jordan, Handbuch etc., 2. Band. S. 541 ff.

[4]) An Anweisungen zur geographischen Ortsbestimmung fehlt es in der Litteratur nicht. Schon aus älterer Zeit haben wir z. B. des Gemma Frisius „Libellus de locorum describendorum ratione" (Antwerpen 1533); aus dem vorigen Jahrhundert ist das in seinem dritten Bande ganz dem gedachten Zwecke gewidmete „Handbuch der rechnenden Astronomie" (Leipzig 1796—99) Rüdigers zu erwähnen; nahe gleichzeitig erschien Bohnenbergers „Anleitung zu geographischen Ortsbestimmungen, hauptsächlich mit dem Spiegelsextanten" (Göttingen 1795), welches Jahn mit Recht so hoch hielt, daß er eine Neuauflage davon veranstaltete (1852). Einen ähnlichen Plan befolgt die kürzer gehaltene „Anleitung zur astronomischen Bestimmung der Länge und Breite" von F. Th. v. Schubert (St. Petersburg 1803). Indem wir uns auf die deutsch geschriebenen Werke beschränken, führen wir als sehr empfehlenswerte Schriften noch an: Valentiner, Beiträge zur kürzesten und zweckmäßigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen, Leipzig 1869; Weyer, Vorlesungen über nautische Astronomie, Kiel 1871; Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung (Allgem. Enzyklop. d. Physik, 1. Band, Leipzig 1869. S. 648 ff.); Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885; Herr-Tinter, Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung, Wien 1887. Für Forschungsreisende mag neben dem bekannten Neumayerschen Sammelwerke die in ihrer Kürze und praktischen Einrichtung mustergiltige, nur leider etwas schwer zugängliche „Anleitung zur Anstellung geographischer Ortsbestimmungen auf Reisen mit Hilfe des Sextanten und Prismenkreises" von Peter (Mitteil. d. Ver. f. Erdkunde zu Leipzig, 1880—81. S. 53 ff.) besonders genannt werden.

Stände zufällig ein Stern genau an der Stelle, welche bei der täglichen Umdrehung der Himmelskugel in absoluter Ruhe verharrt, so wäre die Lösung der Aufgabe eine leichte Sache: man würde einfach diesen Stern anvisieren und am Limbus des Meridiankreises, resp. eines anderen hierfür sich eignenden Instrumentes den Winkel ablesen, welchen die Gesichtslinie mit der Horizontalen einschließt. Ein solcher Stern ist nun aber nicht vorhanden; der sogenannte *Polarstern* steht vielmehr vom geometrischen Nordpol des Himmels ziemlich weit ab [1]). Eine *direkte Bestimmung* der Polhöhe ist mithin ausgeschlossen, und alle dem erwähnten Zwecke dienenden Verfahrungsweisen tragen einen *indirekten* Charakter.

Beobachtungen im Meridian. In *Fig. 105* sollen die Buchstaben *C*, *Z*, *P*, *N*, *S*, *A* die uns von früher

Fig. 105.



(s. *Fig. 4,* S. 60) wohlbekannte Bedeutung haben. S_1 sei die obere, S_2 die untere Kulmination eines Zir-

[1]) Der gegenwärtige Polarstern wird nicht dauernd ein solcher bleiben; das geht aus der auf S. 169 bereits erwähnten und in Abschnitt VIII des nächsten Kapitels eingehender behandelten Veränderlichkeit in der Lage des Aequators hervor. Die verschiedenen Stellungen, die der zwischen 1° und 2° vom Pole abstehende Stern, der Leitstern der Schiffer in früherer Zeit, gegen den Himmelspol einnehmen kann, kennzeichnet gründlich das vorhin zitierte Werk von Jordan (a. a. O., S. 116 ff.).

kumpolarsternes, und es seien die Bogen $NS_1 = H_1$ und $NS_2 = H_2$ direkt gemessen, welche resp. den $\sphericalangle S_1CN$ und S_2CN entsprechen. Ersichtlich ist $\sphericalangle S_1CP = \sphericalangle PCS_2$, die Sehne S_1S_2 steht auf CP senkrecht. Wir haben somit folgende beide Gleichungen (arc S_1P = arc $PS_2 = q$ gesetzt):

$$H_1 - q = \varphi, \quad H_2 + q = \varphi.$$

Wir addieren und erhalten den die Lösung unserer Aufgabe in sich schließenden Satz [1]): *Die Polhöhe ist gleich dem arithmetischen Mittel aus der oberen und unteren Kulminationshöhe irgend eines Zirkumpolarsternes.*

Man kann aber auch irgend einen Himmelskörper wählen, der nicht zu den Zirkumpolarsternen gehört, so daß man sich also mit einer einzigen Meridianhöhe zu begnügen hat, wofür dann aber als Ersatz die äquatoriale Abweichung des fraglichen Gestirnes bekannt sein muß. In unserer Figur habe Σ_1 die positive Deklination δ_1 und Σ_2 die negative Deklination δ_2; berücksichtigt man weiter, daß arc $AS = 90^0 - \varphi$ ist, und bezeichnet man resp. mit h_1 und h_2 die Meridianhöhen von Σ_1 und Σ_2, so bestehen diese beiden Gleichungen:

$$h_1 - \delta_1 = 90^0 - \varphi, \quad h_2 + (-\delta_2) = 90^0 - \varphi.$$

Fassen wir beide Thatsachen einheitlich zusammen, so finden wir: *Zieht man von der Meridianhöhe eines gerade kulminierenden Gestirnes dessen Deklination ab, so bekommt man das Komplement der Polhöhe.*

Diese letztere Methode ist diejenige, von welcher in der Praxis, vorab in der nautischen, unbedingt am häufigsten Gebrauch gemacht wird [2]). Man beobachtet

---

[1]) Wolf (Gesch. d. Astr., S. 376) bemerkt, daß dies bereits den Arabern bekannte Verfahren erst durch Brahe und Rothmann (um 1580) wieder hervorgezogen worden sei. Wir fanden es jedoch schon in Werners Kommentar zum ersten Buche der Ptolemäischen Geographie (Nürnberg 1514) angewendet.

[2]) Jeden Tag, mittags gegen zwölf Uhr, betritt zum „Nehmen des Besteckes" der Kapitän das Verdeck, seinen Sextanten oder Oktanten in der Hand. Er verfolgt die Sonne, bis diese in ihrem Laufe stationär zu werden beginnt, denn dies ist ein Zeichen da-

mittelst des Spiegelinstrumentes den Abstand des einen Sonnenrandes von der sogenannten Kimm[1]) und bekommt so den doppelten Wert der Höhe dieses Punktes; die Deklination wird dem Schiffahrtskalender entnommen, und dann ist auch die Polhöhe bekannt.

Ein Beispiel[2]) möge den Sachverhalt klarstellen und zugleich ausnahmsweise — denn eine regelmäßige Berücksichtigung derselben würde uns zu weit führen — den Korrektionen Rechnung tragen. Die Entfernung des unteren Sonnenrandes von seinem Spiegelbilde beträgt 50° 19′, der Kollimationsfehler (s. S. 122) war bei dem gebrauchten Instrumente negativ, gleich — 1′ 30″, so daß also die wirkliche doppelte Höhe (50° 18′ 60″ — 1′ 30″ =) 50° 17′ 30″ ausmachte. Die Höhe selbst ist hiernach 25° 8′ 45″. Den Tafeln sind die Korrektionsglieder der Refraktion, der Parallaxe und des Sonnenhalbmessers (s. S. 468 ff.) zu entnehmen; die fehlerfreie Höhe des Sonnenmittelpunktes ist dann gleich

---

für, daß sie ihre größte Entfernung vom Horizonte erreicht hat. In diesem Augenblicke stellt er durch Anziehen der Schraube fest ein und liest dann am Limbus (vgl. S. 119) die doppelte Meridianhöhe ab. — In früherer Zeit war das schwankende Schiff für solche Beobachtungen absolut unbrauchbar; gewöhnlich stieg man ans Land und nagelte sich ein Gerüst zusammen, auf dem man den geteilten Kreis (das Astrolabium) befestigte. Durch die Erfindung des Jakobsstabes wurde wenigstens teilweise Abhilfe geschafft; vgl. S. 87 und Günther, Martin Behaim, Bamberg 1890. S. 20 ff.

[1]) Auf dem Festlande bedient man sich des künstlichen Horizontes (s. S. 124 ff.).

[2]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 734. Ein anderes Beispiel ist das folgende. Wenn an einem Gnomon (s. S. 78) zur Zeit des Wintersolstitiums eine Schattenlänge b_2, zur Zeit des Sommersolstitiums eine Schattenlänge b_1 gemessen ward, während der schattenwerfende Stab selbst a Längeneinheiten hoch war, so kann man aus diesen Angaben sowohl die Polhöhe φ des fraglichen Ortes, als auch die Ekliptikschiefe ε (s. S. 70) berechnen. Bezeichnet man nämlich die Mittagshöhen der Sonne am kürzesten und längsten Tage resp. mit h_2 und h_1, so gelten nachstehende Relationen:

$$\operatorname{tang} h_1 = a : b_1, \ \operatorname{tang} h_2 = a : b_2, \ \varphi = 90^0 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(h_1 - h_2).$$

$$25^\circ 8' 45'' - 2' 2'' + 9'' + 16' 5'' = 25^\circ 22' 27''.$$

Das Komplement hiervon ist 64° 37′ 33″, und zieht man hiervon die Deklination ab, oder richtiger gesagt, addiert man die in diesem Falle — die Messung fand am 20. Oktober statt — negative Deklination, so ergibt sich zum Schlusse die geographische Breite gleich

$$64^\circ 37' 33'' - 10^\circ 18' 47'' = 54^\circ 18' 46''.$$

Befindet sich der Beobachter auf einem Schiffe, also von der Wasserfläche etwas entfernt, so muß von Rechts wegen auch auf die Kimmtiefe oder Depression des Gesichtskreises (s. S. 218) Bedacht genommen werden [1]). Auch die Bewegung des Schiffes kann bei den heutigen Beförderungsmitteln wohl eine so schnelle werden, daß aus ihr — zwar nicht bei der soeben geschilderten, wohl aber bei mancher anderen Methode — ein durch Rechnung unschädlich zu machender Fehler resultiert [2]).

Messungen von Höhen und Zenitdistanzen überhaupt. Wenn man Rechnung nicht scheut, so kann man auf sehr verschiedene Arten auch durch *Messung von Gestirnhöhen ausserhalb des Mittagskreises* die Polhöhe bestimmen. Von den hierher gehörigen Methoden stellen wir die wichtigsten im folgenden zusammen.

I. Messung der Höhe im Sechsuhrkreise [3]). Wenn ein Stern von bekannter Deklination δ in jenem Stundenkreise angekommen ist, welcher vom Meridiane um 90° absteht, so mißt man die Höhe h des ersteren. Das am

---

[1]) Hauptsächlich nach der nautischen Seite hin erörtert diese Korrektion Grunert (Ueber die Kimm oder Kimmtiefe. Arch. d. Math. u. Phys., 22. Teil. S. 107 ff.).

[2]) Der betreffende Fehler ist nach Friesach (Ueber die Reduktion der größten Sonnenhöhe auf den Meridian bei veränderlichem Beobachtungsorte, ebenda, 42. Teil. S. 180 ff.) gar nicht so unbeträchtlich. Bei einem Schiffe, das unter der ungefähren nördlichen Breite von 70° zur Zeit des Frühlingsäquinoktiums mit einer Geschwindigkeit von 18 Knoten genau nach Süden segelt, kann unter Umständen der Fehler einer genommenen Höhe — und somit auch der der Breite — auf mehr denn 2 Minuten ansteigen.

[3]) Weyer, a. a. O., S. 735.

Pole alsdann rechtwinklige Kugeldreieck Zenit-Pol-Stern liefert dann sofort

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta);$$
$$\sin\varphi = \sin h : \sin\delta.$$

II. Messung der Höhe im ersten Vertikale. Diesmal ist das bekannte Dreieck am Zenit rechtwinklig, und man hat demgemäß [1])

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - h);$$
$$\sin\varphi = \sin\delta : \sin h.$$

III. Synchrone Messungen zweier Höhen verschiedener Gestirne. Die Position eines Sternes durch seine Abstände von zwei ihrer Lage nach bekannten anderen Sternen zu finden, hatte bereits Tycho Brahe gelehrt [2]). In ähnlicher Weise gab W. L. Krafft [3]) eine Anweisung, die Breite rechnerisch mit Zugrundelegung zweier im nämlichen Augenblicke gemessenen Höhen zu ermitteln. Der Beobachtungsmodus leidet offenkundig unter dem Uebelstande, daß zwei Beobachter dabei thätig sein müssen, und aus diesem Grunde ist das Krafftsche Verfahren überholt worden durch ein von Gauß [4]) angegebenes,

---

[1]) Weyer, Vorlesungen, S. 97.

[2]) Tycho Brahe, Astronomiae instauratae progymnasmata, Prag 1603. S. 221 ff. Vervollkommnet ward Brahes Berechnungsverfahren durch Mästlin, der sogar mit großer Schärfe einen unbekannten Sternort als Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Kugelviereckes mit vier gegebenen Endpunkten bestimmte. Vgl. Günther, Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 26. Band. S. 50 ff.; E. Weiß, Ueber die Bestimmung des Ortes eines Gestirnes durch den Durchschnitt zweier größter Kugelkreise, ebenda, 26. Band. S. 201 ff.

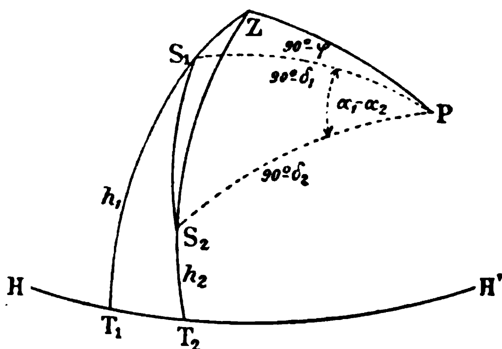
[3]) W. L. Krafft, Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées de deux astres, Nova Acta Acad. Imper. Petropol., 13. Band.

[4]) Gauß, Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, Bodes Astr. Jahrbuch für 1812. S. 129 ff. Gauß legt, wie schon die Aufschrift seiner Abhandlung besagt, großen Wert darauf, daß mit der Höhe zugleich auch die Zeit ermittelt wird; in der That ist (s. o.) im Dreieck ZPS_1 jetzt auch der Stundenwinkel ($\sphericalangle ZPS_1$) bekannt. — Eine andere

dessen Endformeln diejenigen von Krafft als Spezialfall in sich enthalten.

IV. Die Gausssche Methode. Der berühmte Mathematiker geht von folgender ganz allgemeiner Problemstellung aus: *Aus der gegebenen Lage zweier Punkte auf der Kugelfläche in Beziehung auf einen grössten Kreis die Lage eines dritten Punktes der Fläche zu finden, dessen Abstände von jenen Punkten gegeben sind.* In *Fig. 106* ist HH' der Horizont, P der Pol, Z das Zenit; S_1 und

Fig. 106.



S_2 sind zwei Sterne, deren kürzeste Abstände $S_1T_1 = h_1$ und $S_2T_2 = h_2$ vom Horizonte gemessen wurden; außerdem kennt man die Rektaszensionen α_1, α_2 und die Deklinationen δ_1 und δ_2 von S_1 und S_2. Man verbinde diese beiden Punkte mit dem Zenit Z und dem Pole P durch Bogen größter Kreise; im sphärischen Dreieck PS_1S_2 kennt man jetzt $PS_1 = 90^0 - \delta_1$, $PS_2 = 90^0 - \delta_2$ und $\sphericalangle S_1PS_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, d. h. zwei Seiten und den einge-

Methode von Gauß basiert darauf, daß man drei Höhen des nämlichen Sternes bestimmt. Ueber die Auflösung der drei sich ganz von selbst darbietenden Bedingungsgleichungen verbreitet sich das Werk von Brünnow (a. a. O., S. 315 ff.), wo auch zugleich ein ganz ähnliches, von Cagnoli gestelltes und gelöstes Problem der Besprechung unterstellt wird.

schlossenen Winkel. Hieraus läßt sich $\sphericalangle PS_1S_2 = \sigma_1$ berechnen und zwar am einfachsten nach den bekannten Napierschen Formeln, über welche jedes Lehrbuch der Trigonometrie Auskunft gibt. Setzt man nämlich $\sphericalangle PS_2S_1 = \sigma_2$, so stehen zur Simultanberechnung von σ_1 und σ_2 zwei logarithmisch brauchbare Gleichungen zur Verfügung:

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\cos\frac{\delta_1-\delta_2}{2}}{\sin\frac{\delta_1+\delta_2}{2}}\operatorname{cotang}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{\sin\frac{\delta_1-\delta_2}{2}}{\cos\frac{\delta_1+\delta_2}{2}}\operatorname{cotang}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}.$$

Hat man σ_1 und σ_2, so findet sich arc $S_1S_2 = a$ mittelst einer der folgenden beiden Gleichungen:

$$\sin a = \frac{\cos\delta_1 \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{\sin\sigma_2} = \frac{\cos\delta_2 \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}{\sin\sigma_1}.$$

Im Dreiecke S_1ZS_2 sind nunmehr die drei Seiten bekannt und $\sphericalangle ZS_1S_2 = \Sigma$ kann gefunden werden, indem man

$$\operatorname{tang}\frac{\Sigma}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{a+h_1+h_2}{2}\sin\frac{a+h_1-h_2}{2}}{\cos\frac{-a+h_1+h_2}{2}\sin\frac{a-h_1+h_2}{2}}}$$

setzt. Endlich kennt man jetzt im Dreieck ZPS_1 Seite $ZS_1 = 90^0 - h_1$, Seite $PS_1 = 90^0 - \delta_1$ und $\sphericalangle ZS_1P = \Sigma - \sigma_1$; gesucht wird die letzterem Winkel gegenüberliegende Seite $PZ = 90^0 - \varphi$, zu deren schließlicher Ausrechnung die nach bekannter Weise (s. S. 142) logarithmisch zu aptierende Formel

$$\cos(90^0-\varphi) = \sin\varphi = \sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2\cos(\Sigma-\sigma_1)$$

dienen kann. Das Problem, welches ja in letzter Instanz von der Auflösung einer quadratischen Gleichung abhängt, besitzt natürlich zwei Lösungen, doch wird es im konkreten Falle keine Schwierigkeit machen, die richtige herauszufinden.

Es leuchtet ein, daß man eine Kontrolle des Resultates gewinnt, sobald man auf das Dreieck S_2ZP statt auf das Dreieck S_1ZP zusteuert.

V. Die Littrowsche Methode[1]. Die in I beschriebene gewöhnliche Bestecknahme der nautischen Praxis hat das mißliche, daß man den Moment des wahren Mittags, in welchem die Sonnenhöhe gemessen werden muß, nicht ganz genau kennt. Man kann sich aber diese Zeit, wenn man nur die Polhöhe *approximativ* kennt, durch nachfolgende Ueberlegungen verschaffen. Kurz vor Mittag nimmt man ziemlich rasch zwei Sonnenhöhen h und h'; die den betreffenden Sonnenstellungen zukommenden Stundenwinkel und Deklinationen sollen bezüglich s und s', δ und δ' sein. Durch eine Reihe von analytischen Umformungen, die wir deswegen nicht wiedergeben, weil sie in einer der nächsten Nummern sich ganz ähnlich wiederholen, gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\sin\frac{1}{2}(s+s') = -\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(s-s')} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}$$

$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(s-s')} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi - \sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\varphi\cos s'}{\cos\delta\cos\varphi}.$$

[1] C. v. Littrow setzt sein Verfahren im 1. Bande (2. Serie) der „Ann. d. k. k. Sternwarte zu Wien" (S. XLIX ff.) auseinander. Ein ähnlicher Grundgedanke ist aber bereits bei dessen Vater J. J. v. Littrow (vgl. dessen Aufsatz über die Bestimmung der Polhöhe von Kasan im 1. Bande, S. 394 ff. der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften") nachzuweisen.

Der Quotient $\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta'):\sin\frac{1}{2}(s-s')$ ist, wie die Ephemeriden darthun, stets nur eine ganz kleine Größe, so daß ohne irgend namhaften Fehler kürzer

$$\sin\frac{1}{2}(s+s') = -\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(s-s')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}$$

gesetzt werden kann. Man weiß aber, daß die Polhöhe ungefähr $=\varphi'$, daß also $\varphi=\varphi'+\Delta\varphi'$, wo letzterer Summand sehr klein ist, gesetzt werden kann. Dann ist

$$\cos\varphi = \cos\varphi'\cos\Delta\varphi' - \sin\varphi'\sin\Delta\varphi'$$

$$= \cos\varphi'\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}\Delta\varphi'\right) - 2\sin\varphi'\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\cos\frac{1}{2}\Delta\varphi'$$

$$= \cos\varphi' - 2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin\left(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi'\right)$$

und weiterhin, wenn (s. o.) die Differenzen $(h-h')$ und $(s-s')$ gleichfalls nahezu verschwinden,

$$\sin\frac{1}{2}(s+s') = -\frac{h-h'}{s-s'}$$

$$\times\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\,.\left[\cos\varphi' - 2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin\left(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi'\right)\right]}.$$

Im Nenner des zweiten Bruches kann kurzweg $\cos\delta\cos\varphi'$ geschrieben werden. Rechts kommen jetzt nur die bekannten Größen h, h', s, s', δ und φ' vor; man kann also $(s+s')$ berechnen, und da auch $(s-s')$ bekannt ist, so ist sowohl s als auch s' und damit auch der Termin des wahren Mittags bekannt, und wenn dieser eingetreten, dann nimmt man die Höhenmessung vor und findet (s. o.) $\varphi=\delta+h-90^{\circ}$. C. v. Littrow und Bucchia haben Tafeln zur Abkürzung des Kalkuls berechnet, welche natürlich nur unter

der Voraussetzung gelten, daß der Beobachter zwischen der ersten und zweiten seiner vorläufigen Messungen stets die gleiche Zeit verstreichen läßt.

VI. Kombinierte Höhen- und Zeitmessung. Ein in seemännischen Kreisen viel gebrauchtes Verfahren besteht darin[1]), daß man gleichzeitig die Höhe h und den Stundenwinkel s eines Sternes bestimmt. Dann ist, wenn φ und δ ihre Bedeutungen nicht ändern,

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Die Aufgabe hat ersichtlich zwei Lösungen. Will man die schleppende direkte Auswertung von $\sin \varphi$ oder $\cos \varphi$ vermeiden, so führt man die Hilfswinkel x und y mittelst der Bedingungsgleichungen

$$\operatorname{tang} x = \cos s \operatorname{cotang} \delta, \quad \cos y = \frac{\cos x \sin h}{\sin \delta}$$

ein und bekommt $\varphi = 90^0 - (x \pm y)$. Eine Näherungsauflösung der obigen Hauptgleichung erzielt man durch die Substitution $\cos s = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} s$, denn dann wird

$$\cos (\varphi - \delta) = \sin h + 2 \cos \delta \cos \varphi \sin^2 \frac{1}{2} s.$$

Man setzt jetzt für φ (s. o.) einen Näherungswert ein und berechnet $(\varphi - \delta)$, entnimmt dem Ergebnis einen neuen Näherungswert und kommt so nach verhältnismäßig geringfügiger Zwischenrechnung zu einem sehr guten Werte für die geographische Breite[2]).

---

[1]) Weyer, Vorlesungen etc., S. 100 ff.; Zeit- und Ortsbestimmung. S. 738 ff.

[2]) Die Bildung der Differentialausdrücke (s. S. 144) vergewissert darüber, daß diese Art der Bestimmung um so weniger zuverlässig wird, je näher sich der ins Auge gefaßte Stern beim ersten Vertikale befindet. Man kann als diesen Stern mit besonderem Vorteil den Polarstern wählen, weil derselbe einen Kreis von kleinem Radius beschreibt, und bei der hierdurch bedingten Langsamkeit der Bewegung auch eine nicht ganz scharfe Zeitbestimmung keinen augenfälligen Fehler involviert. Man kann sogar das kleine Dreieck, welches der Pol, der Stern und der Fußpunkt

VII. Zirkummeridianhöhen. Die Annäherung ist man fortwährend zu steigern in der Lage, wenn man nämlich *die in der Nähe des Meridianes genommenen Höhen vervielfältigt*[1]. Unter H die Meridianhöhe verstanden, ist einer vorhin abgeleiteten Formel zufolge

$$\cos(\varphi - \delta) = \sin h + 2 \sin^2 \frac{1}{2} s \cos\delta \cos\varphi = \sin H.$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$\sin\frac{1}{2}(H-h) \cos\frac{1}{2}(H+h) = \sin^2\frac{1}{2} s \cos\delta \cos\varphi.$$

Wir machen $H - h = \Delta h$, $H + h = 2h + \Delta h$ und erhalten so

$$\sin\frac{1}{2}\Delta h \cos\left(h + \frac{1}{2}\Delta h\right) = \sin^2\frac{1}{2} s \cos\delta \cos\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2}\Delta h = \frac{\sin\frac{1}{2} s \cos\delta \cos\varphi}{\cos\left(h + \frac{1}{2}\Delta h\right)}.$$

Da Δh nur klein ist, so kann der Sinus mit dem Bogen vertauscht werden; des ferneren ist $\cos\left(h + \frac{1}{2}\Delta h\right)$ mit $\cos(h + \Delta h) = \cos H = \sin(\varphi - \delta)$ zu identifizieren, und es wird

$$\Delta h = \frac{2\sin^2\frac{1}{2} s \cos\delta \cos\varphi}{\sin(\varphi - \delta)}.$$

Die Anwendung dieses Ergebnisses ist eine ganz einfache. Man nimmt in der Zeit zwischen 11^h und 1^h eine möglichst große Anzahl von Sonnenhöhen, zieht aus ihnen

---

eines von letzterem auf den Meridian gefällten Lotes bilden, als ein ebenes betrachten und auflösen.

[1]) Weyer, Vorlesungen etc., S. 104 ff.; Zeit- und Ortsbestimmung, S. 741 ff.

allen das arithmetische Mittel und addiert hierzu die Mittel aller Δh, um so die wahre Meridianhöhe zu erhalten.

VIII. Die Douwessche Aufgabe. Die diesen Namen tragende Aufgabe scheint erstmalig von Maupertuis[1]) gestellt und, wenn auch in sehr weitschweifiger und für die Praxis unzureichender Weise gelöst worden zu sein, obwohl bezügliche Andeutungen auch schon früher, nämlich bei dem Portugiesen Nunez (1542) und bei dem Niederländer Gietermaker (1677) nachgewiesen werden können. Für die Nautik erlangte die Methode erst dann Bedeutung, als Douwes[2]) seine Hilfstafeln herausgab, die sich sehr bald in der Marine der verschiedenen Völker einbürgerten, eine sehr erhebliche Schärfe jedoch allerdings nicht zu gewährleisten vermochten[3]). Sehr viele namhafte Gelehrte haben sich damit beschäftigt, den Schlußformeln für die Lösung des theoretisch nicht die mindesten Schwierigkeiten darbietenden Problemes eine möglichst elegante und rechnungsmäßige Gestalt zu verleihen, so W. L. Krafft[4]), Klügel[5]), Ivory[6]), Ligowski[7]) u. a. Wenn man sich mit einer bloß ange-

---

[1]) Maupertuis, Astronomie nautique, Paris 1751. S. 41 ff.

[2]) Douwes, Verhandeling om buiten den middag op zee de waare middagsbreedte te vinden, Haarlem 1755.

[3]) Der aus der strengen deutschen Schule hervorgegangene Ingenieurhauptmann Eschenbach schreibt in dieser Beziehung an seinen Lehrer Hindenburg (s. dessen „Archiv", 1. Band. S. 123 ff.): „Die Seeleute folgen hier" — im Sunda-Archipel — „allgemein der Methode von Douwes ... Sie ist auch für diese ganz gut, da bei ihnen wenig Arbeit sein muß, und auf eine oder ein paar Minuten es nicht ankommt. Aber einem Mathematiker kann sie nicht genug thun."

[4]) W. L. Krafft, Essai de perfectionner une méthode de trouver sur mer la latitude, géographique du vaisseau, Nova Acta Acad. Imper. Petrop., 9. Band. S. 353 ff.

[5]) Klügel, Formeln für die Bestimmung der Breite eines Ortes, Bodes Astron. Jahrb. für 1798.

[6]) Ivory, On Nautical Astronomy, Philosoph. Magazine, 1821; On the Double Altitude Problem, ebenda 1822.

[7]) Ligowski, Näherungsweise Auflösung der Aufgabe, aus zwei Höhen eines Sternes und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite und die Zeit zu bestimmen, Arch. d. Math. u. Phys., 53. Teil. S. 107 ff.

näherten Auflösung begnügen will, so möchte diejenige von Ligowski allen anderen wegen ihrer Kürze vorzuziehen sein. Wir hier geben jedoch eine strenge Lösung in geschlossenen Formeln, nämlich diejenige von Matern[1]).

Der Sinn der Aufgabe ist dieser: *Von einem bestimmten Sterne ist zuerst eine Höhe h_2 und nach Verlauf einer gewissen Zeit t eine zweite Höhe h_1 gemessen worden; aus diesen drei Daten soll die Polhöhe φ ermittelt werden.* Daß dies möglich, daß die Aufgabe, wenn noch selbstredend die Deklination δ des fraglichen Sternes bekannt ist, bestimmt ist, erhellt sofort, wenn man für die beiden durch die erste und zweite Sternposition bestimmten Dreiecke Zenit-Pol-Stern die Gleichungen des Kosinussatzes anschreibt:

$$\sin h_1 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s_1,$$
$$\sin h_2 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s_2.$$

Hier sind φ, s_1, s_2 drei unbekannte Größen; wir haben aber auch noch eine dritte Bedingungsgleichung, denn unser obiges t ist proportional der Differenz $(s_2 - s_1)$.

Wir subtrahieren zuerst die zweite Gleichung von

[1]) Matern, Ueber eine strenge Methode der Berechnung der Polhöhe aus zwei gemessenen Sonnenhöhen, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol., 10. Jahrgang. S. 400 ff. — Ganz außerordentlich gründlich gearbeitet ist Weyers historisch-kritischer Essay „Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes aus zwei Höhen der Sonne oder anderer bekannter Gestirne nebst dem Zeitunterschiede der Beobachtungen" (ebenda, 11. Jahrgang. S. 69 ff. S. 148 ff. S. 209 ff.). Dort wird auch eine gleichfalls sehr interessante Formel, die Heyenga ohne Beweis aufgestellt hatte, mit einem solchen versehen; setzt man nämlich $\sin \psi = \cos \delta \sin \frac{s_2 - s_1}{2}$, so wird

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{\cos^2 \psi} \sin \frac{h_1 + h_2}{2} \cos \frac{h_1 - h_2}{2} \pm \frac{\operatorname{cotang} \frac{s_2 - s_1}{2}}{\cos^2 \psi}$$
$$\times \sqrt{\cos\left(\psi + \frac{h_1 + h_2}{2}\right) \cos\left(\psi - \frac{h_1 + h_2}{2}\right) \sin\left(\psi + \frac{h_1 - h_2}{2}\right) \sin\left(\psi - \frac{h_1 - h_2}{2}\right)}.$$

der erten, addieren hierauf beide zu einander und finden unter Anwendung der Prostaphäresis

$$\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}=\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{s_2-s_1}{2}\sin\frac{s_2+s_1}{2},$$

$$\sin\frac{h_2+h_1}{2}\cos\frac{h_1-h_2}{2}$$

$$=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos\frac{s_2-s_1}{2}\cos\frac{s_2+s_1}{2}.$$

Jetzt sind nur noch zwei Unbekannte, nämlich φ und $\frac{s_2+s_1}{2}=x$ vorhanden. Man isoliere $\sin x$ und $\cos x$, so daß man

$$\sin x=\frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{s_2-s_1}{2}},$$

$$\cos x=\frac{\sin\frac{h_1+h_2}{2}\cos\frac{h_1-h_2}{2}-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi\cos\frac{s_2-s_1}{2}}$$

erhält. Nunmehr quadriere man beide Gleichungen, addiere sie dann und schaffe $\cos^2\varphi$ auf die linke Seite; dies führt zu

$$\cos^2\varphi=\left[\frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\sin\frac{s_2-s_1}{2}}\right]^2$$

$$+\left[\frac{\sin\frac{h_1+h_2}{2}\cos\frac{h_1-h_2}{2}}{\cos\delta\cos\frac{s_2-s_1}{2}}-\frac{\sin\delta}{\cos\delta\cos\frac{s_2-s_1}{2}}.\sin\varphi\right]^2.$$

Zur Abkürzung setzen wir die drei logarithmisch berechenbaren Ausdrücke

$$\frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\sin\frac{s_2-s_1}{2}}=a,$$

$$\frac{\sin\frac{h_1+h_2}{2}\cos\frac{h_1-h_2}{2}}{\cos\delta\cos\frac{s_2-s_1}{2}}=b,\quad \frac{\sin\delta}{\cos\delta\cos\frac{s_2-s_1}{2}}=c;$$

betrachten wir dann $\sin\varphi$ als die zu bestimmende Unbekannte, so kann unsere quadratische Gleichung geschrieben werden, wie folgt:

$$\sin^2\varphi-\frac{2bc}{1+c^2}\sin\varphi=\frac{1-a^2-b^2}{1+c^2}.$$

Die Ausrechnung liefert nach einfacher Umformung

$$\sin\varphi=\frac{1}{1+c^2}\left(bc\pm\sqrt{(1-a^2)(1+c^2)-b^2}\right).$$

Nur für $a^2 \overline{\gtrless} 1$ ist dieser Ausdruck reell; wir dürfen folglich $a=\sin\psi_1$ setzen, außerdem machen wir noch $c=\operatorname{cotang}\psi_2$ und finden

$$\sin\varphi=\sin\psi_2\left(b\cos\psi_2\pm\cos\psi_1\sqrt{1-\left[\frac{b\sin\psi_2}{\cos\psi_1}\right]^2}\right).$$

Den in eckigen Klammern stehenden Bruch nennen wir $\cos\psi_3$, so daß also

$$b=\frac{\cos\psi_1\cos\psi_3}{\sin\psi_2}$$

wird, und wenn wir jetzt substituieren, so ergibt sich uns endlich

$$\begin{aligned}\sin\varphi&=\cos\psi_1(\cos\psi_2\cos\psi_3\pm\sin\psi_2\sin\psi_3)\\&=\cos\psi_1\cos(\psi_2\mp\psi_3).\end{aligned}$$

Der Uebersicht halber stellen wir sämtliche Hilfsgrößen noch einmal zusammen. Zunächst sind ψ_1 und ψ_2 direkt zu berechnen vermittelst der Relationen

$$\sin\psi_1 = \frac{\sin\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\cos\delta\sin\frac{s_2-s_1}{2}}, \quad \operatorname{cotang}\psi_2 = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\frac{s_2-s_1}{2}}.$$

Alsdann wird

$$\cos\psi_3 = \frac{\cos\frac{h_1-h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}}{\sin\delta}\cdot\frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_1}$$

gesetzt, worauf φ sich in erwähnter einfachster Weise durch ψ_1, ψ_2 und ψ_3 ausdrückt. Es sind im ganzen bloß 13 Logarithmen aufzuschlagen, wozu noch der große Nutzen kommt, daß in drei Fällen verschiedene goniometrische Funktionen des nämlichen Winkels in Frage kommen.

Kennt man φ, so ist auch die genauere Zeit jeder der beiden Beobachtungen unschwer zu finden. Es ist nämlich, wie wir oben sahen, $\sin\frac{s_2+s_1}{2}$ durch eine logarithmisch geeignete Formel gegeben, (s_2-s_1) ist bekannt, somit auch s_1 und s_2. Die Methode gestattet sonach neben der Erreichung ihres eigentlichen Hauptzweckes auch die Korrektion eines etwaigen *Uhrfehlers.*

IX. Das Problem der n Höhen. Wenn man mehr als drei Höhen eines Sternes nimmt, so hat man die Aufgabe, die Breite zu suchen, zu einer ***überbestimmten*** (s. S. 306 ff.) gemacht, und es handelt sich dann darum, den wahrscheinlichsten Wert der Polhöhe abzuleiten. Zunächst liegt hier der folgende sphärische Lehrsatz zu Grunde: *Alle Erdorte, welche einen gegebenen Stern in der nämlichen Höhe über dem Horizonte erblicken, liegen auf dem Umfange eines Kreises der Kugelfläche.* Auf dieser Thatsache beruht jene Art der geographischen Ortsbestimmung, welche insbesondere in Frankreich durch Yvon

Villarceau[1]) heimisch gemacht worden ist, und um deren Verbreitung in Deutschland sich Weyer[2]) ein entschiedenes Verdienst erworben hat. Wenn φ und λ die angenäherte Breite und Länge eines Ortes bedeuten, so gilt es, die Korrektionsgrößen $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ aufzufinden, welche jene approximativen Bogenwerte in die wirklichen überführen. Dies geschieht dadurch, daß man die gemessenen Höhen unter Zugrundelegung der Größen $(\varphi + \Delta\varphi)$ und $(\lambda + \Delta\lambda)$ berechnet, die Differenz je einer gemessenen und der zugehörigen berechneten Höhe ins Quadrat erhebt und die Summe aller dieser Quadrate zu einem Minimum macht. Die Methode der kleinsten Quadrate führt dann in bekannter Weise zum Ziele.

Ein gewisser graphischer Kalkul jedoch, auf den zuerst der amerikanische Kapitän Sumner verfallen zu sein scheint[3]), ermöglicht es, der Rechnung ein weit kürzeres und übersichtlicheres Verfahren zu substituieren. Die Genese dieses letzteren ist eine so lehrreiche, daß wir nicht umhin können, etwas bei derselben uns aufzuhalten. Im Jahre 1837 war Sumner auf See und vermochte an einem trüben Tage nicht die übliche Mittagshöhe der Sonne zu nehmen, sondern mußte sich schließlich mit einer einzigen, durch einen zufälligen Wolkenriß hindurch gemachten Höhenbeobachtung begnügen. Eine solche reicht, wie wir wissen, nicht aus, um die Polhöhe zu ermitteln. Versuchsweise strebte nun Sumner, verschiedene Breiten zu erhalten, die zu der gemessenen Höhe notdürftig stimmten, die Länge war ihm durch seinen Zeitmesser (s. den nächsten Abschnitt) gut bekannt, und nun trug er die verschiedenen Positionen seines Schiffes, von denen keine ihm vor einer anderen den Vorzug zu verdienen schien, in seine Seekarte[4]) ein. Alle

---

[1]) Y. Villarceau-A. De Magnac, Nouvelle navigation astronomique, Paris 1877.

[2]) Weyer, Die wahrscheinlichste geographische Ortsbestimmung aus beliebig vielen Höhen, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol., 14. Jahrgang. S. 1 ff.

[3]) T. H. Sumner, A new and accurate Method of finding a Ship's Position at Sea, Boston 1843.

[4]) Von der Herstellung dieser Seekarten wird trotz unseres

diese Orte lagen in einer graden Linie. Diese gelegentlich gemachte Entdeckung war von hohem Werte, denn sie ließ sich dahin verallgemeinern: *Die Kurve, in welche der oben genannte Kreis auf der Seekarte*[1]) *sich verwandelt, ist so wenig gekrümmt, dass man einen nicht zu grossen Bogen derselben unbedenklich mit seiner Sehne vertauschen kann.* Jede gemessene Sternhöhe bestimmt demzufolge auf der Erdoberfläche einen Kreis, auf der Navigationskarte aber angenähert eine *grade*, die sogenannte *Sumnersche Linie.* Diese kann man immer ziehen (vgl. Sumner und Weyer) und besitzt dann wenigstens einen geometrischen Ort, welchem die gesuchte Position angehören muß.

Beim Douwesschen Problem kann man zwei Sumnersche Linien in die Karte einzeichnen, deren Durchschnittspunkt sofort die angenäherte Position liefert. Von besonderem Interesse aber wird geometrisch die Sache dann, wenn *drei gemessene Höhen* vorliegen. Die drei Sumnerschen Graden sollen sich in diesem Falle in ein und demselben Punkte schneiden, sie werden jedoch für gewöhnlich auf der Karte ein Dreieck von oft nicht unerheblicher Größe bilden, und innerhalb dieses Dreiecks muß der gesuchte Punkt liegen. Aber welcher dieser unzählig vielen Punkte ist es? Aus den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (s. o.) folgt, wenn man noch bedenkt, daß der Höhenfehler jeweils dem aus fraglichem Punkte auf die bezügliche Dreiecksseite gefällten Perpendikel proportional ist, für diesen Punkt die Bedingung: *Die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Seiten des Dreieckes muss möglichst klein sein.* Auch ohne höhere Analysis erkennt man in dem Punkte den aus der elementaren Geometrie bekannten *merkwürdigen Punkt*

Vorsatzes, die Kartenprojektionslehre als außerhalb unserer Aufgabe liegend anzusehen, gleichwohl im Anfange des nächsten Abschnittes die Rede sein müssen, worauf denn jetzt auch verwiesen sei.

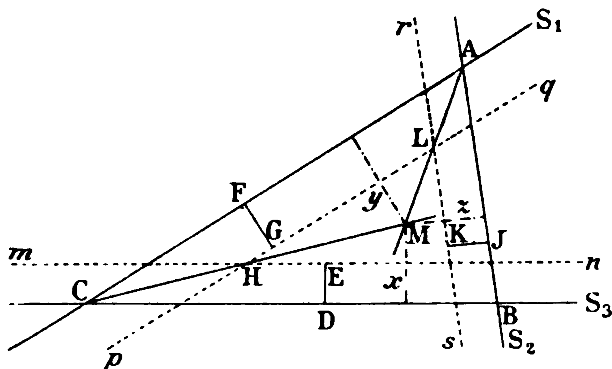
[1]) Eine genaue Ableitung der Gleichung jener Kurve, in welche der Höhenkreis durch die Seekartenprojektion übergeht, bereitet manche Schwierigkeit; schon für einen größten Kreis gestalten sich die Formeln ziemlich verwickelt, wie man bei Villarceau-De Magnac (S. 41 ff.) ersieht.

von Grebe[1]). Man überzeugt sich leicht, daß die drei Abstände x, y, z mit den drei Seiten a, b, c durch die Proportionen

$$x : y : z = a : b : c$$

verknüpft sind und steht damit vor folgender Konstruktion: S_1, S_2, S_3 *(Fig. 107)* sind die drei Sumnerschen Linien, die sich resp. in den drei Punkten A, B, C be-

Fig. 107.



gegnen; ferner sei $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Wir errichten in einem beliebigen Punkte D von BC auf letzterer Seite eine Senkrechte, tragen darauf eine willkürliche Strecke DE ab und ziehen $mn \parallel BC$. Hierauf suchen wir resp. zu a, b und DE die vierte geometrische Proportionale ξ, sowie zu a, c und DE die vierte Proportionale ζ. In einem beliebigen Punkte F von AC wird ein Lot auf AC errichtet und darauf ein Stück $FG = \xi$ abgetragen, worauf $pq \parallel AC$ zu ziehen ist. Die Graden mn und pq schneiden sich in H, und die Linie CH ist ein geometrischer Ort des Minimalpunktes. Endlich

[1]) Vgl. Grebe, Das gradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, Arch. d. Math. u. Phys., 9. Teil. S.250 ff.; Hain, Ueber den Grebeschen Punkt, ebenda, 58. Teil. S.84 ff.

machen wir noch JK, senkrecht auf AB, $=\zeta$, ziehen durch K die Linie $rs \parallel AB$ und bezeichnen mit L den Schnittpunkt von pq und rs, worauf uns die Gerade AL einen zweiten Ort des angestrebten Punktes liefert. Da, wo sich CH und AL treffen, liegt der Minimalpunkt M, der also von allen Punkten der Ebene das größte Anrecht darauf hat, als wahre Position auf der Karte zu gelten, und auf dieser letzteren kann man dann unmittelbar deren geographische Koordinaten, also besonders auch die Breite, um die es sich zunächst für uns handelt, ablesen. Der Beweis für die Richtigkeit unserer Konstruktion ist ein so naheliegender, daß wir auf dessen weitere Ausführung verzichten zu dürfen glauben. — Wenn endlich mehr als drei, wenn allgemein n Höhen gegeben vorliegen, so erhält man ein *fehlerzeigendes Polygon*, und der gesuchte Ort ist so gelegen, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den n Seiten des Polygones ein Minimum wird. So einfach, wie vorhin, ist diesmal die Verzeichnung nicht, doch lassen sich immer, solange n nicht allzu groß wird, Näherungskonstruktionen angeben, für deren Kenntnis wir aber auf Weyer[1]) verweisen müssen.

X. Die Talcottsche Methode[2]). Bis hierher wurden

---

[1]) Weyer, a. a. O., S. 43 ff. Außerdem machen wir den, der die Technik der Ortsbestimmung durch Sumner-Linien genauer kennen zu lernen wünscht, noch aufmerksam auf Rottoks Abhandlung „Bestimmung des wahrscheinlichsten Beobachtungsortes aus beobachteten Gestirnshöhen" (Ann. d. Hydr. u. marit. Meteorol., 13. Jahrgang. S. 605 ff. S. 661 ff.).

[2]) Einer Angabe bei Herr-Tinter zufolge, in deren Buche (S. 434 ff.) obige Methode eine sehr eingehende Darstellung gefunden hat, ist dieselbe mit Vorteil bei der amerikanischen Küstenvermessung verwendet worden. — Talcott war Kapitän und bei der Küstenvermessung der Vereinigten Staaten beschäftigt; das oben genannte Instrument wurde von ihm im Jahre 1834 erfunden. Näheres über dasselbe und seinen Gebrauch ist zu ersehen bei Chauvenet (Manual of Spherical and Practical Astronomy, 2. Band, Philadelphia 1863. S. 340 ff.). Uebrigens macht v. Orff (Astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen in Bayern, München 1880. S. 2) darauf aufmerksam, daß Winnecke den Grundzug der Talcottschen Manier bereits bei Horrebow aufgedeckt habe. Jene Schrift v. Orffs enthält, wie hier eingeschaltet sein möge, eine ganze Reihe

regelmäßig die Höhen oder deren Komplemente, die Zenitdistanzen, selbst gemessen und als solche danach in Rechnung gebracht; nach Talcott dagegen begnügt man sich mit der gemessenen *Differenz zweier Zenitdistanzen.* δ sei die Deklination eines südlich, δ' die eines nördlich vom Scheitelpunkte kulminierenden Sternes, z die Zenitdistanz des ersteren, z' die des anderen. Es ist

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta + \delta') + \frac{1}{2}(z - z').$$

Die Differenz $(z - z')$ wird *mikrometrisch* (s. S. 111), d. h. ohne Zuhilfenahme von Kreisteilungen gemessen, zu welchem Behufe ein besonderes Instrument, das *Zenitteleskop,* angegeben werden mußte.

Breitenbestimmung durch Zeitmessunng. Eine der ältesten Methoden zur Bestimmung der Polhöhe beruht auf der Messung des Sichtbarkeitsbogens der Sonne. Nach Hipparch ist schon Eudoxus in diesem Sinne vorgegangen [1]), und auch später hat man sich zum öfteren des genannten einfachen, weil nur eine genau gehende Uhr vorauszusetzenden Hilfsmittels bedient. Man beobachtet den Zeitpunkt des Aufgehens, sowie des Untergehens der Sonne oder irgend eines anderen Gestirnes und bestimmt die Zeit t, welche zwischen diesen beiden Momenten verfließt. Sie ist proportional dem Tagesbogen, resp. Sichtbarkeitsbogen $2s_0$, und dieser ist (s. o. S. 147) mit der Breite durch die Gleichung

$$\tang \varphi = -\cos s_0 \operatorname{cotang} \delta$$

verknüpft. Die Deklination δ ist bekannt. Wird auf Refraktion und Halbmesser gebührend Rücksicht genommen, so kann auf solchem Wege der angestrebte Zweck leidlich genau erreicht werden.

Olaus Römer hat als der erste angeregt [2]), *die*

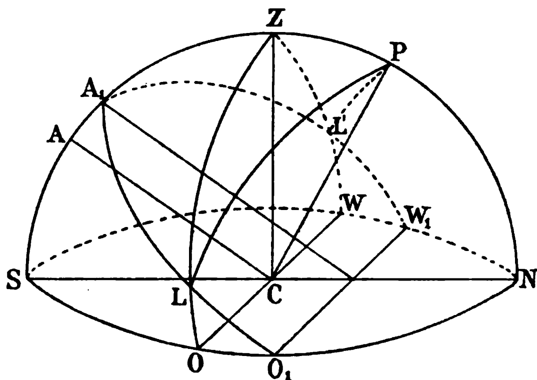
trefflicher Paradigmen von Breitenbestimmungen, die nach den verschiedensten Methoden ausgeführt worden sind.

[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 149.

[2]) Die Idee dieses Verfahrens, bloß mit Uhr und Passageninstrument, ohne jedwede Höhen- oder überhaupt nur Winkel-

Zwischenzeit zwischen dem östlichen und westlichen Durchgange eines Sternes durch den ersten Vertikal zu messen. *Fig. 108*, worin die meisten Buchstaben uns ihrer Bedeutung nach längst geläufig sind, diene zur Erklärung

Fig. 108.



dieses Gedankens. In O_1 erhebt sich das Gestirn über dem Horizont, in A_1 kulminiert es, in W_1 geht es unter. Der Sichtbarkeitsbogen $O_1 A_1 W_1 = 2 \,.\, O_1 A_1 = 2 \,.\, A_1 W_1$ ist bei einem nördlich vom Ostpunkte aufgehenden Sterne so gelegen, daß er mit dem ersten Vertikale OZW zwei oberhalb des Horizontes gelegene Punkte L und L' gemein hat. Bogen $L A_1 L' = 2 \,.\, L A_1 = 2 \,.\, A_1 L'$ ist proportional der Zeit t, welche man gemessen hat; es ist somit, wenn die Zeit in Stunden, die Winkel in Graden

---

messung die geographische Breite zu ermitteln, geht auf das „Triduum observationum astronomicarum“ zurück, welches Horrebow in seine „Basis astronomiae“ (Kopenhagen 1735. S. 157 ff.) aufnahm. Eben dahin zielen die folgenden Arbeiten: Bessel, Ueber die Bestimmung der Polhöhenunterschiede durch das Passageninstrument, Astr. Nachr. 1825, Sp. 9 ff.; Encke, Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West, Berl. Astr. Jahrb. f. 1843. Neuerdings hat Geelmuyden die Verwendbarkeit der Methode praktisch dargethan (Christiania Observatoriums Polhøide bestemt ved Observationer i første Vertikal (Christiania 1888).

angegeben sind, $\sphericalangle A_1PL = \sphericalangle A_1PL' = \frac{15}{2}t$. Zieht man die Hauptkreisbogen PL und PL', so sind die Dreiecke PLZ und $PL'Z$ einander kongruent; gegeben ist in einem jeden derselben die Seite PL oder $PL' = 90^0 - \delta$, der Winkel bei $P = \frac{15}{2}t$ und der Winkel bei $Z = 90^0$. So findet man

$$\operatorname{tang} PZ = \operatorname{cotang} \varphi = \cos \frac{15}{2} t \operatorname{cotang} \delta.$$

Unter der Voraussetzung, daß δ nur wenig kleiner als φ ist — und man kann ja den Beobachtungsstern, da man doch durchweg schon eine oberflächliche Kenntnis vom Werte der Polhöhe besitzen wird, der Voraussetzung gemäß wählen —, gibt man vermittelst der Substitution $\cos \frac{15}{2}t = 1 - 2\sin^2 \frac{15}{4}t$ und durch Vertauschung von Sinus und Bogen unserer Formel auch wohl die folgende Gestalt:

$$\varphi - \delta = 2 \sin \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{15}{4}t.$$

Obwohl, ganz wie in einem obigen Falle, die Berechnung von φ aus dieser transzendenten Gleichung nur näherungsweise, durch die sogenannte Regula falsi, erfolgen kann, gelangt ein einigermaßen gewandter Rechner doch in wenigen Minuten zu einem ganz befriedigenden Ergebnis.

Man kann ersichtlich obiges Verfahren leicht verallgemeinern [1]; der Vertikalkreis, den man ins Auge faßt, braucht nicht notwendig auf dem Meridiane senkrecht zu stehen, sondern man kann auf zwei Vertikale einstellen, die zum Meridiane symmetrisch liegen, und denen resp. die Azimute w (westlich) und $(360^0 - w)$ (östlich) zukommen. Die Zeit, welche ein bekannter Stern braucht, um vom östlichen zum westlichen Vertikalkreise zu kommen, sei t'; dann besteht die Gleichung

---

[1]) Herr-Tinter, a. a. O., S. 452.

$$\sin\varphi\cos\frac{2}{15}t' + \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\delta = \mathrm{cotang}\,w\sin\frac{2}{15}t'.$$

Wenn man aber differentiiert, so überzeugt man sich wieder, daß diese Methode dann sich am meisten empfiehlt, wenn eben $w = 90^0$, $\mathrm{cotang}\,w = 0$ genommen wird [1]).

Breitenbestimmung durch Azimutmessung. Ein Zirkumpolarstern, dessen Deklination die Polhöhe an Größe übertrifft, erreicht seine *grösste Digression* [2]) an einer Stelle der Himmelskugel, deren Azimut W durch

$$\sin W = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

gegeben ist. Diese Gleichung benutzt Böhm [3]) zur Aufsuchung von φ. Er verfolgt mit dem Fernrohre des Theodoliten den gewählten Stern so lange, bis er im Azimut stationär wird [4]), denn dann hat er seine größte

[1]) Anhangsweise sei noch daran erinnert, daß der Römerschen Aufgabe von Delisle und G. W. Krafft, dem Vater des mehrfach zitierten Astronomen, eine etwas veränderte Fassung erteilt worden ist (Problematis astronomici a clar. Delisle propositi enucleatio, Comm. Acad. Scient. Petrop., 7. Band. S. 35 ff.). Die Polhöhe soll gefunden werden, wenn man die Stundenwinkel s_a, s_b, s_c eines gewissen Sternes kennt, so zwar, daß die mittlere Position im ersten Vertikale liegt, während $s_a - s_b = s_b - s_c$ ist. Man hat $s_b = \frac{s_a + s_c}{2}$ und kann sonach wieder das Dreieck auflösen, welches vom Pole, vom Zenit und von dem im ersten Vertikale stehenden Himmelskörper gebildet wird.

[2]) Die generelle Theorie für die Maxima und Minima, welche eine Sternkoordinate bei der täglichen Bewegung der Himmelskugel annehmen kann, entwickelt Brünnow (Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin 1862. S. 114 ff.).

[3]) Der Zweck, welchem J. G. Böhms „Methode, geographische Breite und Azimut zugleich aus bloßen Azimutbeobachtungen der Zirkumpolarsterne, ohne Kenntnis und Hilfe der Zeit, auf das genaueste zu finden“ (Prag 1855) nachgeht, ist überhaupt der, Bessels Beobachtungen mit dem Passageninstrumente (s. o.) durch solche mit dem Theodoliten zu ersetzen.

[4]) Die Frage, an welchem Punkte der Sphäre das Azimut sich am langsamsten ändert, ist keineswegs ganz elementar, denn

Digression erreicht; nun stellt er ein, liest am Limbus des Horizontalkreises den Winkel W ab und findet

$$\cos\varphi = \cos\delta \operatorname{cosec} W.$$

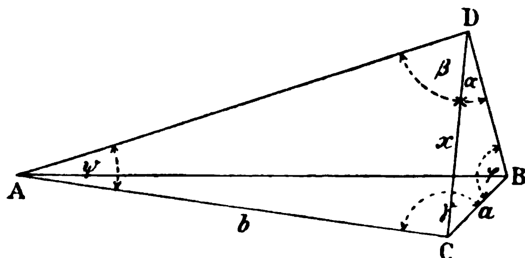
Auf Azimutbeobachtungen läuft auch dasjenige Problem hinaus, welches man gewöhnlich das *Pothenotsche Problem*[1]) *auf der Kugelfläche* nennt. Es sind hier zwei

---

Delambre (Base du système métrique décimal, 1. Band, Paris 1806. S. 151 ff.) und Biot (Traité élémentaire d'astronomie physique, 1. Band, Paris 1805. S. 318) hatten unrichtigerweise angenommen, daß dies beim Durchgange durch den Stundenkreis von 90° geschehe. Dem gegenüber bewies Möbius (De minima variatione azimuti stellarum circulos parallelos uniformiter describentium commentatio, Zeitschr. f. Astr. u. verw. Wissensch., 3. Band. S. 82 ff.), daß dies nur in zwei Ausnahmsfällen, nämlich für $\delta = 0$ und für $\cos\delta = \operatorname{cotang}\varphi$ zutreffe. Möbius erörterte die Sache genauer und bemerkte, dass schon Moivre (Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London 1730, 7. Kapitel) den Gegenstand behandelt und die Formel $\operatorname{tang}^2(45^0 - \eta) = \operatorname{tang}\left(45 - \frac{1}{2}\eta'\right)$ aufgestellt habe; η bedeutet hier die Höhe des Sternes schlechtweg und η' jene Höhe, welche er im ersten Vertikale erreicht.

[1]) Einen Augenblick bei diesem Probleme zu verweilen, kann nicht schaden, da dasselbe für den praktischen Geometer und Geographen — z. B. bei Feststellung des Ortes, von dem man vom

Fig. 109.



Schiffe aus eine Tiefenlotung gemacht hat — von hoher Bedeutung ist. Eine ältere Monographie darüber gab J. J. J. Hoffmann (Das Pothenotsche Problem und seine Auflösung, Aschaffenburg 1825); inhaltsreicher und die geschichtlichen Fragen erschöpfend darstellend ist eine Abhandlung von Weyer (Konstruktion zu einer

Möglichkeiten gegeben, die wir gesondert betrachten wollen.

I. Fall. Gegeben die gleichzeitigen Azimute w_1 und w_2 zweier bekannter Sterne. In *Fig. 110* seien S_1 und S_2 diese

---

Küstenaufnahme im Vorbeifahren, nebst Beiträgen zur Geschichte der geometrischen Auflösungen der sogenannten Pothenotschen Aufgabe, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorol., 10. Jahrgang. S. 534 ff.). Veranlassung zur Stellung und planimetrischen Lösung der Aufgabe fanden 1617 Snellius und 1624 Schickard, der darüber mit Kepler korrespondierte; Pothenots Notiz im Jahrgang 1692 der „Mémoires" der Pariser Akademie hat diesem sonst wenig bekannten Geodäten die unverdiente Ehre der Namengebung eingebracht. Wenn *(Fig. 109)* drei Punkte A, B, C ihrer Lage nach vollkommen bekannt sind, so soll ein vierter Punkt D dadurch bestimmt werden, daß man von ihm aus $\sphericalangle BDC = \alpha$ und $\sphericalangle CDA = \beta$ mißt. Die Elementargeometrie lehrt, daß der Punkt D der nicht mit C übereinstimmende Schnittpunkt zweier Kreisbogen ist, welche resp. über BC und AC als Sehnen beschrieben sind und die Winkel α und β als Peripheriewinkel in sich fassen; rechnerisch kann man, wenn noch $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ als bekannt angenommen werden, die Entfernung $CD = x$ folgendermaßen finden. Man setze $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle CBD = \varphi$; dann ist bei zweimaliger Anwendung des Sinussatzes

$$x = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \psi}{\sin \beta}; \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} \equiv m.$$

Aus einem bekannten Satze der Proportionenlehre folgt jetzt, daß man

$$\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{1 + m}{1 - m}$$

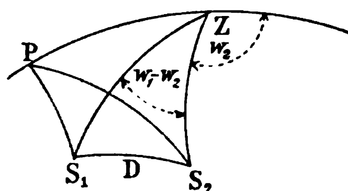
setzen darf; beachtet man, daß $\varphi + \psi = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma$ ist, so hat man schließlich

$$\text{cotang} \frac{\varphi - \psi}{2} = - \frac{1 + m}{1 - m} \text{cotang} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Da die Winkelsumme bekannt ist, so kann man φ und ψ und durch die beiden obigen, sich wechselsweise kontrollierenden Formeln auch x berechnen. Die Einfachheit dieser Lösung ist ersichtlich allein bedingt durch den Umstand, daß die Summe der Innenwinkel eines ebenen Vieleckes konstant ist; einem sphärischen Vielecke fehlt diese Eigenschaft bekanntlich, und hierin ist auch der Grund dafür zu suchen, daß die Lösung für das analoge Problem auf der Kugelfläche (s. o.) sich so ganz ungleich unübersichtlicher gestaltet.

beiden Sterne, δ_1 und δ_2 ihre Deklinationen; auch die Distanz D kann als gegeben gelten. Direkt gemessen werden die Azimute w_1 und w_2. Betrachtet man das sphärische Viereck $S_1 S_2 Z P$, so kennt man von ihm Seite PS_1

Fig. 110.



$= 90^0 - \delta_1$, Seite $S_1 S_2 = D$, Diagonale $PS_2 = 90^0 - \delta_2$, $\sphericalangle PZS_1 = 180^0 - w_1$, $\sphericalangle S_1 Z S_2 = w_1 - w_2$. Führt man noch die Unbekannten $ZS_1 = 90^0 - h_1$ und $ZS_2 = 90^0 - h_2$ ein, so kann man, den Kosinussatz successive auf die Dreiecke PZS_1, PZS_2 und $S_1 Z S_2$ anwendend, die nachstehenden drei Bestimmungsgleichungen anschreiben:

$$\text{I.}\quad \sin\delta_1 = \sin h_1 \sin\varphi - \cos h_1 \cos\varphi \cos w_1,$$

$$\text{II.}\quad \sin\delta_2 = \sin h_2 \sin\varphi - \cos h_2 \cos\varphi \cos w_2,$$

$$\text{III.}\quad \cos D = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos (w_1 - w_2).$$

Daß die Auflösung dieser Gleichungen möglich ist, sieht man leicht ein, aber ebenso, daß die Eliminationsarbeit sehr mühevoll werden wird. Aus Gleichung I würde $\sin h_1$ als eine irrationale Funktion zweiten Grades von φ und auf gleiche Weise aus Gleichung II $\sin h_2$ hervorgehen; diese Werte von $\sin h_1$ und $\sin h_2$ hätte man dann in III einzusetzen, nachdem dieser Gleichung die Form

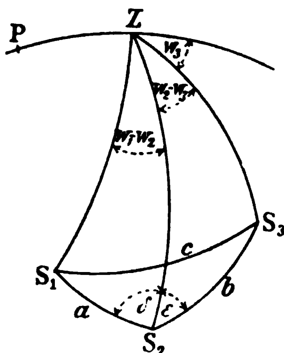
$$(1 - \sin^2 h_1)(1 - \sin^2 h_2) \cos^2 (w_1 - w_2)$$
$$= \cos^2 D - 2 \cos D \sin h_1 \sin h_2 + \sin^2 h_1 \sin^2 h_2$$

gegeben wäre. Die so entstehende komplizierte Gleichung für $\sin\varphi$ läßt sich auf den vierten Grad herabbringen, aber nicht weiter.

II. Fall. Gegeben die gleichzeitigen Azimute w_1, w_2, w_3 dreier bekannter Sterne. In diesem Falle fällt der Pol zu-

nächst ganz außer betracht und man muß sich damit begnügen, zwei oder drei Höhen zu berechnen, um dann durch die Sumnerschen Linien (s. o.) die geographische Lage des Beobachtungsortes zu finden.

Fig. 111.



P (*Fig. 111*) sei wieder der Pol, Z das Zenit, S_1, S_2, S_3 seien die Sternörter. Das Dreieck $S_1 S_2 S_3$ ist nach Voraussetzung ein bekanntes, seine Seiten nennen wir (s. die Figur) a, b, c. Außerdem sind im Vierecke $Z S_1 S_2 S_3$ noch bekannt[1]) die beiden $\sphericalangle\, S_1 Z S_2 = w_1 - w_2$ und $S_2 Z S_3 = w_2 - w_3$. Die Diagonale $Z S_2$ teilt den $\sphericalangle\, S_1 S_2 S_3$ in zwei Teile δ und ε; kennt man diese, so kennt man auch in jedem der beiden Dreiecke $S_1 S_2 Z$ und $S_2 S_3 Z$ eine Seite und zwei Winkel, kann also auch $S_1 Z$, $S_2 Z$ und $S_3 Z$ finden und daraufhin den Minimalpunkt des Sumnerschen Dreieckes aufsuchen. Wie man aber zu δ und ε gelangen könne, hat Rümker[2]) gelehrt. Die Summe $\delta + \varepsilon = \sphericalangle\, S_1 S_2 S_3 = \gamma$ ist von vornherein bekannt, es handelt sich also nur noch um die Differenz $\delta - \varepsilon = \Delta$. Der Gleichung $\delta + \varepsilon = \gamma$ kann man auch eine der nachstehenden beiden Formen geben:

$$\delta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\Delta}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

Nimmt man beiderseits die Sinus, so folgt

$$\sin \delta = \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\Delta}{2},$$

---

[1]) Man erkennt, daß es nicht sowohl auf die absoluten Azimute, als vielmehr nur auf die Azimutaldifferenzen ankommt.

[2]) C. Rümker, Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg 1850. S. 162 ff. Leider ist es an genannter Stelle durch zahlreiche Druckfehler und durch eine nicht recht geeignete Bezeichnung erschwert, sich mit der schönen, aber keineswegs ganz leichten Herleitung der Endgleichung bekannt zu machen.

$$\sin \varepsilon = \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\Delta}{2}.$$

Beide Gleichungen werden ins Quadrat erhoben; unter Beachtung von (α willkürlich)

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha, \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

bekommt man

$$\sin^2 \delta = \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma \sin^2 \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2} \sin \gamma \sin \Delta,$$

$$\sin^2 \varepsilon = \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma \sin^2 \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2} \sin \gamma \sin \Delta.$$

Multipliziert man hingegen $\sin \delta$ mit $\sin \varepsilon$, so wird

$$\sin \delta \sin \varepsilon = \sin^2 \frac{\gamma}{2}\left(1 - \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right) - \left(1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

$$= \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Aus den Dreiecken $S_1 S_2 Z$ und $S_2 S_3 Z$ folgt, wenn h_1 und h_3 die usuelle Bedeutung haben,

$$\cos h_1 = \frac{\sin a \sin \delta}{\sin (w_1 - w_2)}, \quad \cos h_3 = \frac{\sin b \sin \varepsilon}{\sin (w_2 - w_3)},$$

während für die Seite c die Gleichung

$$\cos c = \sin h_1 \sin h_3 + \cos h_1 \cos h_3 \cos (w_1 - w_3)$$

angesetzt werden kann. In dieser letzten Gleichung setzen wir für $\sin h_1$, $\cos h_1$, $\sin h_3$, $\cos h_3$ deren Werte ein und erhalten

$$\frac{\sin a \sin b \sin \delta \sin \varepsilon \cos (w_1 - w_3)}{\sin (w_1 - w_2) \sin (w_2 - w_3)}$$

$$+ \frac{\sqrt{[\sin^2(w_1 - w_2) - \sin^2 a \sin^2 \delta] . [\sin^2(w_2 - w_3) - \sin^2 b \sin^2 \varepsilon]}}{\sin (w_1 - w_2) \sin (w_2 - w_3)}$$

$$= \cos c.$$

Die Ausdrücke $\sin^2 \delta$, $\sin^2 \varepsilon$ und $\sin \delta \sin \varepsilon$, welche in

dieser Schlußgleichung auftreten, haben wir insgesamt bereits als Funktionen von Δ dargestellt; isolieren wir die Wurzel, erheben dann ins Quadrat und setzen

$$\sin^2\frac{\Delta}{2} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{\Delta}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\Delta}{2}}, \quad \sin\Delta = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{\Delta}{2}},$$

ferner der Kürze halber

$$\sin^2 c \sin^2(w_1 - w_2)\sin^2(w_2 - w_3) = A,$$

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2(w_1 - w_3) = B,$$

$$2\sin a \sin b \sin(w_1 - w_2)\sin(w_1 - w_3)\sin(w_2 - w_3) = D,$$

$$\sin^2 a \sin^2(w_2 - w_3) = E, \quad \sin^2 b \sin^2(w_1 - w_2) = F,$$

$$\left(E + F - D - B\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin^2\frac{\gamma}{2} - A = A',$$

$$(E+F)\cos\gamma + 2B\sin^2\frac{\gamma}{2} + D = B',$$

$$\frac{F-E}{2}\sin\gamma = C',$$

so stehen wir schließlich vor folgender Bestimmungsgleichung für $\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2}$:

$$(A' + B' - C')\operatorname{tang}^4\frac{\Delta}{2} - 2C'\operatorname{tang}^3\frac{\Delta}{2}$$

$$+ (2A' + B')\operatorname{tang}^2\frac{\Delta}{2} - 2C'\operatorname{tang}\frac{\Delta}{2} + A' = 0.$$

Diese Gleichung ist biquadratisch und muß als solche nach bekannten Regeln der Algebra aufgelöst werden.

V. Methoden zur Zeit- und Längenbestimmung.

Die *Aequivalenz von Zeit und geographischer Länge* ist uns früher bereits (s. o. S. 239 ff.) zur Kenntnis gekommen; wir erfuhren, daß ein Längenunterschied von 15 Graden dasselbe ist, wie ein Zeitunterschied von

einer Stunde. Entweder bestimmt man also die Länge, welche ja doch in erster Linie ein geometrisches Element ist, *direkt*, oder man bestimmt die Zeit des Ortes A und vergleicht sie mit derjenigen des Ortes B, um so zunächst den Zeitunterschied $A - B$ und damit zugleich *indirekt* den Längenunterschied $A - B$ zu erhalten. Hieraus folgt, daß sich für den vorliegenden Abschnitt ganz von selbst drei Unterabteilungen herausbilden: in der ersten wird von den auf die Zeit keine Rücksicht nehmenden Hilfsmitteln der Längenbestimmung, in der zweiten von der astronomischen Zeitbestimmung an sich und in der dritten von der *Zeitübertragung* die Rede sein müssen.

Geodätische Längenbestimmung. Die beiden Erdorte A und B, um deren Längendifferenz es sich handelt, sind durch ihre Breiten φ_1 und φ_2 gegeben. Außerdem sei geodätisch, d. h. durch eine Triangulation (s. S. 227 ff.), die Distanz AB im Linearmaße ($= d$) ermittelt [1]. Setzt man dies in Bogenmaß um, so wird

[1]) In früherer Zeit war eine geodätische Kontrollierung der auf anderem Wege erhaltenen Werte geographischer Koordinaten beliebter denn heute, wo immerhin die Schärfe der astronomischen Bestimmung sich so erheblich gesteigert hat. Dahin gehört z. B. W. Smiths „Account of the terrestrial Measurement of the Difference of Longitude and Latitude, between the Observations of Norriton and Philadelphia" (Transact. of the Amer. Phil. Society, vol. I. S. 114 ff.). Oftmals freilich zeigten die auf diese oder jene Weise erzielten Ergebnisse so gewaltige Diskrepanzen, daß man wohl oder übel auf jede Hoffnung eines Ausgleiches verzichten mußte. So fand sich, als man die Länge von Florenz geodätisch und astronomisch ermittelte, der gewaltige Unterschied von 7,6″; s. Inghirami, Di una base trigonometrica misurata in Toscana nell' autumno del 1817, Florenz 1818. Die Sache erschien so verzweifelt, daß selbst v. Zach (Ueber eine in mehreren Rücksichten merkwürdige Triangulation im Großherzogtum Toscana, Zeitschr. f. Astr. u. verw. Wissensch., 4. Band. S. 211 ff.) nur in der Annahme einer auffallenden Unregelmäßigkeit der Erdgestalt noch Rettung erblickte. „Man wird doch endlich zugeben müssen", schrieb er an Inghirami, „daß unsere Erdkugel kein geometrischer, sondern ein sehr vermischt zusammengesetzter Weltkörper sei." Ist dies auch wahr (s. o. S. 450 ff.), so liegt doch diesmal der Grund der Nichtübereinstimmung wohl auf einem ganz anderen Felde.

arc $AB = \frac{180\,d}{r\pi}$. Verbindet man dann noch A und B mit dem nächsten Erdpole P durch Hauptkreisbogen, so kennt man in dem sphärischen Dreieck ABP die drei Seiten und kann den $\sphericalangle APB$, welcher gleich der gesuchten Längendifferenz $(\lambda_1 - \lambda_2)$ ist, berechnen. Es wird nämlich

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \text{arc cos} \frac{\cos \frac{180\,d}{r\pi} - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Auf der See wird die geodätische Uebertragung in wesentlich verschiedener Art und Weise angewendet[1]). Hier kennt man meist φ_1 und λ_1, während statt φ_2 und λ_2 einerseits die Entfernung zwischen A und B und andrerseits ein gewisser Richtungswinkel gegeben sind. In vielen Fällen nämlich[2]) segelt der Schiffer stets so, daß er *ununterbrochen den nämlichen Kurs einhält,* und wenn dies der Fall, so bildet die vom Schiffe beschriebene Linie eine sphärische Kurve doppelter Krümmung, welche in unzähligen Windungen um den einen der Erdpole sich herum legt, diesen selbst aber, der eben ein *asymptotischer Punkt* ist, niemals zu erreichen vermag[3]). Wir erblicken in *Fig. 112* vor uns ein Stück einer solchen Kurve, einer sogenannten *Loxodrome,* als dessen Anfangspunkt A, als deren Endpunkt B zu gelten hat; der spitze Winkel BDP, welchen die Kurve mit einem sie in dem willkürlichen Punkte D durchschneidenden Meridiane gemein hat, ist konstant $= \alpha$. Ein Dreieck wie ABP, welches von einem loxodromischen Bogen und zwei vom Pole ausgehenden Hauptkreisbogen gebildet wird, heißt

---

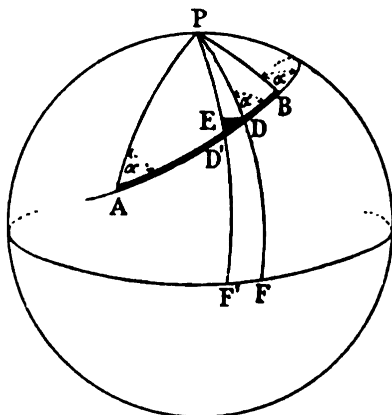
[1]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 760.

[2]) Früher segelte man fast bloß loxodromisch; später aber hat man auch Formeln und Tafeln für die *Orthodromie,* das *Segeln auf dem kürzesten Verbindungswege,* konstruiert.

[3]) Die Kurve spielt schon eine Rolle auf den bekannten *Kompasskarten* des Mittelalters, wo sie freilich als grade Linie erscheint: erst Stevin entdeckte gegen 1600 den wahren Charakter der Kurve; vgl. Günther, Geschichte der loxodromischen Kurve, Halle a. S. 1879.

ein *loxodromisches Dreieck*, und diejenige geometrische Disziplin, welche aus drei gegebenen Stücken eines solchen Dreieckes die beiden übrigen [1]) zu berechnen lehrt, wird gemeiniglich als *loxodromische Trigonometrie* bezeichnet [2]).

Fig. 112.



Die für uns allein wichtige Formel derselben ist leicht zu entwickeln. Wir denken uns den Bogen DD' der Loxodrome so klein, daß wir ihn als gradlinig ansehen dürfen, ziehen die Meridianbogen PD und PD' und verlängern dieselben, bis sie den Aequator bezüglich in F und F' durchschneiden. Dann ist $FF' = d\lambda$ das Differential der geographischen Länge, und ziehen wir durch D einen Parallelkreis, welcher dem Meridiane CD' in E begegnet, so ist einerseits $ED' = d\varphi$ das Differential der

[1]) Mehr sind nicht vorhanden, da ja $\sphericalangle PAB$ gleich dem Nebenwinkel von $\sphericalangle PBA$ ist.

[2]) Ein sehr ausführlicher Lehrbegriff dieses Zweiges der rechnenden Geometrie ist: Grunert, Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1849. Auflösungen der Fundamentalaufgaben hat man ferner von van den Berg (Nieuw Arch. f. Mathem., 8. Band. S. 15 ff.) und von Rollmann (Ann. d. Hydr. u. marit. Meteorol., 13. Jahrgang. S. 337 ff.).

geographischen Breite, andrerseits $DE = FF' \cdot \cos\varphi = d\lambda \cos\varphi$. Das — in der Figur schraffierte — Dreieck $DD'E$ kann, weil seine Seiten unendlich klein sind, als ein ebenes betrachtet werden, und da $\sphericalangle ED'D$ der Kurswinkel ist, so hat man:

$$\frac{DE}{ED'} = \frac{d\lambda \cos\varphi}{d\varphi} = \operatorname{tang}\alpha;\ \sec\varphi\, d\varphi = d\lambda \operatorname{cotang}\alpha.$$

Integriert man auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\lambda \operatorname{cotang}\alpha = \log\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right) + \text{Konst.}$$

Für irgend einen anderen auf der Loxodrome gelegenen Ort, dessen Koordinaten φ' und λ' sind, hat man ebenso

$$\lambda' \operatorname{cotang}\alpha = \log\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi'\right) + \text{Konst.}$$

Will man also die Längendifferenz beider Orte durch die Breiten derselben, sowie durch den konstanten Kurswinkel ausdrücken, so hat man nur die zweite unserer Gleichungen von der ersten zu subtrahieren, denn dann wird

$$\lambda - \lambda' = \left[\log\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right) - \log\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi'\right)\right] \operatorname{tang}\alpha$$

$$= \operatorname{tang}\alpha \log\frac{\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right)}{\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi'\right)}.$$

Wäre $\alpha = 90^0$, $\operatorname{tang}\alpha = \infty$, so wäre zugleich auch $\varphi = \varphi'$, also der rechtsstehende Logarithmus $(\log 1) = 0$, man hätte sohin $\lambda - \lambda' = \infty \cdot 0$, d. h. gleich einer endlichen konstanten Größe, wie dies ja auch aus der Natur der Sache selbst hervorgeht [1]).

---

[1]) Zur Auflösung loxodromischer Probleme eignet sich am besten die Seekarte in Mercators *Projektion mit wachsenden*

Versuche, durch die Magnetnadel die Länge zu bestimmen. Den Gedanken, daß man durch die seit der ersten Reise des Columbus allgemein anerkannte, gelegentlich aber auch schon früher wahrgenommene *magnetische Deklination* oder *Missweisung* die *Länge auf dem Meere* werde bestimmen können, scheint ziemlich gleichzeitig bei zwei großen Seefahrern, bei Pigafetta[1]) und bei Cabot[2]), feste Wurzel geschlagen zu haben. Solange man in der That noch glauben durfte, daß der Winkel zwischen astronomischem und magnetischem Meridian für sämtliche Punkte des nämlichen Mittagskreises konstant und nur von Meridian zu Meridian veränderlich sei, durfte diese Idee eine sehr glückliche genannt werden. Allerdings mußte man sich bald überzeugen, daß im

---

Breiten. Dieselbe ist eben von Anfang an zu dem Zwecke konstruiert worden, daß sich die Loxodrome in eine grade Linie verwandle; zu dem Ende werden die Meridiane durch gleichabständige parallele Linien, die Parallelkreise ebenfalls durch eine Schar paralleler, auf den Meridianen senkrecht stehender Linien dargestellt, nur sind die Bilder der Parallelkreise nicht äquidistant, wie es bei der *Plattkartenformation* der Fall ist, sondern ihre Abstände werden mit der Entfernung vom Aequator immer größer, so zwar, daß für die Breite φ die Aequatordistanz durch den bereits bei Snellius und Stevin vorkommenden Ausdruck (n unendlich groß)

$$\text{Konst.}\,(\sec d\varphi + \sec 2d\varphi + \sec 3d\varphi + \ldots \sec n d\varphi) = \text{Konst.} \int_0^\varphi \sec \varphi\, d\varphi$$

gegeben erscheint. Allerdings gilt dies zunächst nur für die kugelförmige Erde, und für ein Ellipsoid bedarf es einiger Abänderungen; vgl. Murdoch-Brémord, Nouvelles tables loxodromiques, ou application de la théorie de la véritable figure de la terre à la construction des cartes marines réduites, Paris 1742; Th. Schubert, De cursu navis in sphaeroide elliptico, Nova Acta Acad. Imp. Petrop., 8. Band. S. 143 ff. Die Mercator-Projektion ist übrigens winkeltreu, sie gibt jede abgebildete Figur *in den kleinsten Teilen ähnlich wieder,* weil das Differentialdreieck EDD' konstante Winkel besitzt.

[1]) Zu Pigafetta, dem bekannten Kosmographen der ersten Erdumseglung, ist zu vergleichen Stanley of Alderleys Werk „Voyage round the World by Magellan" (London 1874. S. 170 ff.).

[2]) Bereits 1554 hatte der jüngere Cabot (richtiger Gabotto) ein Verzeichnis der ihm bekannten geographischen Längen der spanischen Krone eingereicht und auf dasselbe weitere Vorschläge begründet (Peschel-Ruge, Gesch. d. Erdk., S. 431).

günstigsten Falle die Ortskurven gleicher Mißweisung von den geographischen Meridianen abweichen, und Mercator bemühte sich [1]), diese Linien mit gewissen Hauptkreisen der Erde zu identifizieren, die sich in den *magnetischen Polen der Erde* durchkreuzen. Bald aber ergab sich, daß auch diese Annahme mit der Wirklichkeit nur sehr schlecht übereinstimmte, und bereits zu Ende des 16. Jahrhunderts taucht ein besonderer Name für diejenigen Kurven auf, für welche später die Bezeichnung *Isogonen* üblich wurde; der Engländer Borough [2]) nannte dieselben *„lineae chalyboeliticae“* [3]) und regte an, dieselben auf einer Erdkarte sehr genau zu verzeichnen und nach solchen Diagrammen die Meereslänge im gegebenen Falle interpolatorisch zu ermitteln. Auch Porta schloß sich in seiner *„Magia naturalis“* (1589) diesem Vorschlage an. Auffallend ist, daß Gilbert, der Begründer einer wissenschaftlichen Lehre vom Erdmagnetismus, sich ausdrücklich für die Unmöglichkeit einer geomagnetischen Bestimmung der Länge aussprach [4]), auffallend deshalb, weil er die Abweichung als etwas nach Ort und Zeit gleichbleibendes ansah. Um dieselbe Zeit machte ein Franzose Nautonnier viel von sich reden, weil er das Problem der

---

[1]) Die bezüglichen Anschauungen Gerhard Mercators sind niedergelegt in seinem großen Weltatlas, von dem nachher Hondius (z. B. Amsterdam 1607) neue Auflagen veranstaltete.

[2]) Nachricht über das Vorgehen des Borough, der anderwärts auch Burroughs und Burrus genannt wird, gibt Kircher (Magnes sive de arte magnetica opus tripartitum, Köln 1643. S. 443 ff.).

[3]) Das Wort kommt her von χάλυψ (der Stahl).

[4]) Gilbert, De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure physiologia nova, London 1600. S. 120 ff. Der berühmte Verfasser ist, trotzdem er den Satz „Variatio unius loci constans est“ aufstellte, doch der Ansicht, daß damit für gedachten Zweck nichts zu machen sei, und zwar deshalb, weil von einer Gesetzmäßigkeit in der Aenderung der Mißweisung von Ort zu Ort nicht die Rede sein könne. Er dachte nicht daran, daß man mit tabellarischen Zusammenstellungen solcher Gesetzlosigkeit zum Trotz vieles leisten könne. Auffallend ist, daß Gilbert die magnetische Inklination für viel geeigneter hielt, die geographische Breite zu finden, denn dagegen lassen sich doch ganz die gleichen Einwände erheben.

Auffindung der Länge mit Hilfe des Kompasses endgiltig gelöst zu haben glaubte [1]).

Im Jahre 1635 trat Gellibrand mit seiner viel Aufsehen erregenden Entdeckung hervor [2]), daß die Deklination zu verschiedenen Zeiten auch verschieden groß, von der Zeit also jedenfalls nicht unabhängig sei; seit Graham [3]) weiß man, daß nicht einmal für den Lauf eines einzigen Tages die Stellung der Nadelachse gegen den Meridian die gleiche ist. Mag also auch bei den großen Reisen Halleys, welche die englische Regierung veranlaßte, und welche zur Erstellung der erten wissenschaftlich brauchbaren *Isogonenkarte der Erde* führte [4]), immer noch der Nebengedanke mitgespielt haben, auf diese Weise auch für die geographische Ortsbestimmung etwas zu leisten, so zeigte sich doch mehr und mehr, daß dieser ehedem mit so großen Hoffnungen betretene Weg nicht zum Ziele führen könne, und seit 1700 verschwindet die magnetische Methode der Längenbestim-

---

[1]) Näheres über Nautonnier und seine Bestrebungen findet man bei Kepler (dessen sämtliche Werke, herausgeg. von Frisch, 3. Band, Erlangen und Frankfurt a. M. 1860. S. 457). Kepler stand mit Nautonnier in lebhaftem Briefwechsel und sprach sich günstig über den Inhalt der ihm von jenem überschickten Schrift „De longitudinibus locorum beneficio magnetis in mediis undis addiscendis" aus. An erwähntem Orte ist auch ein interessanter Brief des Casaubonus an Scaliger abgedruckt, worin folgende Stelle vorkommt: „Est Parisiis minister quidam e provincia Narbonnensi, Guilielmus Nautonerius e Castello Franco, qui librum a se compositum editumque Regi ea lege obtulit si praemium opera dignum vellet reprendere..." Er verspreche die großartigsten Dinge, allein das Urteil der sachkundigen Holländer über den Wert dieser Erfindung müsse erst abgewartet werden.

[2]) Gellibrand, A Discourse Mathematical on the Variation of the Magnetic Needle, London 1635.

[3]) Die erste Erwähnung der Tagesschwankung, welche sich bekanntlich als vom täglichen Temperaturgange beeinflußt auswies, findet sich in Grahams Aufsatze „Observations made on the Variation of the Horizontal Needle at London 1722—23" (Phil. Transact. 1714).

[4]) Vgl. Poggendorff, Gesch. d. Phys., S. 723 ff. Die dortige Angabe, daß Halleys Deklinationskarte die erste ihrer Art war, ist (s. o.) nicht richtig, indem schon Borough und Kircher ähnliches zu leisten versucht hatten.

mung allgemach von der Tagesordnung, obwohl noch in allen während des 18. Jahrhunderts erschienenen Werken über Nautik — also bei Bouguer, Robertson, Bézout, Röhl u. s. w.[1]) — die Möglichkeit der Sache mit Ernst und mit einer gewissen Hoffnung auf endliches Gelingen besprochen wird.

Allgemeines über Zeitbestimmung. Es handelt sich hier darum, die *wahre Sonnenzeit* (s. o. S. 172) zu ermitteln, welche durch Anbringung der Zeitgleichung dann sofort in *mittlere Sonnenzeit* umgewandelt werden kann. Ein passendes Mittel hierzu gewähren die *Sonnenuhren* (s. o. S. 178 ff.), aber auch die Beobachtung der Auf- und Untergänge der Sonne kann — freilich nur dann, wenn es auf große Genauigkeit nicht ankommt — an die Stelle treten. Man hat dabei zwischen dem zu unterscheiden, was die Alten resp. als *heliakischen, kosmischen* und *akronychischen Auf- und Untergang* bezeichnet haben[2]). War ein Gestirn im Osten gerade noch vor dem Aufgange der Sonne sichtbar, so sagte man, es gehe heliakisch auf, und wenn es nach Verschwinden des Tagesgestirnes noch ganz kurze Zeit am Westhimmel sichtbar war, so sprach man vom heliakischen Untergange. Fiel das Erscheinen eines gerade unter den Horizont hinabtauchenden Sternes mit dem Aufgange der Sonne zusammen, so sagte man, der Stern sei akronychisch untergegangen, und gleicherweise ging er akronychisch auf, wenn gleichzeitig die Sonne unterging. Der kosmische Auf- und Untergang läßt sich mit dem Auge nicht verfolgen, denn dann befinden sich Stern und Sonne genau am nämlichen Punkte der Himmelskugel[3]). Jede Be-

[1]) Auf diese Zählebigkeit der magnetischen Methode weist ausdrücklich Weyer (Vorlesungen, S. 127) hin.

[2]) Die Schriften der Alten, und unter diesen wieder vorzugsweise die agronomischen — Hesiod, Vergil, Columella, Palladius — sind ohne Vertrautheit mit diesen Kunstausdrücken nicht wohl zu verstehen. Vgl. dazu J. F. Pfaff, Commentatio de ortibus et occasibus siderum apud auctores classicos commemoratis, Göttingen 1786.

[3]) Mathematisch fixiert die Bedingungen für die verschiedenen

obachtung eines heliakischen und akronychischen Auf- und Unterganges liefert also einen bestimmten Zeitpunkt.

Ein solcher ist auch dadurch gegeben, *dass ein bestimmter Stern, von einem bestimmten Orte aus gesehen, hinter einem als unveränderlich zu erachtenden entfernten terrestrischen Gegenstande verschwindet.* Durch solche Beobachtungen die Zeit zu ermitteln, resp. zu verbessern, darauf ist anscheinend zuerst Olbers verfallen [1]). Wenn die Uhr regelmäßig nach Sternzeit gehen soll, so müssen zwischen zwei konsekutiven Verschwindungsmomenten dieser Art je 24 Stunden, und, wenn die Uhr nach mittlerer Sonnenzeit reguliert ist, so müssen $23^h 56^m 4^s$ verfließen.

Die gebräuchlichste Zeitmessung ist stets die *Berechnung eines Stundenwinkels* aus gegebenen anderweiten Daten. Die meisten im vorigen Abschnitte erörterten Methoden der Breitenbestimmung sind so beschaffen, daß aus ihren Schlußformeln neben der Polhöhe auch der Stundenwinkel sich ergibt. Doch sollen ein paar besonders einfache Verfahrungsweisen hier noch einer besonderen Behandlung unterzogen werden.

Zeitbestimmung durch Messung einer Höhe. Sowie die Höhe h eines Sternes gemessen ist, entnimmt man dem Kosinussatze, angewendet auf das Dreieck Zenit-Pol-Stern, für den Stundenwinkel s die nachstehende Relation:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

Um dieselbe für Logarithmen zu aptieren, setzt man [2])

---

hier aufgezählten Modalitäten Hartwig (Ueber die Berechnung der Auf- und Untergänge der Sterne, nebst einigen Hilfstafeln, Schwerin 1862). S. auch unten S. 592.

[1]) Bohnenberger-Jahn, a. a. O., S. 92 ff. Mehrere von Olbers mitgeteilte Beobachtungen sind hier wieder abgedruckt und diskutiert.

[2]) Gar nicht selten kann man für die logarithmische Umformung auch dadurch etwas erreichen, daß man *Hyperbelfunktionen*

$$1 - \cos s = 2 \sin^2 \frac{1}{2} s = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos(90^0 - h)}{\cos\delta \cos\varphi}$$

$$= \frac{2 \sin\left(45^0 - \frac{\delta + h - \varphi}{2}\right) \sin\left(45^0 - \frac{-\delta + h - \varphi}{2}\right)}{\cos\delta\cos\varphi}.$$

Die Differentiierung des Ausdruckes führt, wenn W den Azimutwinkel des sphärischen Dreiecks vorstellt, zu der Gleichung

$$ds = \frac{dh}{\cos\varphi \sin W},$$

und diese vergewissert uns darüber, daß für $W = 90^0$ das Differential ds ein kleinstes, im ersten Vertikale somit die günstigste Gelegenheit zur Vornahme einer solchen Zeitmessung geboten ist[1]).

Zeitbestimmung durch korrespondierende Höhen. Der Absolutbetrag einer einzelnen Höhe, der

an Stelle der Kreisfunktionen einführt. Der hyperbolische Sinus kann jeden Wert annehmen; setzt man also in der Gleichung

$$\cos s = \frac{\sin h}{\cos\delta\cos\varphi} - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\varphi$$

den Minuenden = sin hyp ψ, den Subtrahenden = sin hyp χ, so erhält man sofort

$$\cos s = \sin \text{hyp}\, \psi - \sin \text{hyp}\, \chi = 2 \cos \text{hyp} \frac{\psi + \chi}{2} \sin \text{hyp} \frac{\psi - \chi}{2}.$$

Befindet man sich im Besitze einer Tabelle, welche die zyklischen und hyperbolischen Funktionen in sich vereinigt, etwa derjenigen von Ligowski, so kann man nach dieser letzten Formel ebenso rasch rechnen, wie nach der zuerst angegebenen. Gerade bei sphärisch-astronomischen Aufgaben erweist sich überhaupt nicht selten die Anwendung der bezeichneten, viel zu wenig gekannten analytischen Hilfsgrößen vorteilhaft; Beispiele dafür gab u. a. Huebner, Ebene und räumliche Geometrie des Maßes, Leipzig 1888. S. 262 ff. Die Formeln sind durchweg ebenso handlich, wie diejenigen der gewöhnlichen Trigonometrie, zumal da mit Sinus und Kosinus angenehmer als mit Tangens und Kotangens zu operieren ist, und erstere in der hyperbolischen Trigonometrie nahezu an keine Grenzen gebunden sind.

[1]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 750 ff.

doch stets mit Messungsfehlern behaftet sein muß, wird überflüssig, wenn man von ein und demselben Sterne *zwei gleiche Höhen* nimmt, die also natürlich zu verschiedenen Seiten des Meridianes sich befinden müssen. Das ist die *Methode der korrespondierenden Höhen*, welche nach R. Wolfs wohlbegründeter Ansicht [1]) bis ins graue Altertum zurückgeht. *Das Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten gibt die Uhrzeit der Kulmination.*

Wenn das in Aussicht genommene Gestirn jedoch die Sonne ist, so muß noch eine Korrektion [2]) eintreten, denn es war bisher vorausgesetzt, daß sich die Deklination in der Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen nicht verändere, und bei der Sonne trifft diese Annahme nicht zu. Man hat allgemein (s. o.)

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s;$$

nimmt man die Differentiale, indem man δ und s als veränderlich betrachtet, so erhält man, da jetzt links eine konstante Größe steht,

$$0 = \cos \delta \sin \varphi d\delta - \sin \delta \cos \varphi \cos s d\delta - \cos \delta \cos \varphi \sin s ds,$$

$$ds = d\delta \left(\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sin s} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} s}\right).$$

Um soviel wird also der Stundenwinkel kleiner, wenn die Sonne in Deklination um $d\delta$ zunimmt. T_1 und T_2 seien die Uhrzeiten der Beobachtung; in dem Augenblicke, in welchem die erste Beobachtung stattfand, hatte die Sonne die Deklination δ und den — in Zeit ausgedrückten — Stundenwinkel s. Versteht man unter T_0 die Uhrzeit des wahren Mittages, so kann man die folgenden beiden Gleichungen ansetzen:

$$T_0 - s = T_1, \quad T_0 + s + \frac{1}{2} ds = T_2.$$

---

[1]) R. Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 25. „Die Methode der korrespondierenden Höhen hat sich offenbar aus dem schon von den Aegyptern zur Orientierung ihrer Pyramiden gebrauchten Verfahren, vor- und nachmittags gleich lange Schatten aufzusuchen, herausgebildet."

[2]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 752.

Addiert man, so ergibt sich, da zwischen T_1 und T_0 die Aenderung $\frac{1}{2}ds$ liegt,

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \frac{1}{2}ds,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \frac{1}{2}d\delta\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin s} - \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang} s}\right) \equiv \tau_1 - \tau_2.$$

Die Größe τ_1 nennt man den *unverbesserten Mittag,* die Größe τ_2 die *Mittagsverbesserung.* Zur Vereinfachung haben Gauß und Gerling Tafeln berechnet[1]).

Bestimmung der Längendifferenz durch Signale. Das jedenfalls seiner Idee nach einfachste Verfahren, den Längenunterschied zweier Erdorte A und B zu ermitteln, besteht darin, ein *künstliches Lichtsignal* zu geben, welches von beiden Orten aus gesehen werden kann. A sei der östlicher, B der westlicher gelegene Ort; in dem Augenblicke, in welchem das Licht erblickt wird, sehen beide Beobachter, die sich natürlich vorher schon verständigt haben müssen, auf ihre Uhr; der Beobachter in A hat t_1^h, der in B t_2^h, und es ist also die Längendifferenz proportional $(t_1 - t_2)^h$.

Picard und Römer bedienten sich[2]) großer Feuer, die plötzlich bedeckt wurden; hier war also nicht das Aufleuchten, sondern im Gegenteil das Verschwinden des Lichtes die synchrone Erscheinung. Condamine, De-

---

[1]) Gauß, Tafeln für die Mittagsverbesserung, Monatl. Korresp. z. Bef. d. Erd- u. Himmelskunde, 1811. S. 404 ff. Gerling war damals Gauß' Schüler. Neuere Tafeln dieser Art hat man von den Franzosen Pagel und Perrin, sowie von Spengler (Tafeln zur Berechnung der Aenderung der Länge oder des Stundenwinkels für eine Aenderung der Breite oder der Deklination von einer Minute, Ann. d. Hydr. u. mar. Meteorol., 13. Jahrgang. S. 392 ff.). Vgl. auch Johnston, On finding the Latitude and Longitude in Cloudy Weather, London 1884.

[2]) Eine Anzahl von solchen Signalbestimmungen, namentlich zwischen der Insel Huen, wo Picard, und Kopenhagen, wo Römer beobachtete, hat der Erstgenannte in sein bekanntes Reisewerk (Voyage d'Uranibourg, Paris 1680) aufgenommen.

lisle und Jacques Cassini scheinen die ersten gewesen zu sein, welche *Blickfeuer* zu Hilfe nahmen [1]), wie sie am besten durch Entzündung einer Pulvertonne erzeugt werden. Am besten wird der Ort, an dem das Blickfeuer aufzulodern hat, sich gerade in der Mitte zwischen A und B befinden, denn dadurch eliminiert sich der aus der nicht instantanen Fortpflanzung des Lichtes entspringende Fehler ganz von selbst. Unter allen Umständen ist dieser Fehler ein minimaler, denn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist eine überaus große; aus diesem Grunde empfiehlt sich die Verwendung des Lichtes weit mehr als die des Schalles, welche früher von englischer Seite empfohlen worden ist [2]). Man kann übrigens auch, wenn der Abstand zwischen A und B ein zu großer ist, *Relaisstationen* einschalten [3]). A_1, A_2, A_3 ... seien solche Stationen; A_1 habe gegen A den Längenunterschied l_1, A_2 gegen A_1 den Längenunterschied l_2 u. s. w. Werden dann an den Orten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Signale zu den Ortszeiten $t_1, t_2, t_3 \ldots$ gegeben, so sieht A das Signal von A_1 zur Zeit $t_1 - l_1 = \Theta_0$, während A_2 das nämliche Signal zur Zeit $t_1 + l_2 = \Theta_1$ erblickt. Sind auf diese Art die Größen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2 \ldots$ definiert, so erkennt man auch, daß die Längendifferenz

$$\Lambda = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots = \Theta_1 - \Theta_0 + \Theta_3 - \Theta_2 + \ldots$$

---

[1]) Die erste Erwähnung der Methode findet sich bei De la Condamine (Manière de déterminer astronomiquement la différence en longitude de deux lieux peu éloignés, Mém. de Paris, 1735). Der in der Aufstellung geographischer Beobachtungen erfahrene Gelehrte (s. S. 289) hatte zuerst daran gedacht, nächtlicherweile Geschütze abfeuern zu lassen und den aus der Mündung kommenden Feuerstrahl als Signal zu wählen.

[2]) Hierher gehört eine von Whiston und Ditton gemeinsam verfaßte Schrift: A new Method for discovering the Longitude both at Sea and Land, London 1714. Die Geschwindigkeit des Schalles ist an sich jetzt genau genug bekannt (333 m in der Sekunde), um den Gedanken Whistons realisierbar erscheinen zu lassen, allein Tyndalls Versuche (On the Transmission of Sound by the Atmosfere, Phil. Transact., 1875. S. 38 ff.) haben uns gezeigt, daß der Durchgang des Schalles durch die Luft viel zu sehr durch die allgemeine Wetterlage mit bedingt ist, um stets mit der nötigen Sicherheit in Rechnung gezogen werden zu können.

[3]) Brünnow, a. a. O., S. 336 ff.

ist. Sind im ganzen n Zwischenpunkte vorhanden, so kann man

$$\Lambda = \Theta_{n-1} - (\Theta_{n-2} - \Theta_{n-3}) - \ldots - (\Theta_4 - \Theta_3) - (\Theta_2 - \Theta_1) - \Theta_0$$

setzen, und diese Gleichung belehrt darüber, daß auf den inneren Stationen keine exakten Zeitbestimmungen gemacht zu werden brauchen, sondern daß man für diese nur den Gang der Uhr zu kennen nötig hat.

Statt künstlicher Signale kann man wohl auch solche verwenden, welche die Natur selbst darbietet. In diesem Sinne hat man in früherer Zeit vielfach *Sternschnuppenbeobachtungen* angestellt [1]), um mit deren Hilfe Längendifferenzen zu ermitteln.

Bestimmung der Längendifferenz durch Okkultationen. Auch der Himmel gewährt uns ab und zu die Möglichkeit, Ereignisse wahrzunehmen, welche deshalb, weil sie von verschiedenen Erdorten aus auch zu verschiedenen Zeiten gesehen werden, für die Längenbestimmung ausgenützt werden können. In erster Linie haben wir dabei die *Okkultationen* im Auge, astronomische Vorkommnisse, bei deren Eintreten einem Himmelskörper vorübergehend das Licht entzogen, derselbe ganz oder teilweise für einige Zeit unsichtbar gemacht wird. Wir haben dabei wesentlich vier Fälle zu unterscheiden: es kann der Mond zwischen Sonne und Erde treten, es kann der Mond durch Eintauchen in den hinter der Erde ge-

[1]) Ein Engländer Lynn machte zuerst den Vorschlag, die fallenden Sterne gleichzeitig von zwei Punkten aus anzuvisieren und aus dem Zeitunterschiede, der sich für beide Orte ergab, auf den Längenunterschied zu schließen (A Method for determining the Longitude by the Falling Stars, Phil. Transact., 1727). Brandes und Benzenberg widmeten dieser Anregung sorgfältige Studien und machten in einer gemeinsam darüber verfaßten Schrift (Versuche, die Entfernung, die Geschwindigkeit und die Bahnen der Sternschnuppen zu bestimmen, Hamburg 1800) Andeutungen darüber, worauf dann noch Benzenberg (Ueber die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen, Hamburg 1802) eine besondere Monographie verfaßte. Absolute Sicherheit, ob das von beiden Beobachtern gesehene Objekt auch wirklich beidemale das nämliche war, wird sich wohl niemals gewinnen lassen.

bildeten Schattenkegel verdunkelt werden [1]); es kann eine solche Verdunklung auch für den Begleiter eines entfernten Planeten eintreten; es kann endlich auch ein Fixstern von der näheren, vor ihm dahinziehenden Mondscheibe verdeckt werden. Jedes der vorstehend aufgezählten Phänomene gewährt ein Hilfsmittel zur Auffindung von Längendifferenzen.

I. Sonnenfinsternisse. Das richtige Gefühl, daß die Beobachtung der einzelnen Phasen einer Verfinsterung der Sonne durch den Mond Zeit- und damit auch Längenunterschiede gewähre, hatten schon die Alten, doch kam es nicht zu praktischer Bethätigung des Gedankens; diese blieb vielmehr Kepler überlassen, der auf diesem Wege, freilich noch wenig genau, die Lage seines Wohnortes Graz gegenüber derjenigen der Uranienburg Tycho Brahes bestimmte [2]). Unter dem methodischen Gesichtspunkte trat der älteste Cassini der Sache näher [3]) und fixierte, um ein Beispiel für sein Verfahren zu geben, in dieser Weise die Lage der Städte Nürnberg, Kiel und Greifswald. Seitdem scheint eine ausgiebige praktische Anwendung der Methode nur noch von Wurm [4]) durchgeführt worden zu sein.

Wir können auf eine gründliche Ableitung der Formeln, von welchen die Berechnung der Längendifferenz

---

[1]) Eine meritorische Besprechung der Finsternisse muß bis dahin verschoben werden, wo eine solche systematisch an ihrem Platze ist. Es wird dies im IV. Abschnitte des nächsten Kapitels der Fall sein.

[2]) Mit dieser Längenbestimmung Keplers beschäftigt sich des näheren Delambre (Histoire de l'astronomie moderne, 1. Band, Paris 1821. S. 377).

[3]) Dom. Cassini, Méthode pour faire servir les éclipses du soleil au même usage que celles de la lune pour la connaissance des longitudes, Mém. de Paris, 1700.

[4]) Wurm, Revision der geographischen Längen einiger süddeutscher Sternwarten, Astr. Nachr., Nr. 45. Am 7. September hatte eine Sonnenfinsternis stattgefunden, welche für einen Teil Süddeutschlands ringförmig erschienen war, und von dieser hatte der schwäbische Astronom Gebrauch gemacht, um zu zeigen, daß unser Wissen von der geographischen Lage selbst ganz hervorragender Städte noch sehr der Verbesserung bedürftig sei.

zweier Orte abhängt, an diesem Orte unmöglich eingehen, müssen vielmehr deswegen auf die trefflichen Darstellungen von Sawitsch[1]) und Brünnow[2]) verweisen; die Gaußsche Methode, das Problem zu lösen, hat Ursin[3]) zum Gegenstande einer besonderen Arbeit gemacht. So wichtig für den Astronomen als solchen alle diese Versuche sind, ein an sich hochwichtiges himmlisches Ereignis auch für die Zwecke der geographischen Ortsbestimmung zu fruktifizieren, so stehen doch dem in der Praxis zahlreiche Hindernisse gegenüber. Das einflußreichste davon ist das, daß die Einschiebung des Mondes zwischen Erde und Sonne nicht als einmaliger, thatsächlicher Vorfall erscheint, daß vielmehr die Einzelheiten des Zwischentrittes für verschiedene Orte der Erde sich auch ganz verschieden darstellen. Ganz anders und für die Längenbestimmung günstiger liegen die Dinge bei jenen Eklipsen, zu denen wir nunmehr übergehen.

II. Mondfinsternisse. Der Moment, in welchem die Mondscheibe bis zu einem gewissen Grade verfinstert ist, ist ein absoluter, für alle Orte der Erde synchroner, und wenn deshalb verschiedene Orte für den Eintritt dieses Ereignisses trotzdem verschiedene Zeiten angeben, *so rührt eben dieser Zeitunterschied einzig und allein her von der Verschiedenheit ihrer geographischen Längen.* Heutzutage, wo gute Fernrohre zur Verfügung stehen, kann man die Beobachtungen, die sich früherhin nur auf den Anfang und das Ende der Verfinsterung bezogen, nach Belieben vervielfältigen. Die Oberfläche der unserer Erde ständig zugekehrten Seite unseres Trabanten ist nämlich nichts weniger als homogen, sie ist vielmehr mit Bergen bedeckt, und jede dieser Unebenheiten führt ihren besonderen Namen. Die Beobachter in A und B verständigen sich nun über jene Mondberge, deren Be-

---

[1]) Sawitsch, Abriß der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung, deutsch von Götze, 2. Band, Hamburg 1851. S. 26 ff.

[2]) Brünnow, a. a. O., S. 346 ff.

[3]) Ursin, De eclipsi solari VII Sept. 1820 apparitura secundum methodum geometriae analyticae tractata, Kopenhagen 1820.

deckung durch den Erdschatten sie zeitlich feststellen wollen, und markieren dann die Zeitpunkte, in denen die Beschattung wirklich eintrat. Geschah dies für den östlicher gelegenen Ort A zur Zeit t_1, für den westlicher gelegenen zur Zeit t_2, so ist A um einen Bogen in Länge von B verschieden, welcher der Differenz $(t_1 - t_2)$ proportional sein muß.

Die Methode der Mondfinsternisse ist die geschichtlich älteste, sie begegnet uns bereits in der „Geographie" des Ptolemäus, indem dieser berühmte Begründer der mathematischen Erdkunde auf solche Art die Längenerstreckung der Osthälfte des Mittelländischen Meeres festzulegen bemüht war[1]). Jene Verbesserung, von der oben die Rede war, konnte naturgemäß erst dann ins Leben treten, als man kartographische Darstellungen der sichtbaren Mondoberfläche bekommen hatte; die erste brauchbare Mondkarte, die denn auch für Längenbestimmungen bereits ihre Dienste leistete, war 1667 in Hevels „*Selenographia*" erschienen[2]). Richer beobachtete in Cayenne (s. o. S. 282) das Eintauchen des von Hevel mit dem Namen „Grimaldi" bezeichneten Mondberges in das Dunkel bei einer am 7. September 1672 daselbst stattfindenden Finsternis und fand, daß genannte Insel 54° 30′ westlich von Paris liege[3]) — eine für jene Zeit

[1]) Ptolemaeus, Geographia, lib. I, cap. 4. Zu Arbela in Asien (bekannt durch die große Alexanderschlacht) sollte eine Mondfinsternis um die fünfte, zu Karthago um die zweite Morgenstunde eingetreten sein, und aus dieser Zeitdifferenz von drei Stunden schloß Ptolemäus auf eine Längendifferenz von mehr denn 45°, während dieselbe in Wirklichkeit nur 34° beträgt. Dieser fundamentale Irrtum gab den Anlaß zu der in allen Karten des Mittelalters sich reproduzierenden Auseinanderzerrung des Mittelmeeres, die erst durch Delisle um 1725 wieder auf Grund neuerer und besserer Ermittlungen ausgemerzt zu werden begann (Peschel-Ruge, Gesch. d. Erdk., S. 671).

[2]) Johannis Hevelii Selenographia: sive Lunae desciptio atque accurata tam macularum ejus quam motuum diversorum aliarumque omnium vicissitudinum phasiumque telescopii ope deprehensarum delineatio, Danzig 1647.

[3]) Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne par M. Richer, Paris 1676. S. 17 ff.

überraschend genaue, auf einen Sechstelgrad stimmende Längenmessung.

III. Verfinsterung der Juppiterssatelliten. Mondfinsternisse haben den Nachteil, daß sie für einen bestimmten Erdbezirk nur selten sich einstellen, so daß man also auch nur selten in die Lage kommt, Längenbestimmungen dieser Art vornehmen zu können. Es haben aber mehrere Mitglieder unseres Sonnensystemes mehrere Monde, Mars hat deren zwei, Juppiter vier, Saturn sieben, und auch dem Uranus und Neptun fehlen solche nicht. Jeder Eintritt eines solchen planetarischen Trabanten in den Schatten des Hauptplaneten liefert eine für die gesamte Erdoberfläche, soweit sie überhaupt das fragliche Gestirn über ihrem Horizonte hat, identischen Zeitpunkt, in dessen verschiedener Notierung sich also die Verschiedenheit der geographischen Länge wiederspiegeln muß. Um die Begleiter des Mars, Saturn u. s. w. zu beobachten, bedarf es sehr scharfer Teleskope, wogegen die Juppitersmonde mit ganz gewöhnlichen Fernrohren beobachtet werden können, und so steht denn auch die Längenbestimmung durch die *Immersionen* und *Emersionen* dieser kleinen Sterne seit bald dreihundert Jahren auf der Tagesordnung. Im Jahre 1610 hatte Galilei die Juppiterstrabanten entdeckt, und in den dreißiger Jahren bot er eine auf dieselben sich stützende Methode der Längenbestimmung den niederländischen Generalstaaten an[1]). Doch wurde diese Methode erst dann brauchbar, als Dom. Cassini Tafeln für die Bewegungen dieser Planeten zweiter Klasse aus-

[1]) Die betreffenden, von Galilei geschriebenen Briefe sind sämtlich in dem Schlußbande der Albèrischen Gesamtausgabe enthalten. Besonderes Gewicht legte Galilei (s. sein Schreiben an Realis vom 6. Juni 1637, a. a. O., 7. Band, Florenz 1848. S. 166) auf das *Binokularfernrohr*, welches auf dem schwankenden Schiffe die Beobachtung der Juppiterstrabanten ermöglichen sollte, das jedoch von dem großen Manne nicht eigentlich erfunden, sondern ihm dem Prinzipe nach von einem Neapolitaner Pisani mitgeteilt worden war. Vgl. dazu Govi, Sur l'inventeur des lunettes binoculaires, Compt. rend., vol. XCI. S. 147: Favaro, Sulla invenzione dei cannocchiali binoculari, Turin 1881.

gearbeitet hatte [1]). Mit diesen Tafeln ausgerüstet, haben Picard und Feuillée zuerst auch in dieses lange auf sehr schwachen Füßen stehende Kapitel der Ortsbestimmungslehre die bei den Breiten längst schon erreichte Sicherheit zu bringen vermocht [2]).

IV. Sternbedeckungen. Nicht selten geschieht es, daß ein Stern hinter der Mondscheibe verschwindet und auf deren anderer Seite wieder zum Vorschein kommt. Man kann nun, da der Lauf des Mondes hinreichend genau bekannt ist, eine Tafel konstruieren, in welcher für einen bestimmten Ort die Zeiten dieser Sternbedeckungen voraus berechnet sind, und wenn man dann an einem anderen Orte das betreffende Phänomen zu einer anderen Zeit wahrnimmt, so gestattet diese Verschiedenheit der Zeiten einen Rückschluß auf die Längendifferenz. Speziell für die Bedürfnisse des Seemannes hat Rümker [3]) die Sternbedeckungen abgehandelt, während Hansen [4]) auch an dieser Aufgabe die Kraft seiner ihm eigenen Analyse versuchte. Wir lassen uns jedoch auf eine ausführlichere Erörterung des Themas hier deswegen nicht ein, weil wir es da bloß mit einem besonderen Falle einer sofort an die Reihe kommenden allgemeineren Methode zu thun haben. Im Momente der Okkultation nämlich ist der sphärische Abstand des (punktförmigen) Sternes vom Mondrande gleich Null, und es kann erwünscht sein, den Moment genau festzustellen, in welchem dieser Abstand eine ganz bestimmte Größe besitzt.

Ueberhaupt gewährt das Verhalten des Mondes gegen Fixsterne, die ihrer Lage nach genau bekannt sind, ver-

---

[1]) D. Cassini, Ephemerides Bononienses Mediceorum Siderum, Bologna 1668.

[2]) Peschel-Ruge, Gesch. d. Erdk., S. 536. S. 540. S. 646 ff.

[3]) Rümker, Elementare Darstellung der Analyse der Fixsternbedeckungen des Herrn Bessel, Hamburg 1846—47.

[4]) Hansen, Bestimmung des Punktes vom Mondrande, wo bei Sternbedeckungen der Stern ein- und austritt, Astr. Nachr., Nr. 392—95. Auch für die Berücksichtigung der Refraktion hat Hansen neue Wege bei der Behandlung dieser Frage gewiesen.

schiedene Mittel zur Bestimmung der Länge an die Hand. Wir wollen dieselben jetzt näher kennen lernen.

Kombination von Stern- und Mondörtern; Monddistanzen. Einer der ersten, der *Mond- und Sternkulminationen* in ihrer Aufeinanderfolge beobachtete und daraus die Länge ableitete, war Hamilton[1]). Weiter ausgebildet ward diese Idee durch Nicolai[2]). Man verabredet vorher, welche Sterne, die man deshalb auch *Mondsterne* nennt, beobachtet werden sollen, und mißt an den beiden um Λ in Länge verschiedene Orten A und B die wahre Rektaszensionsdifferenz $(\alpha_1 - \alpha_2)$ zwischen dem Mondrande und einem jener Mondsterne. Hätte der letztere einen scheinbaren Halbmesser ρ_2, so stände eben ein Planet in Frage, was an sich keineswegs ausgeschlossen ist. Mit ρ_1 bezeichnen wir den scheinbaren, vom parallaktischen Fehler befreiten Radius der Mondscheibe, mit δ_1 die Deklination des Mondmittelpunktes, mit δ_2 die des Fixsternes; dann ist

$$\Lambda = \left(\frac{m \,.\, 15 \,.\, 3600}{\sigma} - 1\right) \cdot \left[\alpha_1 - \alpha_2 \mp \frac{1}{15}\left(\frac{\rho_1}{\cos\delta_1} - \frac{\rho_2}{\cos\delta_2}\right)\right].$$

m ist für Sternzeit $= 1$ zu setzen, σ die stündliche Bewegung des Mondes in Rektaszension. Bessel hat sich sehr für die Nicolaische Methode interessiert und insbesondere auch gezeigt, wie man sich die Größe σ mit möglichster Genauigkeit verschaffen könne[3]). Auch das Struvesche Verfahren[4]), auf Grund eines obenhin bekannten Wertes für die Länge sich der Wahrheit immer

[1]) J. Hamilton, On the Method of determining the Longitude by Observations of the Meridian Passages of the Moon and a Star made at two Places, Transact. of the Irish Academy, 1. Band. S. 1 ff.

[2]) Nicolai, Bestimmung der Meridiandifferenz zweier Orte aus korrespondierenden Mondkulminationen, Astr. Nachr., Nr. 26.

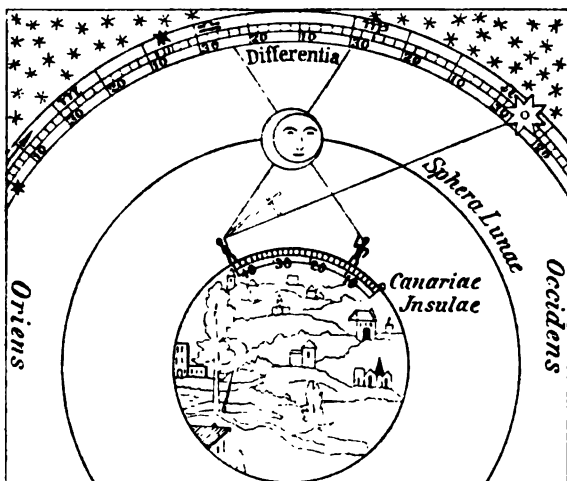
[3]) Bessel, Anleitung und Tafeln, die stündliche Bewegung des Mondes zu finden, ebenda Nr. 33.

[4]) Das Wesen dieses Verfahrens ist, zugleich mit numerischen Beispielen, sehr gründlich von Sawitsch (a. a. O., 2. Band. S. 250 ff.) dargestellt worden.

mehr zu nähern, hat nur als eine Vervollkommnung des soeben geschilderten zu gelten.

Weitaus die größte praktische Wichtigkeit jedoch kommt unter allen hier einschlägigen Methoden derjenigen der *Monddistanzen* zu, insbesondere auch für den geographischen Forschungsreisenden. Zuerst scheint das Wesen dieser Methode mit klarem Blick J. Werner[1]) erfaßt zu haben, und bald nachher setzte eben dieselbe

Fig. 113.



Peter Apian[2]) so richtig auseinander, daß wir an der von ihm gegebenen, freilich die Naivetät des Zeitalters deutlich abspiegelnden Figur *(Fig. 113)* die Sache ganz gut zu erläutern vermögen. Die Erdkugel ist in orthographischer Polarprojektion gezeichnet, so daß der in die Zeichnungsebene fallende Kreis mit dem Aequator über-

[1]) Die bezüglichen Bemerkungen Werners finden sich in seinem uns (S. 254) schon bekannten Kommentare zum ersten Buche der Ptolemäischen Geographie.

[2]) Peter Apian, Cosmographicus liber, Landshut 1524. S. 32.

einstimmt; die Canarischen Inseln geben den Nullpunkt der Zählung für die geographischen Längen, welch letztere durch eine Kreisteilung längs des Aequators zur Anschauung gebracht sind. Parallel und konzentrisch zum Gleicher liegt die Mondbahn, von der also angenommen ist, daß sie mit dem Gleicher zusammenfalle, und abermals als konzentrischer Kreis erscheint uns der Zodiakus, auf den man von der Erde aus die näheren Gestirne projiziert. Im äußersten Westen steht ein Stern, dessen Bogendistanz vom Monde der eine der beiden abgebildeten Beobachter mit dem damaligen Hauptinstrumente, dem Jakobsstabe (S. 86 ff.), mißt, während ein zweiter Beobachter einfach die Stelle des Mondes auf der Himmelskugel fixiert. Von diesem zweiten Beobachter weiß man, daß er im Besitze einer Tabelle ist, aus welcher er den Abstand des Mondrandes vom Sterne für bestimmte Zeiten ein- für allemal vorausberechnet erhält, und wird von der betreffenden Distanz die am zweiten Orte direkt bestimmte subtrahiert, so bleibt das übrig, was in unserer Figur „*Differentia*" genannt und als mit der Differenz der beiderseitigen geographischen Längen identisch erkannt wird.

Noch ehe Werner und Apian diese ihre theoretische Darlegung der Rechnung nach Monddistanzen gegeben hatten, machte Amerigo Vespucci[1]) den praktischen Versuch, durch die Messung des Abstandes zwischen Mond und Mars die Länge der Orinokomündung zu ermitteln, wenn schon mit geringem thatsächlichen Erfolge. Besser gelang dem mathematisch gründlicher durchgebildeten Gemma Frisius 1540 die Längenbestimmung seines Wohnortes Löwen, indem er eine Distanz des Sternes β Scorpii vom Mondrande maß und dadurch den Winkel-

[1]) In v. Zachs „Monatl. Korrespondenz" (1811. S. 428) ist nach Canovais „Elogio di Amerigo Vespucci" näheres über diese Beobachtungen des späteren Astronomen der Magellanschen Expedition mitgeteilt. Uebrigens hat später Wilhelm Barentz, unter dessen Leitung die berühmte Ueberwinterung der Holländer auf Nowaja Semlja stattfand, am 24. Januar 1597 durch Beobachtung einer Konjunktion von Mond und Juppiter, also ebenfalls unter Benützung einer planetarischen Distanz, einen leidlichen Wert für sein auf jener Insel gelegenes Observatorium erhalten.

abstand der Meridiane von Löwen und Krakau nur um 3′ fehlerhaft erhielt [1]). Dann geriet das Verfahren wieder in gänzliche Vergessenheit, so daß hundert Jahre später der französische Astronom Morin damit als mit etwas völlig Neuem hervortreten konnte [2]). Die Ephemeriden, denen man die Abstände des Mondes für einen gewissen Normalmeridian zu entnehmen hatte, genügten freilich noch lange nicht den Anforderungen, und erst seit 1750 begannen allmählich die Grundlagen der Methode eine hinreichende Vervollkommnung zu erhalten, um dieselbe zur geographischen Anwendung geeignet erscheinen zu lassen. Die Mondtafeln Eulers [3]) und Tob. Mayers [4]) gestatteten eine ungleich schärfere Vorausberechnung der Distanzen, und an der Hand des von der englischen Sternwarte herausgegebenen Kalenders vermochten Carsten Niebuhr und Seetzen auf ihren Reisen in Asien Ortsbestimmungen von früher ungeahnter Präzision zu erhalten [5]). Seit Anfang dieses Jahrhunderts kann die Methode der Monddistanzen als durchaus eingebürgert angesehen werden.

Wir befinden uns also im Besitze einer Tafel, in welcher für jeden beliebigen Zeitpunkt die Entfernungen des Mondrandes, resp. Mondmittelpunktes [6]), von gewissen

---

[1]) Gemma Frisius, De radio astronomico, Antwerpen 1545. cap. 22.

[2]) Morin, Astronomia restituta, complectens IX partes hactenus optatae scientiae longitudinum, Paris 1657. Es ist dies die zweite Auflage einer (s. o.) schon 1634 unter dem Titel „Longitudinum terrestrium et coelestium nova et hacctenus optata scientia“ publizierten Schrift.

[3]) L. Euler, Theoria motus lunae, Berlin 1753; Novae tabulae lunares, ebenda 1772; Theoria motuum lunae nova methodo pertractata, ebenda 1772.

[4]) Die beiden hierher gehörigen Werke Mayers (Theoria lunae juxta systema Newtonianum, London 1767: Tabularum motuum solis et lunae et longitudinum methodus promota, ebenda 1770) sind nach des Autors Tode auf Anordnung der britischen Admiralität im Druck erschienen.

[5]) Wegen der Ortsbestimmungen Niebuhrs vgl. in der „Monatl. Korresp.“ Band 3—7, wegen derjenigen Seetzens in der gleichen Zeitschrift Band 8—28.

[6]) Wird zur Randdistanz der bekannte Mondhalbmesser hinzu-

ein- für allemal gewählten Normalsternen[1]) vorausberechnet sind[2]). Man wünscht die Längendifferenz irgend eines Ortes B gegen jenen Meridian kennen zu lernen; zu dem Ende wählt man sich einen der Normalsterne aus und beobachtet, zugleich auf der Uhr die Ortszeit t_2 bestimmend, den Abstand des fraglichen Sternes vom Monde mit dem Spiegelsextanten oder einem anderen dazu geeigneten Instrumente. Die gemessene Distanz befreit man in sofort näher zu kennzeichnender Weise von ihren Fehlern und

---

addiert, so erhält man die in der Tabelle vorgetragene Zentraldistanz.

[1]) Als Normalfixsterne betrachtet man gewöhnlich die folgenden neun: α Arietis, Aldebaran, Pollux, Regulus, Spica, Antares, α Aquilae, α Pegasi, Fomalhaut. Ephemeriden für die vier hellsten Planeten sind zuerst von Schumacher berechnet worden (Tabeller over Distancerne mellem Maanen og de fire Planeter Venus, Mars, Juppiter og Saturn, Kopenhagen 1821—32).

[2]) Selbstredend bezieht sich diese Vorausberechnung nur auf bestimmte Termine, und für die Zwischenzeiten muß eine Interpolationsrechnung eintreten. Seit 1774 hat Frankreichs Hauptkalender („Connaissance des temps") das Intervall von drei Stunden angenommen. Sind allgemein (s. Anton, Ueber das Interpolationsverfahren bei Monddistanzen nach den nautischen Ephemeriden. Ann. d. Hydogr. u. marit. Meteor., 11. Jahrgang. S. 324 ff.) $t_0 \ldots t_n$ die in gleichem Intervalle fortschreitenden Epochen des Nullmeridianes, $D_0' \ldots D_n'$ die zugehörigen geozentrischen Distanzen, und hat man das bekannte Schema

$$\left.\begin{array}{ccccc} D_0' & D_1' & D_2' & D_3' & D_4' \\ \Delta_0'=D_1-D_0 & \Delta_1'=D_2-D_1 & \Delta_2'=D_3-D_2 & \Delta_3'=D_4-D_3 & . \\ & \Delta_0''=\Delta_1'-\Delta_0' & \Delta_1''=\Delta_2'-\Delta_1' & \Delta_2''=\Delta_3'-\Delta_2' & \ldots \\ & & \Delta_0'''=\Delta_1''-\Delta_0'' & \Delta_1'''=\Delta_2''-\Delta_1'' & \ldots\ldots \\ & & & \Delta_0^{(IV)}=\Delta_1'''-\Delta_0''' & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tau = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

gebildet, so wird

$$D' = D_0' + \tau\Delta_0' + \frac{1}{2}\tau(\tau-1)\Delta_0'' + \frac{1}{6}\tau(\tau-1)(\tau-2)\Delta_0''' + \ldots$$

Hieraus leitet man für $\delta = D' - D_0'$ die zwei Hilfstafeln des erwähnten französischen Kalenders ersetzende Näherungsformel

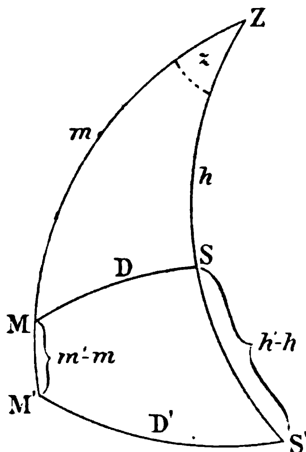
$$\delta = \tau\left[\Delta_0' + \frac{\delta-\Delta_0'}{2\Delta_0'}\left(\Delta_0' + \frac{\delta-2\Delta_0'}{3\Delta_0'}\right)\Delta_0'''\right]$$

her.

geht mit der jetzt rektifizierten Distanz in die Tabelle ein, nachsehend, um welche Zeit t_1 eben diese Distanz zwischen Mond und Stern für einen im Normalmeridian postierten Beobachter zutreffend war. *Die Differenz* $\pm (t_1 - t_2)$ *ergibt dann ohne weiteres die gesuchte Länge.*

Nunmehr kommt es also darauf an, die Distanz fehlerfrei zu machen, sie so zu gestalten, *wie sie einem im Mittelpunkte der Erde befindlichen Auge bei Abwesenheit einer lichtbrechenden Hülle erscheinen würde* [1]. Der Vergleichsstern — der natürlich auch die Sonne sein kann [2]) — hat die gemessene Höhe h, der Mond hat ebenso die gemessene Höhe m, und die Entfernung MS *(Fig. 114)* der beiden in Rede stehenden Punkte ist gleich D. Thatsächlich aber sind M und S nicht die Oerter, um die es sich handelt; es sind dies vielmehr, wenn man die Fehler der Parallaxe und Refraktion gebührend berücksichtigt, die Punkte M' und S'. Die wahre Höhe von M' sei m', die wahre Höhe von S' sei h', die wahre Distanz $M'S'$ sei D'. Wenn man dann noch den Winkel am Zenit mit z bezeichnet, so liefert der Kosinussatz, angewandt auf die beiden Dreiecke MZS und $M'ZS'$, diese beiden Gleichungen:

Fig. 114.



$$\cos D = \sin h \sin m + \cos h \cos m \cos z,$$
$$\cos D' = \sin h' \sin m' + \cos h' \cos m' \cos z.$$

---

[1] Nach einem angeblich von John Herschel herrührenden Bilde ist die Himmelskugel das Zifferblatt, an dem der Mond als Zeiger fortrückt, während die Sterne die Uhrziffern repräsentieren.

[2] Vgl. z. B. Jordan, Grundzüge etc., S. 315 ff.

Hierin sind D, h, m bekannte und zwar unmittelbar gemessene, h' und m' bekannte, aus h und m berechnete Größen; unbekannt sind z und D'. Um ersteres zu eliminieren, multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos h' \cos m'$, die zweite mit $\cos h \cos m$, subtrahiert alsdann und findet

$$\cos D' = \sin h' \sin m' + \frac{\cos h' \cos m'}{\cos h \cos m} (\cos D - \sin h \sin m).$$

Diese etwas schwerfällige Formel für eine bequeme Berechnung mit Logarithmen geeignet zu machen, ist nun das Bestreben unzähliger Mathematiker gewesen, über deren Arbeiten besonders Weyer getreulich Bericht erstattet [1]).

Nach Mackay [2]) und v. Fuß [3]) ist diejenige den beabsichtigten Zweck wenigstens großenteils erreichende Formel die beste, welche bald nach Dunthorne [4]), bald nach Delambre benannt wird, aber in dieser Form zuerst von Lexell [5]) aufgestellt sein dürfte. Wir addieren, um sie zu erhalten, auf beiden Seiten der letzten Gleichung $0 = \cos h' \cos m' - \cos h' \cos m'$ und finden so zunächst

$$\cos D' = \cos (h' - m') - \frac{\cos h' \cos m'}{\cos h \cos m} [\cos (h - m) - \cos D].$$

Gehen wir von der Differenz zweier Kosinus zum Produkte zweier Sinus über, setzen ferner (s. o.) $\cos (h' - m') = \sin \text{hyp}\, \psi$,

---

[1]) Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 776 ff.

[2]) Mackay, The Theory and Practice of finding the Longitude, London 1793.

[3]) Nik. v. Fuß, Sur les principales méthodes de corriger les distances apparentes de la lune à une étoile relativement aux effets de la réfraction et de la parallaxe, Acta Acad. Imp. Petrop., 1779. I. S. 336 ff.

[4]) Nach Dunthornes Vorschrift rechnete seit 1767 der englische „Nautical Almanac“.

[5]) Lexell, Observationes circa methodum inveniendi longitudinem loci ex observata distantia lunae a stella fixa, Acta Acad. Imp. Petrop., 1. Band. S. 350 ff.

$$2\,\frac{\cos h'\cos m'}{\cos h\cos m}\sin\frac{h+D-m}{2}\sin\frac{-h+D+m}{2} = \sin\operatorname{hyp}\chi,$$

so wird, ohne daß noch, wie bei Lexell, eine nichtlogarithmische Zwischenrechnung erforderlich wäre,

$$\cos D' = 2\cos\operatorname{hyp}\frac{\psi+\chi}{2}\sin\operatorname{hyp}\frac{\psi-\chi}{2}.$$

Erinnert sei noch daran, daß, wenn der Refraktion Rechnung getragen wird, auch darauf bedacht zu nehmen ist, daß der Abstand, strenge genommen, nicht vom Umfange einer kreisförmigen, sondern vielmehr von dem einer elliptischen, d. h. elliptisch verzerrten Scheibe gemessen wird. Die bezügliche Korrektur, die sich einfacher, als man vielleicht erwarten sollte, gestaltet, wurde von Schwarz[1]) ausführlich entwickelt, und auch bei Jordan[2]) ist näheres darüber zu finden.

Wir nehmen hiermit von den eigentlich astronomischen Methoden der Längenbestimmungen Abschied. Freilich ist der Gegenstand auch nur extensiv nicht im entferntesten erschöpft[3]), allein mit dem Ziele unseres Buches

---

[1]) Schwarz, Ueber die Reduktion der scheinbaren und wahren Monddistanzen aufeinander, Dorpat 1865.

[2]) Jordan, Grundzüge etc., S. 292 ff. Dem praktischen Geographen kann die durchaus praktische, überall an Selbsterlebtes sich anlehnende Behandlung der Monddistanzen in der Jordanschen Schrift überhaupt kaum warm genug empfohlen werden.

[3]) Man kann hierher rechnen Kaisers Methode (Goulds Astronomical Journal, 1859. S. 57 ff.), den Durchgang des Mondes und eines Sternes durch denselben Vertikal zu beobachten, ferner die Grunertsche Methode der Mond-Azimute, von der Sawitsch (a. a. O., 2. Band. S. 261 ff.) eine genügend ausführliche Skizze entworfen hat. — K. v. Littrows Verfahren, die Länge durch Differenzen von Zirkummeridianhöhen zu finden, eignet sich speziell für die Marine sehr gut (s. Faye, Sur une méthode nouvelle, proposée par M. de Littrow, pour déterminer en mer l'heure et la longitude, Wien 1864). — Besonders einfach erscheint auch die nur ein um eine vertikale Achse drehbares Fernrohr zu Hilfe nehmende Zeitbestimmung Zingers (s. dessen Schrift „Die Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen verschiedener Sterne“,

würde sich längeres Verweilen bei diesen den Astronomen mehr als den Geographen interessierenden Fragen nicht vertragen.

Zeitübertragung durch Chronometer. Wenn man am Orte B die Zeit durch Beobachtung eines Stundenwinkels oder zirkummeridionaler Höhen (S. 575) direkt bestimmt und zugleich eine Uhr besitzt, welche die für A geltende Zeit fehlerlos anzeigt, so kann man Zeitdifferenz und Längendifferenz zwischen A und B durch unmittelbare Vergleichung ermitteln. Hierauf soll, wie gewöhnlich berichtet wird [1], zuerst Gemma Frisius hingewiesen haben [2], allein neueren Forschungen zufolge [3] kann kein Zweifel mehr darüber obwalten, daß Ferdinand Columbus, der Sohn des großen Entdeckers, zuerst auf diesen Vorschlag verfallen ist. Derselbe ist

---

deutsch von Kelchner, Leipzig 1877). Zwei Sterne, deren Rektaszensionen α_1 und α_2, deren Deklinationen δ_1 und δ_2 sind, haben die nämliche Höhe, und den Chronometerzeiten T_1 und T_2 entsprechen die Sternzeiten s_1 und s_2, während u die Uhrkorrektion bedeutet. Dann bestehen folgende Relationen:

$$s_1 = T_1 + u; \quad s_2 = T_2 + u; \quad \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(\alpha_1 - s_1) \\ = \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos(s_2 - \alpha_2).$$

Man setzt $\delta_1 = \delta + \varepsilon$, $\delta_2 = \delta - \varepsilon$, $\alpha_1 - s_1 = t + r$, $s_2 - \alpha_2 = t - r$, $t = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2}$ und findet für die sogenannte *Reduktion* r die Gleichung $\sin t \sin r + \tan\varepsilon \tan\delta \cos t \cos r = \tan\varepsilon \tan\varphi$. — Endlich gedenken wir noch der ihre Bestimmung selbst aussprechenden Schrift K. Mayers „Versuch, die mittlere Ortszeit in See ohne Winkelmessung durch die Beobachtung des Auf- oder Unterganges eines Gestirnes zu bestimmen" (Mitteil. aus dem Gebiete des Seewesens, 1881. S. 260 ff.); da die österreichische Marineverwaltung eigene Tafeln (Pola-Triest-Fiume 1885) für diese Methode ausgeben ließ, scheint sie praktische Vorzüge zu besitzen.

[1] Weyer, Zeit- und Ortsbestimmung, S. 765; Wolf, Gesch. d. Astr., S. 380.

[2] Gemma Frisius, De principiis astronomiae et cosmographiae, Antwerpen 1530.

[3] Gelcich, Beiträge zur Geschichte des Zeitalters der Entdeckungen, Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde zu Berlin, 20. Band. S. 386.

auch ein rechtes Ei des Columbus, die einfachste Methode der Längenbestimmung, die man sich überhaupt denken kann, nur stellte sich freilich jahrhundertelang die geringe Leistungsfähigkeit der Uhrmacherkunst der Realisierung als ein unübersteigliches Hindernis in den Weg. Noch 1758 soll der treffliche schwedische Physiker Wargentin alle Versuche dieser Art für völlig aussichtslos erklärt haben [1]).

Erst durch die Neuerungen, welche der französische Uhrmacher Sully in die Technik eingeführt hatte [2]), ward die bisher ziemlich skeptisch betrachtete *tragbare Uhr* konkurrenzfähig, und Harrison brachte nach verschiedenen minder gelungenen Versuchen 1749 seinen „time-keeper" (Zeithalter) zustande, der auf einer 1764 zur Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Portsmouth und Barbadoes unternommenen Seereise nur 43 Zeitsekunden fehlging und seinem Erfinder die Nationalbelohnung von 10000 Pfund Sterling einbrachte [3]). Seitdem haben diese feinsten Uhren, die sogenannten *Chronometer*, eine solche Vervollkommnung erfahren, daß sie auch bei der stärksten Inanspruchnahme durch Wärme und Kälte ihren gleichmäßigen Gang beibehalten [4]). Immerhin kann auch eine chronometrische Zeitbestimmung nur unter

[1]) Poggendorff, Gesch. d. Physik, S. 733.

[2]) Sully, Description abrégée d'un horloge de nouvelle invention pour l'usage de la navigation, Paris 1724.

[3]) Den genauen Hergang bei Harrisons sich immer steigernden Erfindungen erzählt ausführlich Poggendorff (Gesch. d. Phys., S. 732 ff.). Harrison selbst hat über sein Chronometer eine eigene Schrift (Principles of Time-keeper, London 1767) veröffentlicht.

[4]) An der Seewarte zu Hamburg besteht ein eigenes *Chronometerprüfungsinstitut*, welches der zweiten (astronomischen) Fachabteilung unterstellt ist, und worin jede Firma ihre Erzeugnisse prüfen und eventuell mit dem Stempel der Approbation versehen lassen kann. Van Bebber gibt von der Einrichtung dieses Kabinettes Nachricht in der „Physik im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens" (Stuttgart 1884. S. 132 ff.). Die Temperaturkorrektion des Chronometers stellt Chauvenet (a. a. O., S. 333) durch eine von Lieusson gegebene Formel dar.

Aufbietung vieler Vorsichtsmaßregeln ins Werk gesetzt werden [1]).

Zeitübertragung durch den elektrischen Telegraphen. Bald nachdem das Telegraphieren auf galvanischem Wege den alten optischen Fernsprecher verdrängt hatte, begannen Morse, Wilkes und Bache den elektrischen Draht auch zur Längenbestimmung zu verwenden. Die prinzipiell einfache Methode hat sich rasch eingebürgert; ihre Theorie ist von Albrecht [2]) entwickelt worden. Zwischen den Orten A und B ist ein Draht gespannt, und der zum Durchfluß bestimmte Strom kann an beiden Orten durch Niederdrücken einer Taste geschlossen werden. Jeder Beobachter drückt dann die Taste nieder, wenn er einen bestimmten Stern gerade den Mittelfaden seines Meridianfernrohres passieren sieht, und dadurch entsteht auf dem von der Walze des Chronographen (siehe S. 111) abrollenden Papierstreifen ein Signal. Ist u_1 die im östlicheren Orte A, u_2 die in B solchergestalt bestimmte Uhrzeit, Δt_1 und Δt_2 die jeweilige Uhrkorrektion, i_1 die Korrektion des östlichen, i_2 die des westlichen Instrumentes, p_1 der Personalfehler des östlichen, p_2 der des westlichen Beobachters, x endlich die minimale Zeitverzögerung auf der Linie, so findet man die Sternzeiten t_1 und t_2 an beiden Orten durch die nachstehenden Gleichungen:

$$t_1 = u_1 + (\Delta t_1 + p_1) - p_1 + i_1; \quad t_2 = u_2 + (\Delta t_2 + p_2) - p_1 + i_1 - x.$$

---

[1]) Vgl. wegen der chronometrischen Methode Brünnow (a. a. O., S. 337). Als klassische Belege gelten die hierher gehörigen Arbeiten der beiden Struve: F. G. W. v. Struve, Expédition chronométrique entre Poulkova et Altona, Petersburg 1846; O. v. Struve, Expéditions chronométriques de 1845 et 1846, ebenda 1857.

[2]) Albrecht, Ueber die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des elektrischen Telegraphen, Leipzig 1869. Außerdem behandeln die Angelegenheit mehr oder minder einläßlich: Brünnow, a. a. O., S. 338 ff.; Chauvenet, Manual etc., 1. Band. S. 341 ff.; Herr-Tinter, a. a. O., S. 573 ff.; Wolf, Handbuch etc., S. 118 ff. Letztere Darstellung war in ihrer Kürze für uns besonders maßgebend.

Diesmal hatte der Beobachter in A das Zeichen gegeben; nunmehr thut es derjenige in B; statt u_1, u_2, t_1, t_2 erhält man jetzt andere Werte u_1', u_2', t_1', t_2' und

$$t_1' = u_1' + (\Delta t_1 + p_1) - p_2 + i_2 - x; \; t_2' = u_2' + (\Delta t_2 + p_2) - p_2 + i_2.$$

Je nachdem man die in A oder B gegebenen Zeichen oder aber die in A und B gemachten Sternaufzeichnungen zu Grunde legt, hat man für die Längendifferenz Λ von A und B:

$$\text{I.} \quad \Lambda = t_1 - t_2 = u_1 - u_2 + p_1 - p_2 + \Delta t_1 - \Delta t_2 + x,$$

$$\text{II.} \quad \Lambda = t_1' - t_2' = u_1' - u_2' + p_1 - p_2 + \Delta t_1 - \Delta t_2 - x,$$

$$\text{III.} \quad \Lambda = t_1' - t_1 = u_1' - u_1 + p_1 - p_2 + i_2 - i_1 - x,$$

$$\text{IV.} \quad \Lambda = t_2' - t_2 = u_2' - u_2 + p_2 - p_1 + i_2 - i_1 + x.$$

Nimmt man das arithmetische Mittel aus I und II, so bekommt man einen von der Instrumentalkorrektion, nimmt man das arithmetische Mittel aus III und IV, so bekommt man einen von der Uhrkorrektion befreiten Wert.

Eingehendere Nachweisungen über die Methode und die an derselben anzubringenden Ausgleichungen müssen in der betreffenden Litteratur nachgesehen werden. Dieselbe ist überaus reich an Monographien über einzelne ausgeführte Längenbestimmungen [1]).

[1]) Vgl. besonders: C. A. F. Peters, Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin, Altona 1861; Hansen, Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, Leipzig 1866; Kortazzi, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Pulkowa, Helsingsfors, Åbo, Lowisa und Wiborg, St. Petersburg 1871; Bruhns, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien, auf telegraphischem Wege ausgeführt, Abhandl. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Math.-phys. Kl., 10. Band. S. 203 ff.; Bruhns, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Wien, Leipzig 1871.

Drittes Kapitel.

Die Erde als bewegter Körper im Raume.

I. Beseitigung der soliden Himmelskugel durch Parallaxenbestimmung.

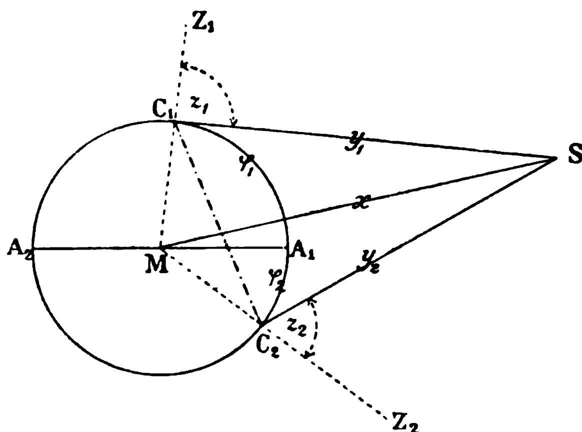
Im großen und ganzen konnte die mathematische Geographie bis zu diesem immerhin schon ziemlich vorgerückten Punkte geführt werden, ohne daß an der dem Augenscheine entsprechenden Annahme, welcher zufolge die Erde eine inmitten der konzentrischen Himmelskugel frei schwebende Kugel darstellt, gerüttelt zu werden brauchte. Nur das zweite Kapitel begann mit Erörterungen über den dortmals neu eingeführten Begriff der *Parallaxe,* welche, weiter ausgeführt, eine Beseitigung jener Annahme notwendig in ihrem Gefolge hätten haben müssen. So weit zu gehen, lag jedoch an jenem Orte keine Veranlassung vor: wir durften uns vielmehr mit der Erkenntnis begnügen, daß für die Zwecke der geographischen Ortsbestimmung, und diese lagen uns zunächst allein am Herzen, die Hypothese von einer soliden Himmelskugel noch vollständig ausreiche. Nur zuletzt zwang uns die Thatsache, daß Sterne hinter dem Monde verschwinden und auf dessen anderer Seite wieder zum Vorschein kommen, die Ueberzeugung auf, daß der Mond der Erde näher sein müsse, als jene anderen Himmelskörper[1]. Und so wollen wir nunmehr der Sache

[1]) Man erinnert sich, daß diese Thatsache früher bloß deshalb festgestellt worden war, um darzuthun, daß lediglich dann, wenn der zum Zwecke einer Ortsbestimmung beobachtete Himmelskörper der Mond war, die elliptische Abweichung des Erdmeridianes in Rechnung gezogen werden mußte.

näher treten und die Frage aufwerfen: *Wie können wir die Entfernung eines Gestirnes von der Erde bestimmen?*

Allgemeine Methoden der Distanzbestimmung. Der nächstliegende, an das bei der trigonometrischen Höhenmessung (s. S. 502 ff.) eingeschlagene Verhalten erinnernde Gedanke ist sicherlich der: *Wir messen auf der Erdoberfläche eine Basis, bestimmen an deren Endpunkten die von der Grundlinie mit den nach dem Gestirne gehenden Visierlinien gebildeten Winkel und berechnen dann*

Fig. 115.



trigonometrisch die gesuchte Distanz. Unmittelbar in dieser Form angewandt, würde das Verfahren nur für kleinere Entfernungen brauchbare Ergebnisse zu liefern geeignet sein; wir können jedoch dem Grundgedanken leicht eine Modifikation geben, mit welcher er einer allgemeinen Anwendbarkeit teilhaftig wird.

M (Fig. 115) ist der Mittelpunkt der Erdkugel, $A_1 A_2$ der Aequator, C_1 und C_2 sind zwei dem in die Papierebene fallenden Meridiane angehörende Erdorte. Je weiter C_1 und C_2 auseinanderliegen, um so größer ist die Mes-

sungsbasis, um so genauer die Bestimmung; es wird somit C_1 (Breite φ_1) auf der nördlichen, C_2 (Breite φ_2) auf der südlichen Halbkugel zu wählen sein. In dem Augenblicke, in welchem der Stern S, der vom Erdmittelpunkte die Entfernung $MS = x$ hat, in den für C_1 und C_2 gemeinsamen Meridian eintritt (kulminiert), werden in C_1 und C_2 die Zenitdistanzen, $\sphericalangle SC_1Z_1 = z_1$ und $\sphericalangle SC_2Z_2 = z_2$ gemessen, und dann besitzt man genug Daten, um x finden zu können. Ein ebenes Viereck ist nämlich vollständig bekannt, wenn man fünf Stücke desselben kennt; nun kennt man aber in unserem Falle Seite MC_1 = Seite MC_2 = dem Erdhalbmesser r, $\sphericalangle C_1MC_2 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\sphericalangle SC_1M = 180^\circ - z_1$ und $\sphericalangle SC_2M = 180^\circ - z_2$. Zieht man die Sehne C_1C_2, so wird $C_1C_2 = 2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$.

$\sphericalangle MC_1C_2 = \sphericalangle MC_2C_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, so daß

$$\sphericalangle C_2C_1S = 90^\circ - \left(z_1 - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\sphericalangle C_1C_2S = 90^\circ - \left(z_2 - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

wird. Im Dreiecke C_1C_2S kennt man jetzt eine Seite und die beiden anliegenden Winkel; setzt man $C_1S = y_1$, $C_2S = y_2$, so besteht die Proportionenkette

$$y_1 : y_2 : 2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$= \cos\left(z_2 - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right) : \cos\left(z_1 - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$: \sin(z_1 + z_2 - \varphi_1 - \varphi_2).$$

y_1 und y_2 sind hieraus zu entnehmen, und zuletzt ergeben sich aus den Dreiecken MC_1S und MC_2S die beiden folgenden, sich kontrollierenden Formeln:

$$x = \sqrt{r^2 + y_1^2 + 2ry_1 \cos z_1} = \sqrt{r^2 + y_2^2 + 2ry_2 \cos z_2}.$$

Hiermit ist die gestellte Aufgabe erledigt.

Der erste in größerem Maßstabe unternommene Versuch dieser Art von Distanzbestimmung fällt in das Jahr 1671, in welchem Richer (s. o. S. 282) zur Beobachtung der Opposition des Mars nach Südamerika entsendet wurde, während Dom. Cassini mit den in Paris anzustellenden Korrespondenzbeobachtungen beauftragt war [1]). Eine zweite Expedition dieser Art, welche Baron Krosigk zu Beginn dss 18. Jahrhunderts zu gleichem Behufe zustande brachte, erreichte ihren Zweck in weit weniger vollständiger Weise, denn J. W. Wagner, der in Berlin thätig war, erfüllte zwar seine Pflichten sehr gut [2]), allein sein Genosse Kolb, der an das Kap der guten Hoffnung gesendet worden war, genügte den an ihn gestellten Anforderungen in keiner Weise [3]). Um so besser realisierte sich der Krosigksche Plan fast ein halbes Jahrhundert später. Die französische Akademie sandte nämlich Lalande im Jahre 1750 nach Berlin, Lacaille nach Südafrika, und als die Beobachtungen dieser beiden Astronomen verarbeitet wurden, stellte sich ein völlig zutreffender Wert für die Entfernung des Mondes und des Mars von der Erde heraus [4]).

---

[1]) R. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 480 ff. S. 639 ff.

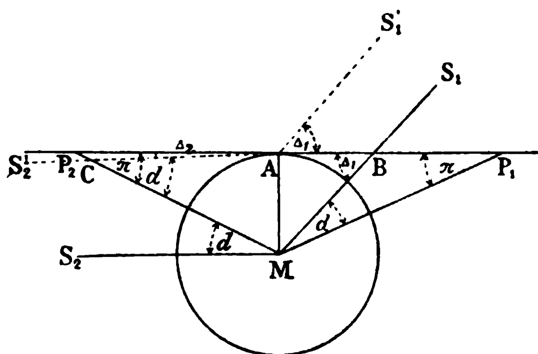
[2]) Wagner, Brevis narratio de ratione ac methodo observationum astronomicarum D. B. Fr. de Krosigk Berolini et simul in Capite Bonae Spei peraliquot annos olim institutarum, Miscell. Berol., 1740. S. 236 ff.

[3]) Es soll nicht verschwiegen werden, daß das von Kolb über seine Reise edierte Werk (Caput bonae spei hodiernum, Nürnberg 1719) für die Geographie und insbesondere für die Völkerkunde des südafrikanischen Dreieckes sich sehr förderlich erwiesen hat, aber eben der astronomische Bestandteil desselben ist durchaus verfehlt.

[4]) Näheres darüber findet sich in den folgenden Abhandlungen: Lalande, Observations faites à Berlin par ordre du roi sur la distance de la Lune, Mém. de Paris, 1751, S. 457 ff.; Lacaille, Observations faites au Cap pour déterminer la parallaxe de la Lune, du Mars et de la Vénus, ebenda 1751. S. 398 ff. Die Methode, wie wir sie oben auseinander gesetzt, ist in Lalandes „Premier mémoire sur la parallaxe de la Lune et sur sa distance à la Terre“ (a. a. O., S. 48 ff.) ausführlich beschrieben, so zwar, daß die Erde nicht als Kugel, sondern als Sphäroid vorausgesetzt ward.

Zur Korrektion der in der angegebenen Weise erzielten Resultate bediente sich Dom. Cassini[1]) eines eigenartigen Verfahrens, mit dem sich dann gleich nachher auch Flamsteed[2]) eingehend beschäftigte. Der

Fig. 116.



Kreis in *Fig. 116*, dessen Mittelpunkt M ist, soll den Erdäquator darstellen, in dessen Ebene zugleich zwei Sterne P und S, von denen der erstere der weiter entfernte ist, ihren (scheinbaren) täglichen Umlauf um die Erde vollziehen. Ueber den Horizont des Aequatorpunktes erhebt sich P in P_1, wogegen dieser Stern in P_2 unter den genannten Horizont hinabsinkt; während dieser beiden Momente wären S_1 und S_2 die geozentrischen, d. h. vom Mittelpunkte der Erde aus gesehenen Stellungen des näheren Sternes, und naturgemäß muß $\sphericalangle P_1 M S_1 = P_2 M S_2 = d$ sein. Wenn wir aber die scheinbaren, d. h. vom Punkte A aus gesehenen Stellungen S_1' und S_2' des näheren Sternes betrachten, wobei $A S_1' \parallel M S_1$ und $A S_2' \parallel M S_2$ ist, so treten jetzt die parallaktischen Verschiedenheiten hervor. Wenn nämlich π die Horizontalparallaxe (S. 459) von P ist, und wenn resp. Δ_1 und Δ_2

---

[1]) Dom. Casini, Les éléments de l'astronomie vérifiez, Paris 1684.

[2]) Flamsteed, Phil. Trans., 1673.

die Winkel bedeuten, welchen die resp. im Auf- und Untergangsmomente nach P gezogenen Visierlinien mit AS_1' und AS_2' einschließen[1]), wenn ferner MS_1 und AP_1 sich in B, AS_2' und MP_2 sich in C durchschneiden, so erhält man in Konsequenz des Satzes, daß ein Dreiecksaußenwinkel so groß ist, als die Summe beider von ihm getrennt liegenden Innenwinkel, angewandt auf die Dreiecke ABM und ACP_2, sofort:

$$\pi + d = \Delta_1, \quad \pi - d = -\Delta_2, \quad \pi = \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2).$$

Die Winkelgrößen Δ_1 und Δ_2 sind (s. o.) durch Beobachtung bekannt, und damit gilt ein gleiches für die Horizontalparallaxe von P. Die Entfernung x letzteren Gestirnes vom Erdzentrum ist aber dann durch die Relation $x = r \operatorname{cosec} \pi$ gegeben[2]).

Aeltere Methoden zur Bestimmung der Sonnenparallaxe. Theoretisch müßte im Sinne einer der beiden vorstehend erörterten Vorschriften auch die Entfernung der *Sonne* von der Erde ermittelt werden können; thatsächlich aber fallen dabei die zu messenden Winkelgrößen zu klein aus, als daß darauf eine einigermaßen genaue Rechnung begründet werden könnte. Das hat man schon in alter Zeit gefühlt und deshalb von je nach besonderen Methoden für diese Aufgabe gesucht.

---

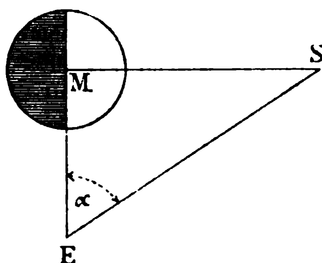
[1]) Der $\sphericalangle P_1 A S_1'$ kann direkt beobachtet werden, beim $\sphericalangle P_2 A S_2'$ ist dies nicht thunlich, da ja S_2' nicht mehr sichtbar ist, allein da beide Sterne sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, so liefert die Zeit, welche zwischen dem Untergange von S und dem von P verstreicht, ein Maß für genannten Winkel.

[2]) Zu dem offenbar an nicht ganz leicht zu erfüllende Bedingungen geknüpften Verfahren Cassinis macht R. Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 160) eine Bemerkung: „Befinden sich der Beobachter und P nicht im Aequator, hat P Eigenbewegung, und beobachtet man nicht unmittelbar bei Auf- und Untergang, so ergeben sich kleine, aber offenbar durch Rechnung zu bewältigende Differenzen, und es liegt also jedenfalls eine weitere Methode zur Parallaxenbestimmung vor, welche den großen Vorteil hat, daß sie durch *einen* Beobachter, an demselben Orte und mit dem gleichen Instrumente ausgeführt werden kann.“ Dagegen ist die Refraktion störend.

Zwei dieser Methoden entstammen bereits dem klassischen Altertum.

I. Das Verfahren des Aristarch. Ein Zeitgenosse des Archimedes, der Samier Aristarch, machte den sachlich ganz passenden Vorschlag [1]), in dem Augenblick, in welchem der Mond genau halb erleuchtet, also gerade ins erste oder letzte Viertel getreten sei, den Winkel α zu bestimmen, welchen die nach den Mittelpunkten von

Fig. 117.



Sonne und Mond gezogenen Gesichtslinien miteinander bilden. *E (Fig. 117)* sei der Beobachtungsort, *S* der Sonnen-, *M* der Mondmittelpunkt; das Dreieck *MES* ist, wenn die durch die Beleuchtungsgrenze (einen Hauptkreis des Mondes) gelegte Ebene den Punkt *E* in sich aufnimmt, in *M* rechtwinklig. Die Größe *EM* wird als bekannt, die Parallaxe des Mondes also nach einem anderen Verfahren bereits bestimmt angenommen; $\sphericalangle$ *MES*

---

[1]) Die Aristarchsche Schrift „Von der Größe und Entfernung der Sonne und des Mondes" wurde in lateinischer Uebersetzung von Valla (Venedig 1498) und Commandino (Pesaro 1571), in der Ursprache von Wallis (Oxford 1688) herausgegeben. Daß man durch Messung gewisser, der Beobachtung zugänglicher Winkelgrößen den einfachen Grundgedanken des griechischen Astronomen in einer den höchsten Grad von Schärfe verbürgenden Weise umgestalten könne, ist von Grunert (Ueber Aristarchs Methode, die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen, Arch. d. Math. u. Phys., 5. Teil. S. 401 ff.) darzuthun versucht worden.

$= \alpha$ ist gemessen, und wenn also noch π die Sonnenparallaxe darstellt, so hat man

$$ES = EM \sec \alpha, \quad \operatorname{cosec} \pi = \frac{r}{EM} \cos \alpha.$$

So richtig die Regel ist, in der astronomischen Praxis kann sie gleichwohl keine eigentliche Verwendung finden. Die Rauheit der Mondoberfläche macht die Bestimmung des Zeitpunktes der halben Erleuchtung so gut wie unmöglich, und ein auch nur kleiner Fehler im Winkel α ändert die Strecke ES sofort um sehr beträchtliche Werte.

So fand denn Aristarch α gleich 87°, also viel zu klein, und durch ein geistreiches Näherungsverfahren[1]) ergab sich ihm $\frac{EM}{ES} > \frac{1}{20}$, aber $< \frac{1}{18}$, somit ungefähr $= \frac{1}{19}$. Dieser Wert stimmt freilich, wie wir weiter unten sehen werden, mit der Wirklichkeit recht wenig überein, denn der fragliche Bruch ist ungefähr $= \frac{1}{400}$. Auch später hat man aus diesem Grunde von der Anwendung dieser Methode absehen zu müssen geglaubt, und Keplers in seinen „Ephemeriden" für 1619 an die Astronomen gerichteter Appell, mit dem Fernrohre die Aristarchsche Winkelmessung zu wiederholen, konnte nur wenig Anklang finden[2]).

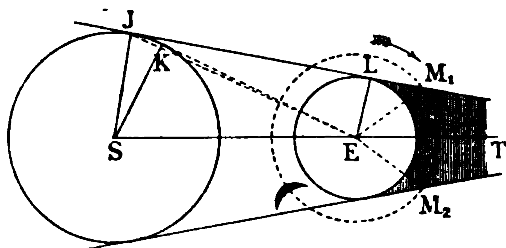
---

[1]) Die Schwierigkeiten, die Aristarch zu besiegen hatte, bestanden der Hauptsache nach darin, daß es damals noch keine Trigonometrie und ebensowenig ein Mittel zur Ausziehung der Wurzel aus Irrationalzahlen gab. Die Art, wie der Genannte für $\sqrt{2}$ den Näherungswert $\frac{7}{5}$ auffindet, macht seinem mathematischen Talente alle Ehre.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 387 ff. „Nachdem im Anfange des 17. Jahrhunderts Kepler einer Neubestimmung gerufen hatte, unternahm der Belgier Gottfried Wendelin wenigstens eine Revision der Aristarchschen Bestimmung: er maß nämlich 1650 auf Majorca unter Anwendung des Fernrohres wiederholt zur Zeit des Viertels den Abstand des Mondes von der Sonne und fand für

II. Das Verfahren des Hipparch. Dieses Verfahren[1]) wird durch *Fig. 118* erläutert, worin der Kreis mit dem Zentrum S die Sonne, der kleinere Kreis um E die Erde und der größere (gestrichelte) Kreis um E die Mond-

Fig. 118.



bahn bedeutet. Hinter der Erde hat sich der — in der Zeichnung schraffierte — Schattenkegel gebildet, dessen Achse ET mit der verlängerten Verbindungslinie der Mittelpunkte von Sonne und Erde zusammenfällt. Der Mond, dessen Bewegungsrichtung der Pfeil anzeigt, tritt bei M_1 in den Schattenkegel, um diesen bei M_2 wieder zu verlassen; zieht man EM_1 und EM_2, so ist $\sphericalangle M_1EM_2 = 2\sphericalangle M_1ET$. Ferner seien SJ und EL senkrecht zu der in die Papierebene fallenden Seitenlinie des Berührungskegels; zieht man nach JE, so hat man

$$180^\circ - \sphericalangle JEM_1 = \sphericalangle LJE + \sphericalangle LM_1E = \sphericalangle JES + \sphericalangle M_1ET.$$

Für die hier vorkommenden Winkel läßt sich die Bedeutung unschwer ausmitteln. Es ist $\sphericalangle LJE$ gleich der Horizontalparallaxe der Sonne ($=\odot$), $\sphericalangle LM_1E$ gleich derjenigen des Mondes (☾), $\sphericalangle JES$ gleich dem schein-

denselben im Mittel 89°45′." Dieser Wert ist immer noch zu klein, die Sonnenparallaxe berechnet sich daraus beinahe noch um die Hälfte zu groß.

[1]) Vgl. wegen der Hipparchschen Methode, welche durch das „Almagest" des Ptolemäus vor der Vergessenheit bewahrt wurde, Wolf, Gesch. d. Astr., S. 174 ff.

baren Sonnenhalbmesser (ρ)[1]. Den Umkreis seiner Bahn legt der Mond in t Zeiteinheiten zurück, während zur Beschreibung von arc $M_1 M_2$, wie die direkte Beobachtung mit der Uhr lehrt, t' Zeiteinheiten gebraucht werden. Dann ist also die Proportion arc $M_1 M_2 : 360^0 = t' : t$ zu Recht bestehend, und es ist der durch arc $M_1 M_2$ gemessene $\sphericalangle M_1 E M_2 = \frac{360\, t'}{t}$. Führt man alle diese Werte in unsere obige Winkelgleichung ein, so bleibt

$$\odot + \text{☾} = \rho + \frac{180\, t'}{t}, \quad \odot = \rho - \text{☾} + \frac{180\, t'}{t}.$$

Damit ist also die gesuchte Sonnenparallaxe auf lauter bekannte Größen zurückgeführt, allein während ☾, ρ und t sehr genau bekannt sind, laufen bei der Bestimmung von t' stets Fehler mit unter, welche den ganzen Berechnungsmodus illusorisch machen.

Es stellte sich bei solcher Sachlage mehr und mehr die Notwendigkeit heraus, eine schärfere Methode zur Berechnung der Entfernung der Erde von der Sonne zu besitzen. Eine solche ist denn auch seit etwa zweihundert Jahren bekannt.

Die Durchgänge der unteren Planeten durch die Sonnenscheibe. Ebenso wie der Mond, eine Finsternis verursachend, hie und da zwischen Erde und Sonne tritt, kann es auch geschehen, daß das Dreieck, welches im allgemeinen durch die Sonne, Erde und einen der beiden unteren Planeten — *Merkur* oder *Venus* — gebildet wird, in eine grade Linie ausartet. Man spricht alsdann von einem *Durchgang* oder *Vorübergang* des betreffenden Planeten. Derjenige, welcher zuerst diesem Phänomen seine Aufmerksamkeit zuwandte, war Kepler, dessen Schriftchen „De raris mirisque anni 1631 phae-

[1]) Strenge genommen, ist ρ gleich $\sphericalangle KES$, den man erhält, wenn man von E eine Berührende EK an die Sonnenscheibe gelegt denkt. Indes liegen die Radien SJ und SK sehr nahe aneinander, und die Differenz ($\sphericalangle KES - \sphericalangle JES$) wird immer außerordentlich gering sein.

nomenis, Veneris puta et Mercurii in Solem incursu, Admonitio ad astronomos rerumque coelestium studiosos" aus den „Ephemeriden" für das genannte Jahr von seinem Schwiegersohn Bartsch herausgegeben ward [1]) (zuerst Leipzig 1629, dann Frankfurt a. M. 1630). Kepler gesteht zuerst seinen im achten Kapitel der „Astronomiae pars optica" begangenen Irrtum ein, kraft dessen er für das ganze 17. Jahrhundert die Möglichkeit geleugnet habe, „ut stella Veneris particulam Solis tegat", allein bei der Neuberechnung habe er gefunden, daß am 6. Dezember 1631 (neuen Stiles) ebenso wie später am 25. Mai 1761 (alten Stiles) die Venus sich auf die Sonnenscheibe projizieren müsse. Im Jahre 1607 habe er, Kepler, auch den Merkur in der Sonne zu sehen geglaubt [2]); damals habe freilich eine Verwechslung mit einer „macula solis" obgewaltet, aber am 7. November 1631 werde wirklich der erwähnte Planet durch die Sonne gehen. Diese „Aufforderung" war von Erfolg begleitet.

Gassendi zwar, der eben durch Kepler aufmerksam gemacht worden war, vermochte nur den Vorübergang des Merkur und nicht auch den der Venus zu beobachten [3]), letzteres deshalb, weil die Erscheinung, an sich richtig vorausberechnet, für Europa überhaupt unsichtbar blieb [4]). Dann aber trat am 4. Dezember 1639 das gleiche Phänomen wiederum ein [5]), und diesmal gelang dem Engländer

---

[1]) Kepleri Opera omnia, ed. Frisch, 7. Band, Frankfurt a. M. 1868. S. 589 ff.

[2]) Ibid. 2. Band. S. 110.

[3]) Im vierten Bande der großen sechsbändigen Gesamtausgabe der Werke Gassendis (Lyon 1658) enthält der vierte zwei an den Mathematiker Schickard in Tübingen gerichtete Briefe unter dem zusammenfassenden Titel „Mercurius in Sole visus, Venus invisa". Die Beobachtung wurde — nach damaliger allgemeiner Sitte — in der Weise angestellt, daß durch das ausgezogene Fernrohr das Sonnenbildchen auf einer senkrecht zur Rohrachse aufgestellten weißen Tafel entworfen ward.

[4]) R. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 640. Einer von Lalande angestellten Revision zufolge war Venus, als die Sonnenscheibe für Europa aufging, aus dieser schon wieder ausgetreten.

[5]) Ein durch die theoretische Astronomie bestätigtes Naturgesetz, mit dessen Begründung wir uns freilich an dieser Stelle

Horrox[1]) eine befriedigende Beobachtung desselben. Alsdann häuften sich die Beobachtungen wenigstens für die häufiger eintretenden Merkurdurchgänge, von denen einen Shakerley am 3. November 1651 zu Surate[2]), Hevel einen zweiten am 3. Mai 1661 zu Danzig[3]), Halley endlich einen dritten am 7. November 1677 auf der Insel St. Helena[4]) beobachtete. Dieser letztere ward von allen der folgenreichste.

Indem nämlich Halley die Beziehungen zwischen Merkur- und Sonnenparallaxe, wie sie sich bei einem solchen Ereignisse gestalten, näher ins Auge faßte, drängte sich ihm die Wahrnehmung auf, daß bei einem Venusdurchgange die Verhältnisse zur Ermittlung der wahren Distanz zwischen Sonne und Erde ganz ungleich günstiger gelagert seien. Mit prophetischem Blicke wies er nachmals auf den Durchgang des Jahres 1761 hin, den ja auch Kepler (s. o.) richtig vorausgesagt hatte, und er-

---

nicht beschäftigen können, bestimmt, daß zwei Venusdurchgänge stets in einem ungefähren Zeitraum von acht Jahren sich folgen, worauf dann wieder mehr als ein Jahrhundert bis zur Wiederkehr des Ereignisses verfließt. Die sechs seit Keplers Zeit fällig gewesenen Venusdurchgänge trafen auf die nachstehend bezeichneten Jahre: 1631 und 1639, 1761 und 1769, 1874 und 1882.

[1]) Horrox hinterließ eine Schrift über seine Beobachtung im Manuskripte (er starb bereits im Jahre darauf), und diese wurde durch Huygens' Vermittlung an Hevel übergeben, der sie (Venus in Sole visa) als Anhang zu seiner eigenen, sofort zu erwähnenden Monographie über den Merkurdurchgang abdrucken ließ.

[2]) Bezüglich dieser Beobachtung Shakerleys vgl. Kästner, Geschichte der Mathematik, 2. Band, Göttingen 1797. S. 430, sowie Wing, Astronomia Britannica. 2. Band, London 1669. S. 312.

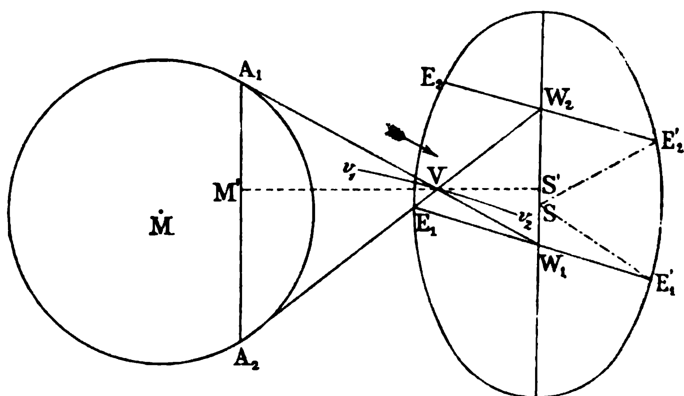
[3]) Hevelius, Mercurius in Sole visus, Danzig 1662. Hevels Beobachtungsmanier war die gleiche, wie diejenige Gassendis (s. o.); er verbreitet sich über dieselbe in der „Machinae Coelestis pars posterior“ (Danzig 1679. S. 372 ff.).

[4]) Halley, Methodus singularis, qua Solis parallaxis sive distantia a terra, ope Veneris intra Solem conspiciendae, tuto determinari poterit, Phil. Transact., 1716. Nach Poggendorff (Handwörterbuch etc., 1. Band. Sp. 1086) soll der Grundzug des von Halley angegebenen Verfahrens allerdings auch in einem älteren Werke J. Gregorys (Optica promota, seu abdita radiorum reflexorum et refractorum mysteria geometrice enucleata, London 1663) zu finden sein.

mahnte die Nachwelt, diese außerordentlich günstige Gelegenheit zur genauen Bestimmung einer astronomischen Fundamentalgröße nicht ungenutzt vorübergehen zu lassen. Wir werden bald sehen, daß dieser Ermahnung ganz und voll entsprochen worden ist.

Um den Sachverhalt in möglichst einfacher Weise klarzulegen, beziehen wir uns auf *Fig. 119*. Der Kreis um M bedeutet einen zur Venusbahn senkrechten größten

Fig. 119.



Kreis der Erdkugel, während durch die Ellipse, deren Mittelpunkt S ist, die in der perspektivischen Zeichnung verzogene Sonnenscheibe dargestellt werden soll [1]). A_1 und A_2 seien zwei auf demselben Hauptkreise gelegene Erdorte, $v_1\, v_2$ sei ein Stück der Venusbahn. Der Beobachter in A_1 sieht den Planeten in E_1 ein-, in E_1' austreten, während für den Beobachter in A_2 vielmehr E_2 der Eintritts-, E_2' der Austrittspunkt ist. Die Bogen-

[1]) Gewöhnlich wird eine Kugel, wie man sie auch abbildet, als durch einen Kreis begrenzt dargestellt. Wir haben uns jedoch oben die Sonne auch nicht als eine Kugel, sondern, dem sinnlichen Augenscheine folgend, als eine flache Kreisscheibe gedacht.

stücke E_1E_1' und E_2E_2' sind so klein, daß sie unbedenklich als gradlinige, parallele Sehnen der Sonnenscheibe angenommen werden dürfen; auch die Größen dieser Sehnen sind leicht zu erhalten, denn wenn T die Umlaufsdauer der Venus bedeutet, während nach den in A_1 und A_2 gemachten Beobachtungen zur Durchlaufung der Wege E_1E_1' und E_2E_2' bezüglich die Zeiten t_1 und t_2 erforderlich waren, so hat man ersichtlich, unter R den bekannten Halbmesser der Venusbahn verstanden[1]),

$$E_1E_1' = 2W_1E'_1 = \frac{2R\pi t_1}{T}, \quad E_2E_2' = 2W_2E_2' = \frac{2R\pi t_2}{T}.$$

Die Halbierungspunkte W_1 und W_2 der Sehnen liegen aus geometrischen Gründen auf einem Durchmesser der Sonnenscheibe, welcher auf beiden Sehnen normal steht und in der Ebene des Erdhauptkreises A_1A_2 gelegen ist. Man kann jetzt also auch die Distanz W_1W_2 der Halbierungspunkte leicht bestimmen. Zieht man nämlich die Radien SE_1' und SE_2', deren jeder gleich ρ sein soll, so sind die Dreiecke SW_1E_1' und SW_2E_2' resp. in W_1 und W_2 rechtwinklig, und man hat nach dem pythagoreischen Lehrsatze $SW_1 = \sqrt{\rho^2 - \overline{W_1E_1'}^2}$, $SW_2 = \sqrt{\rho^2 - \overline{W_2E_2'}^2}$. Die beiden Dreiecke A_1A_2V und W_1W_2V sind einander ähnlich, in ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen — hier $VM' = R$, dort $VS' = x$ — wie die zugehörigen Grundlinien, und aus der so sich ergebenden Proportion

$$x : R = W_1W_2 : A_1A_2$$

folgt, da $A_1A_2 = a$ als bekannt angenommen werden kann, zunächst

$$(x + R) : R = (a + W_1W_2) : a$$

und endlich die gesuchte Entfernung der Erde von der Sonne[2])

[1]) Die Venusparallaxe kann mit Recht als bekannt vorausgesetzt werden, da die Venus zeitweise nahe genug an der Erde ist, um auf ihre Entfernung nach der eingangs beschriebenen, allgemeinen Methode geprüft werden zu können.

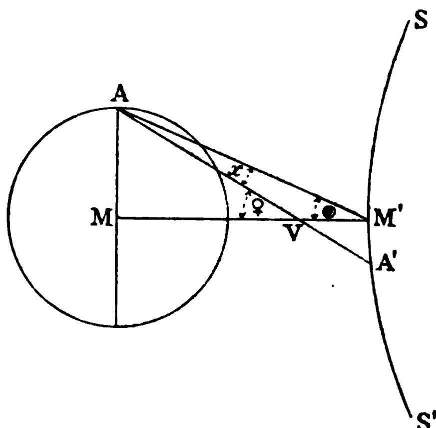
[2]) Das doppelte Vorzeichen zwischen den beiden Wurzelzeichen mußte deshalb eingefügt werden, weil in der Figur nur

$$M'S' = x + R$$
$$= \frac{R}{a}\left(a + \sqrt{\rho^2 - \frac{R^2\pi^2 t_1^2}{T^2}} \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{R^2\pi^2 t_2^2}{T^2}}\right).$$

Hiermit wäre also die gestellte Aufgabe gelöst.

Um nicht die Entfernung selbst, sondern die Parallaxe der Sonne zu ermitteln, sind zwei Verfahrungsweisen im Gebrauche. Nach Halley selbst denkt

Fig. 120.



man sich vom Erdmittelpunkte M *(Fig. 120)* auf die Sonnenscheibe SS' ein Lot gefällt, welches diese in M' trifft, und dem auch die Venus selbst angehört. Aus A, dem Endpunkte eines auf MM' senkrecht stehenden Erdhalbmessers, erblickt man die Venus auf der Sonnenscheibe in A'; der Bogen $A'M'$ liefert angenähert den $\sphericalangle M'AA' = x$, während $\sphericalangle AVM$ der Venusparallaxe ♀ und $\sphericalangle AM'M$ der Sonnenparallaxe ⊙ gleich ist. Dann ist aber ⊙ = ♀ − x. Selbstverständlich muß bei der Be-

einer der beiden möglichen Fälle berücksichtigt ward. Dort ist nämlich $W_1W_2 = SW_1 + SW_2$, während bei anderer gegenseitiger Lage der irdischen Fixpunkte A_1 und A_2 sehr wohl $W_1W_2 = SW_1 - SW_2$ sein könnte.

rechnung Rücksicht darauf genommen werden, daß der Beobachtungsort *A* nicht ruhig im Raume stehen bleibt, sondern infolge der — hier zu antizipierenden — Umdrehung der Erde seine Stellung der Sonnenscheibe gegenüber unaufhörlich ändert. — Etwas anders ging Delisle zu Werke[1]), der die schon oben in groben Zügen geschilderte *Methode der Kontakte* schuf. Zwei in der Ostwestlinie möglichst weit voneinander entfernte Beobachter bestimmen genau die Zeiten τ_1 und τ_2 für das Eintreten des nämlichen Kontaktes[2]); dann liefert die Verspätung $\pm(\tau_2 - \tau_1)$ ein Maß für die Größe $2(♀ - ☉)$, und ♀ wird als bekannt vorausgesetzt. — Indem wir uns auf diese kurzen Angaben über die in der Astronomie thatsächlich gebrauchten Methoden beschränken, begnügen wir uns, weiterer Ausführung halber auf die speziellen Bearbeitungen des Problems zu verweisen, deren es eine große Menge gibt[3]).

---

[1]) J. N. Delisle, Mémoire pour trouver la parallaxe du Soleil par le passage de Mercure sur le disque de cet astre, Mém. de Paris, 1743. S. 419 ff. Die Abhandlung ist eigentlich nur das Supplement zu einer gleich betitelten, welche der genannte Astronom in den „Mémoires" 1723 hatte erscheinen lassen.

[2]) Wie überhaupt dann, wenn ein kleinerer Kreis sich über einen größeren hinwegbewegt, müssen viererlei Berührungsmomente unterschieden werden: die erste äußere, die erste innere, die zweite innere und die zweite äußere Berührung. Theoretisch würde die chronometrische Bestimmung eines solchen Kontaktes ausreichend sein, doch wird man in Wirklichkeit sämtliche Kontakte verfolgen, für jeden einzelnen die Berechnung vornehmen und schließlich ein Mittel aus den so erhaltenen Einzelbestimmungen suchen.

[3]) Eine der ältesten hierher gehörigen Schriften ist: Röhl, Merkwürdigkeiten von den Durchgängen der Venus, Greifswald 1768. Die kleine Arbeit enthält viel Gutes, insbesondere eine eingehende Untersuchung über die Periodizität in der Wiederkehr der Vorübergänge eines unteren Planeten (S. 7 ff.). Von neueren für den Fachmann geschriebenen Schriften nennen wir hauptsächlich die folgenden: Hansen, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge mit besonderer Berücksichtigung des 1874 eintreffenden Vorüberganges, Leipzig 1870; Friesach, Der am 26. Dezember 1882 bevorstehende Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe vorausberechnet, Wien 1882. Daneben machen wir noch auf zwei für einen größeren Leserkreis berechnete, von den Mitteln der Elementarmathematik jedoch ausgiebig Gebrauch machende

Die beiden Venusdurchgänge von 1761 und 1769 wurden nach Kräften für die Wissenschaft ausgenutzt. Boscovich [1]) hatte sich vorher schon bemüht, die günstigsten Beobachtungsstationen ausfindig zu machen, und so sandten denn alle Kulturländer ihre Beobachter an die am passendsten erscheinenden Plätze [2]). Encke [3]) hat die Messungen des Jahres 1761, Powalky [4]) diejenigen des Jahres 1769 genau berechnet, und zwar fanden sich jeweils aus den ersteren und letzteren die Werte für die Horizontaläquatorialparallaxe der Sonne gleich 8,5309 und gleich 8,83 Bogensekunden. Demnach stimmt dieser Winkelwert so ziemlich mit demjenigen überein, unter welchem einem normalen Auge ein Spinnenfaden in der deutlichen Sehweite erscheint.

Noch mehr war selbstverständlich von den Durchgängen der Jahre 1874 und 1882 zu erwarten; Beobachtungsmethoden und Beobachtungsmittel hatten sich entsprechend verfeinert [5]), und zumal die ausgedehnte Anwendung der *Astrophotographie* [6]) versprach gute Er-

---

Programmabhandlungen aufmerksam: Fr. Hofmann, Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe, Bayreuth 1881; Fr. Wolf, Die Bestimmung der Sonnenparallaxe mittelst der Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe, Metz 1885.

[1]) Boscovich, De proximo Veneris sub Sole transitu, Phil. Transact., 1760. S. 865 ff.

[2]) Hierüber orientieren die Geschichtswerke (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 641 ff.; Mädler, Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 464 ff.).

[3]) Encke, Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von 1761 hergeleitet, Gotha 1822. Dem folgte bald: Der Venusdurchgang von 1769, ebenda 1824.

[4]) Powalky, Neue Untersuchung des Venusdurchganges von 1769, Kiel 1864.

[5]) Zumal die für die Genauigkeit sehr schädliche *Tropfenbildung* ward untersucht, indem man sogar *künstliche Planetendurchgänge* arrangierte. Der Moment nämlich, in dem ein Kontakt beginnt oder endet, läßt sich schwer bestimmen, weil der dunkle Kreis an der hellen Peripherie zu kleben, mit ihr durch einen seine Gestalt verändernden „Tropfen“ zusammenzuhängen scheint. Dies beruht wahrscheinlich auf einer Irradiationserscheinung, auf einer ungleichmäßigen Reizung der Netzhaut. Siehe Newcomb-Engelmann, Populäre Astronomie, Leipzig 1881. S. 211 ff.

[6]) Ueber diesen neuen Zweig der beobachtenden Sternkunde unterrichtet man sich, soweit es sich um das vorliegende Problem

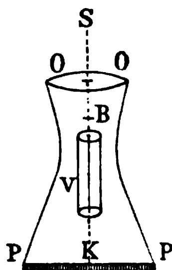
folge. An nicht weniger denn 61 über die ganze Erde verstreuten Plätzen waren im Jahre 1882 Astronomen postiert; Deutschland hatte u. a. Beobachtungsexpeditionen nach Ispahan in Persien, nach dem Kingawa-Fjord in Grönland, nach der Insel Süd-Georgien an der Nordgrenze des Südlichen Eismeeres entsendet. Auf die abschließende Bearbeitung der Resultate wird noch einige Zeit gewartet werden müssen. Einer vorläufigen Mitteilung von Harkness zufolge[1]) ergäbe sich aus den photographischen Aufnahmen ein parallaktischer Winkel von 8,847″ mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,012″; einer Aenderung der Sonnenparallaxe im Betrage von $\frac{1}{100}$″ würde eine Aenderung in der Größe der Sonnendistanz gleich nahe 171000 km entsprechen.

Wirkliche Entfernungen im Weltraume. In Anwendung des einen und anderen im gegenwärtigen

---

handelt, am besten aus folgenden Monographien: Recueil de mémoires, rapports et documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, Paris 1874; Hasselberg, Bearbeitung der photographischen Aufnahmen im Hafen Possiet, St. Petersburg 1877; Weinek, Die Photographie in der messenden Astronomie, insbesondere bei Venusvorübergängen, Nova Acta der kais. leop.-karol. Akad., 41. Band, I, 2. Nach Weinek stellt man das Aufnahmerohr, dessen Verschluß die Camera bildet, entweder horizontal und sendet den Sonnenstrahl durch einen Heliostaten (selbstthätigen Drehspiegel) in das Rohr hinein, oder man montiert das Rohr parallatisch (s. S. 99). *Fig. 121* gibt ein Bild des *Astrophotographen*; *O O* ist das dem aufzunehmenden Himmelskörper S zugekehrte Objektiv, dessen Brennpunkt sich bei *B* befindet; direkt hinter *B* befindet sich die Vergrößerungsvorrichtung *V*, und der durch *V* hindurchgegangene Strahl *SB* trifft bei *K* auf die photographische Platte, in deren raschem Wechsel die Bürgschaft für das Gelingen brauchbarer Abbildungen der einzelnen Phasen des Planetendurchganges gelegen ist.

Fig. 121.



[1]) Diese Mitteilung wurde gemacht in der im August 1888 zu Cleveland (Ohio) stattgehabten Versammlung der „American Association for the Advancement of Science"; vgl. die Notiz im „Humboldt" (8. Jahrgang. S. 220).

Kapitel erörterten Verfahrens, sowie auch unter Benutzung eines Lehrsatzes, den uns erst Abschnitt VI als das dritte Keplersche Gesetz vorführen wird, ist man nun im Laufe der Zeit zur Kenntnis derjenigen Entfernungen gelangt, welche für die uns zumeist interessierenden Wandelsterne gelten. Aus Gründen, die in den nächstfolgendeu Abschnitten dargelegt sind, gibt man für den einzelnen Planeten die Entfernung von der Sonne und nicht von der Erde an, eine einfache Subtraktion liefert dann aber auch diese letztere. Insofern sich aber auch herausstellen wird, daß fragliche Entfernungen nicht stets die gleichen sind, pflegt man nur die *mittleren Entfernungen* anzugeben. Für diese aber läßt sich folgendes Schema aufstellen [1]):

Mittlere Entfernung				
der Erde von der Sonne:	148627000 km	=	20000000 geogr. M. (rund)	
des Merkur v. d. Sonne:	56751000 „	=	7670000 „ „ „	
der Venus „ „ „ :	107300000 „	=	14500000 „ „ „	
des Mars „ „ „ :	226440000 „	=	30600000 „ „ „	
der Planetoiden [2]) von der Sonne:	407000000 „	=	55000000 „ „ „	
des Juppiter v. d. Sonne:	774780000 „	=	104700000 „ „ „	
des Saturn „ „ „ :	1406000000 „	=	190000000 „ „ „	
des Uranus „ „ „ :	2856400000 „	=	386000000 „ „ „	
des Neptun „ „ „ :	4474780000 „	=	604700000 „ „ „	

Für uns haben diese Zahlen [3]) zunächst die Bedeutung,

---

[1]) Diese Zahlen, die dann erst in Kilometer umgerechnet wurden, sind der von W. Meyer und Schwalbe besorgten elften Auflage von Diesterwegs bekanntem, auch von uns schon (z. B. S. 268) zitiertem Werke (Populäre Himmelskunde und mathematische Geographie, Berlin 1890) entnommen worden, welches sich überall an die neuesten Bestimmungen hält.

[2]) Die kleinen Planeten erfüllen in ihrer Vielzahl (s. S. 77) eine ziemlich breite Kugelschale, resp. den Zonenteil einer solchen. Pallas z. B., deren Abweichung von der Ekliptik ebenfalls besonders groß ist, hat von der Sonne eine größte und kleinste Entfernung, welche resp. das 3,43fache und das 2,11fache der Distanz zwischen Sonne und Erde beträgt.

[3]) Anhangsweise seien auch noch die Zahlen für den Erdmond angeführt. Dessen größte Entfernung von der Erde (Diesterweg, a. a. O., S. 408) beträgt 407110, die kleinste 356650, die mittlere also 385080 km.

daß sie uns zur Aufstellung des Satzes verhelfen: *Die Annahme, dass die Planeten sämtlich ihre Bewegungen an der Innenseite einer Kugel beschreiben, kann nicht länger aufrecht erhalten werden.*

Hinsichtlich der Fixsterne liegen die Dinge fürs erste noch anders: *für sie versagen sämtliche uns bisher bekannt gewordenen Mittel der Parallaxenbestimmung*[1]. Erst im fünften Abschnitte werden wir solche Mittel kennen lernen; bis dahin ist es nicht nur gestattet, sondern eigentlich logisch notwendig, für diese Gestirne noch an der Existenz einer gemeinsamen Sphäre festzuhalten. In der That liegt diese Annahme auch allen Weltsystemen, das Coppernicanische nicht ausgenommen, zu Grunde, und erst, wie gesagt, im fünften, mehr noch aber im neunten Abschnitte dieses Kapitels werden wir zu der den astronomischen Anschauungen der neuesten Zeit entsprechenden kosmologischen Auffassung uns zu erheben imstande sein.

II. Die Weltsysteme des Altertums.

Das System der Pythagoreer. Der erste Versuch, die Gesamtheit der himmlischen Bewegungen unter einem einheitlichen Gesichtspunkte zu begreifen, scheint von Pythagoras (6. und 5. vorchristliches Jahrhundert) ausgegangen zu sein; dieser Philosoph stand[2] ohne

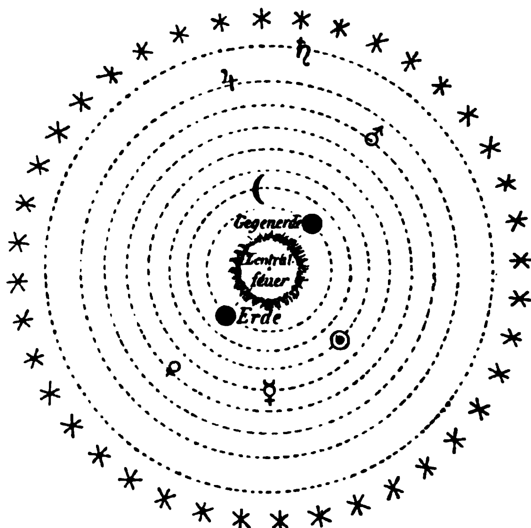
---

[1] Man mag die Grundlinie auf der Erde so groß wählen, als man will, stets fallen die von deren Schlußpunkten nach einem Fixsterne gezogenen Visierlinien parallel aus, die Parallaxe scheint folglich gleich Null zu sein. Dann befände sich also der Stern in unendlich großer Entfernung von uns. Das kann aber auch daran liegen, daß die Basis zu klein genommen wurde, und da uns, wie der IV. Abschnitt zeigt, die Möglichkeit gegeben ist, eine Messungsbasis von ganz unverhältnismäßig größerer Ausdehnung, als sie der Erddurchmesser hat, zu verwenden, so findet sich endlich, daß die Parallaxe zwar auch dann noch klein, aber doch von meßbarer Größe ist.

[2] Die Ansichten über das, was Pythagoras, von dem ja keine Schriften uns erhalten blieben, eigentlich bezweckte, gingen lange Zeit sehr auseinander; eine Erörterung der Streitfrage in ihren früheren Stadien enthält Gruppes Buch „Die kosmischen

Zweifel auf dem *geozentrischen Standpunkte,* d. h. er verlegte die Erde in den Mittelpunkt des Kosmos. Die an den Meister sich anschließende Schule der Pythagoreer

Fig. 122.



dagegen ging weit über diese dem Zeugnis der Sinne angepaßte Lehre hinaus, und insbesondere auf Philolaus, der um 400 v. Chr. lebte, wird ein wesentlich anders gestaltetes Weltsystem zurückgeführt [1]). Von ihm

---

Systeme der Griechen" (Berlin 1851). Neuerdings hat der erste Kenner antiker Wissenschaft, Henri Martin in Rennes, der Sache eine tiefgehende Untersuchung gewidmet (Hypothèse astronomique de Pythagore, Bullettino di bibl. e di storia delle scienze mat. e fis., 5. Band. S. 99 ff.) und in dieser die Interpretation der altpythagoreischen Lehren gegeben, welche wir oben zu der unsrigen machten.

[1]) In Fluß gebracht ward die Untersuchung über den Gegensatz der alt- und jung- (nicht neu-) pythagoreischen Astronomie durch eine gehaltvolle Arbeit des Philologen Boeckh (Untersuchungen

gibt *Fig. 122* ein Bild [1]). Um das sogenannte Zentralfeuer, das durchaus nicht für die Sonne gehalten werden darf, bewegen sich, von außen nach innen gerechnet, die Fixsternsphäre, sodann Saturn, Juppiter, Mars, Venus, Merkur, Sonne, Mond und Erde; zu dieser letzteren gehört aber als notwendige Ergänzung die „Gegenerde“ (ἀντίχθων), welche der wirklichen Erde stets diametral gegenübersteht, so daß der Erdbewohner die durch das Zentralfeuer verdeckte niemals zu Gesichte bekommen kann.

Das System des Eudoxus und Aristoteles. Im 4. vorchristlichen Jahrhundert begründete Eudoxus aus Knidos, ein Schüler Platons, ein neues Weltsystem, dem man den Vorzug der Originalität und logischen Folgerichtigkeit in keiner Weise absprechen darf, obwohl der Standpunkt des Begründers noch der ausschließend geozentrische ist. Lange mißverstanden [2]), sind die Lehren des Eudoxus erst durch den berühmten Mailänder Astronomen Schiaparelli [3]) ihrem wahren Sinne nach inter-

---

über Philolaus des Pythagoreers Lehren, Berlin 1819). Die oben gegebene, als endgiltig anzusehende Deutung dagegen führt sich wieder auf H. Martin zurück (Hypothèse astronomique de Philolaus, Bullettino etc., 5. Band, S. 127 ff.).

[1]) Zum besseren Verständnis dieser sowie mancher folgenden Figur sei daran erinnert, daß man für die einzelnen Planeten, sowie für Sonne und Mond die nachstehenden Zeichen gebraucht: ☿ = Merkur, ♀ = Venus, ♁ = Erde, ♂ = Mars, ♃ = Juppiter, ♄ = Saturn, ♅ = Uranus, ♆ = Neptun, ☉ = Sonne, ☾ = Mond. Die kleinen Planeten bezeichnet man durch Nummern, z. B. (4) = Vesta.

[2]) Bailly z. B. (Histoire de l'astronomie ancienne, Paris 1775. S. 242) erklärt die Eudoxische Anordnung einfach für „absurd“. Aehnlich ungünstig drücken sich auch noch andere Historiker aus, welche nicht tiefer in die Quellen eindrangen, aber selbst Schaubach (Ueber Eudoxus' Vorstellung vom Planetensystem, Gött. Gel. Anzeigen, 1800, Nr. 54) und Ideler (Ueber Eudoxus, Abhandl. d. Berl. Akad. d. Wissensch., hist.-phil. Kl., 1830. S. 49 ff.), die beide mit allem Ernste sich diesem Studium unterzogen, drangen nicht zu völliger Klarheit durch.

[3]) Schiaparelli, Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele, Mailand 1876; deutsch bearbeitet von

pretiert worden, und nunmehr erst begreift man, wieso eine große Anzahl bedeutender Männer noch bis an die untere Grenze des Mittelalters hin das *System der homozentrischen Sphären* dem Ptolemäischen vorziehen oder sich doch veranlaßt sehen konnte, zwischen den beiden Doktrinen eine Vermittlung anzubahnen. In der Mitte des Alls steht nach Eudoxus die Erde; zu jedem Planeten aber gehört nicht bloß, wie die Pythagoreer angenommen hatten, eine einzige Sphäre, sondern eine ganze Anzahl von Kugelflächen, die unendlich nahe aneinander liegen, und mit deren jeder der Wandelstern fest verbunden ist. *Jeder dieser Kugelflächen eignete eine ganz bestimmte Bewegung;* ob sich der griechische Denker diese Sphären ideell, als rein geometrische Gebilde oder aber als mehr materielle Vehikel vorstellte, das läßt sich heute nicht mehr mit Sicherheit übersehen. Eine Bewegungsform war sämtlichen Kugelflächen gemeinschaftlich: die rotatorische, zufolge deren jeder Stern, ob fest oder sonstwie beweglich, die den Wechsel von Tag und Nacht bedingende vierundzwanzigstündige Umdrehung um die Erde vollzog. Außerdem erhielten Sonne und Mond je zwei, jeder der fünf eigentlichen Planeten aber drei Sphären zugeteilt, auf jeden der genannten Himmelskörper wirkten drei, resp. vier Impulse ein, und diese nötigten ihn, solche sphärische Kurven zu beschreiben, wie sie eben durch die Beobachtung ergeben worden waren. Wir haben schon früher (S. 77) gesehen, daß der plötzliche Uebergang aus der rechtläufigen in die rückläufige Bewegungsrichtung, das anscheinend unmotivierte Stillstehen u. s. w. die Bahnen der Planeten, besonders der oberen, schwer erklärbar macht, während bei Mond und Sonne derartige Unregelmäßigkeiten nicht hervortreten. Schiaparellis Scharfsinn gelang es, mit Hilfsmitteln, die in keiner Art über die bei einem grie-

---

W. Horn (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 22. Jahrgang, Supplementheft, S. 101 ff.). In die leichter verständliche Sprache der analytischen Geometrie übertrug die synthetischen Konstruktionen Schiaparellis Künßberg (Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxus von Knidos, Dinkelsbühl 1888. S. 38 ff.).

chischen Geometer der voreuklidischen Zeit vorauszusetzenden hinausgehen, zu zeigen, daß aus der Kombination der vorstehend beschriebenen Einzelbewegungen heraus eine krumme Linie als thatsächlich von den Planeten zurückgelegt hervorgeht, die sogenannte *Hippopede* der Alten[1]), welche eine Schleifenform besitzt, der bekannten Lemniskate[2]) sehr ähnlich sieht und wirklich mit den von den Wandelsternen am Himmel beschriebenen Bahnen in allen Hauptpunkten übereinstimmt.

Die Folgezeit hat großenteils die Lehre des Eudoxus angenommen und zu verbessern gesucht, ohne daß freilich diese vermeinten Verbesserungen wirklich solche gewesen wären. Wie Aristoteles[3]) berichtet, war Calippus von Cyzicus mit der Einfachheit des Systemes in seiner ursprünglichen Gestalt nicht zufrieden; es schien ihm die wirklichen Bewegungen der Gestirne nicht hinlänglich treu darzustellen, und so machte er aus den (3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =) 26 Sphären seines Vorgängers deren (4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =) 33. Selbst hiermit aber glaubte sich Aristoteles selbst nicht begnügen zu können[4]), vielmehr fügte er zwischen die calippischen noch die von ihm mit diesem Namen belegten „Reagenzsphären" ein, wodurch die Gesamtzahl auf (2 . 3 + 6 . 4 + 5 . 5 =) 55 anstieg. Was durch diese Vervielfältigung im einzelnen für eine richtigere Wiedergabe der wahren Planetenbahnen geleistet sein mochte,

---

1) Der Name kommt, als eine vom Pferde beschriebene Achterlinie, zuerst in der Schrift des Xenophon über die Reitkunst vor.

2) Diejenige ebene Kurve, auf der alle Punkte liegen, deren Entfernungen von zwei festen Punkten ein konstantes Produkt ergeben, wird Lemniskate genannt.

3) Aristoteles, Metaphysica, lib. XII, cap. 8. Eine deutsche Uebersetzung der fraglichen Stellen s. bei Horn (a. a. O., S. 180 ff.). Wegen Calippus wäre auch der diesen Namen führende Artikel des Verf. in Ersch und Grubers „Enzyklopädie" zu vergleichen.

4) Die Auffassung, welche Aristoteles in die Sphärentheorie hineintrug, ist weniger aus dem Buche „De cœlo", als vielmehr aus dem Kommentare des Simplicius zu diesem Werke (Ausgabe von S. Karsten, Utrecht 1865. S. 219 ff.; Horn, a. a. O., S. 182 ff.), einer wertvollen Fundgrube geschichtlicher Daten, zu entnehmen.

das mußte das System an Einfachheit und Natürlichkeit zu seinem Schaden einbüßen.

Wenn man den Grundgedanken des Systemes der konzentrischen Sphären prüft, so erkennt man die Wahrheit des folgenden Satzes: *Der ersten Ungleichheit der Planetenbewegung gegenüber gibt es keine Auskunft, die zweite dagegen erklärt es in einer für seine Zeit musterhaften Weise.* Die sogenannte zweite Ungleichheit nämlich besteht in dem Retrograd- und Stationärwerden, in der Spitzen- oder Schleifenbildung, die man bei den Planetenbahnen zu beobachten hat, wogegen die erste Ungleichheit sich in dem Umstande ausspricht, daß die *Grösse der Gestirne* zu verschiedenen Zeiten selbst eine verschiedene ist. Bei Sonne und Mond vermochte das scharfe Auge der Hellenen ohne besondere Messung, die jedoch ebenfalls vorgenommen ward [1]), die Ungleichheit des scheinbaren Durchmessers zu verschiedenen Zeiten des Jahres bezüglich Monates festzustellen, und auch bei den helleren Wandelsternen, vorab bei Venus und Mars, zeigten die dem unbewaffneten Auge sich aufdrängenden Schwankungen im Helligkeitsgrade, daß die Entfernung des bezüglichen Himmelskörpers nicht immer die gleiche sein könne, und eben eine solche variable Entfernung ließ sich mit dem Eudoxischen System durchaus nicht in Einklang bringen. Dies war denn auch wohl vornämlich die Ursache, aus der die Fachmänner seit Hipparchs Zeit sich mehr und mehr von jener Ansicht ab- und derjenigen zuwandten, welche nachher durch Ptolemäus ihre wissenschaftliche Begründung erfahren hat.

Die Lehre von der Erdbewegung im Altertum. Ehe wir jedoch zu der Ptolemäischen Epoche über-

---

[1]) Eine solche Messung besitzen wir z. B. von Archimedes, in dessen „Buch von der Sandeszahl" (Band II der Heibergschen Gesamtausgabe, S. 248 ff.) der Sonnendurchmesser im Mittel ganz richtig $= \frac{1}{720}$ der Peripherie gesetzt wird. Archimedes bediente sich kleiner Zylinder, die er vor seinem Auge so lange verschob, bis sie ihm die Sonne gerade verdeckten.

gehen können, haben wir noch bei einer anderen, überaus interessanten Phase in der Entwicklung der planetarischen Astronomie bei den Alten zu verweilen, welche allerdings bloß eine Durchgangsphase und ohne besondere Einwirkung auf spätere Leistungen geblieben ist. Es gab auch zur Griechenzeit schon Männer, *welche für eine doppelte Bewegung der Erde um ihre Axe, sowie um die Sonne eingetreten sind*[1]). Die Frage, ob wir Platon bereits zu den Verfechtern der Achsendrehung zu zählen haben, ist eine noch offene; in der That scheint es, als habe er in seinem Alter sich von seinem ursprünglichen pythagoreischen Standpunkte abgewendet und eine rotatorische Bewegung der Erde für möglich gehalten[2]). Aus der „Epinomis“, einer posthumen Platonischen Schrift, die vielleicht nicht einmal von dem großen Philosophen selbst, sondern von einem seiner Schüler auf Grund persönlicher Erinnerungen niedergeschrieben worden ist, geht eine der Lehre von der Erdumdrehung entschieden günstige Anschauung hervor. Platons Zeitgenosse war Heraclides Ponticus[3]), von dem Schiaparelli, nachdem er die Unklarheit der Aussprüche anderer beklagt hat, mit Recht sagen durfte[4]): „Hier ist endlich die Rotation der Erdkugel klar und ohne Umschweife ausge-

---

[1]) Gelegentlich berührt findet sich der Gegenstand schon in Schaubachs verdienstvoller „Geschichte der griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes“ (Göttingen 1802), näher ausgeführt in Prowes Vortrag „Ueber die Abhängigkeit des Coppernicus von den Gedanken griechischer Philosophen und Astronomen“ (Thorn 1865). Mit umfassendster Gelehrsamkeit aber ist alles Einschlägige gesammelt und kritisch erörtert worden von Schiaparelli, von dessen Schrift „I precursori di Copernico nell' antichità“ M. Curtze (Die Vorläufer des Coppernicus im Altertum, Leipzig 1876) eine verdienstliche Uebersetzung lieferte.

[2]) Wegen Platons ist besonders folgende Litteratur nachzusehen: Boeckh, De platonico systemate coelestium globorum, Heidelberg 1870; Grote, Platons Lehre von der Rotation der Erde und die Auslegung derselben durch Aristoteles, deutsch von Holzamer, Prag 1861; Hocheder, Begründung der Lehre des Platon über die Achsendrehung der Erde, Aschaffenburg 1861.

[3]) Deswert, De Heraclide Pontico dissertatio. Löwen 1830.

[4]) Schiaparelli-Curtze, S. 48.

sprochen." Auch Ecphantus, von dem man nur leider nichts anderes weiß, als was Plutarch mit wenigen Worten über ihn berichtet[1]), würde ungefähr in diese Zeit zu versetzen sein.

Ungleich festeren Boden fühlen wir unter unseren Füßen, wenn wir nunmehr zu Aristarch dem Samier uns wenden, demselben, dessen Methode, die Entfernung der Erde von der Sonne zu bestimmen, schon oben (S. 602) unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Es ist nach Schiaparellis Meinung[2]) gar nicht ausgeschlossen, daß auch Heraclides schon, um die störende „ἀνωμαλία πρὸς τὸν ἥλιον" wegzuschaffen, eine von der üblichen abweichende Ansicht gehabt habe, aber mit voller Bestimmtheit wissen wir dies von Aristarchus, „dem Physiker", wie ihn die Geschichtschreiber zum öfteren nennen. Obwohl die von ihm selbst ausgearbeitete Schrift über diesen Gegenstand verloren gegangen[3]) und eine darauf bezügliche pseudoplutarchische Stelle ziemlich unbestimmt gehalten ist[4]), so hat doch Archimedes in dem schon oben erwähnten *„Arenarius"* den Kernpunkt jener Lehre uns mit wenigen aber klaren Worten über-

---

[1]) Plutarch, De placitis philosophorum, lib. III, cap. 13. Von Heraclides, Ecphantus und Hicetas, resp. von der gegnerischen Stellung dieser Philosophen gegen die herrschende Weltanschauung war auch Cicero unterrichtet, wie seine „Quaestiones academicae" (lib. II, cap. 39) beweisen.

[2]) Schiaparelli-Curtze, S. 68.

[3]) Allerdings existiert ein 1644 in Paris erschienenes Werk mit dem Titel „Aristarchi Samii de mundi systemate libellus, cum notis G. de Roberval". Es kann jedoch keinem Zweifel unterliegen, daß man es da nur mit einer durch die Zeitumstände entschuldigten Fälschung zu thun hat, indem nämlich der bekannte Mathematiker Personier (aus Roberval bei Beauvais) unter der altgriechischen Flagge mit mehr Sicherheit für die Coppernicanische Weltordnung eintreten zu können vermeinte.

[4]) Es ist die dem Plutarch zugeschriebene kleine Schrift „De facie in orbe lunae", von der wir eine deutsche Bearbeitung aus Keplers Feder (Opera omnia, 8. Band. S. 114 ff.) besitzen. Dort wird erzählt, der Stoiker Kleanthes habe einen Prozeß wegen Gotteslästerung gegen Aristarch und gegen dessen „Störung der Ruhe der Erde" angestrengt.

liefert [1]), welche in der Verdeutschung [2]) folgendermaßen lauten: „Du weißt, König Gelon, daß die Mehrzahl der Astronomen unter der ‚Welt‘ eine Kugel versteht, deren Zentrum mit dem der Erde zusammenfällt, und deren Radius gleich der Entfernung zwischen Erde und Sonne ist. Aristarch von Samos berichtet diese Dinge und widerlegt sie in den Propositionen, welche er gegen die Astronomen veröffentlicht hat. Nach seiner Ansicht ist die Welt viel größer, als soeben gesagt wurde, denn er setzt voraus, daß die Sterne und die Sonne unbeweglich seien, *dass die Erde sich um die Sonne als Zentrum bewege,* und daß die Fixsternsphäre, deren Zentrum ebenfalls in der Sonne liege, so groß sei, daß der Umfang des von der Erde beschriebenen Kreises sich zu der Distanz der Fixsterne verhalte, wie der Mittelpunkt einer Kugel zu ihrer Oberfläche.“ Man erkennt, daß diese letztere, nach unseren Begriffen etwas ungeschickte Ausdrucksweise nichts anderes besagen sollte als: Der Abstand der Fixsternsphäre ist unendlich groß, so daß gegen ihn die Entfernung Erde-Sonne verschwindet.

Was von den Pythagoreern Hicetas — nicht Nicetas, wie ihn Coppernicus in der Einleitung zu seinem unsterblichen Werke (s. u.) nennt — und Archedamus berichtet wird, ist völlig unkontrollierbar [3]). Dagegen läßt sich von dem Asiaten Seleucus mit größerer Sicherheit annehmen, daß er das heliozentrische System des Aristarch weiter ausgebildet und es auch, wiewohl fälschlich, mit den Erscheinungen der Ebbe und Flut in ursächliche Verbindung gebracht habe [4]).

---

[1]) Heilbergsche Ausgabe, 2. Band. S. 244 ff.

[2]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 37.

[3]) Schiaparelli-Curtze, S. 54 ff.

[4]) Bei Plutarch (Quaestiones Platonicae, lib. VIII) wird dem Seleucus das Verdienst beigelegt, die ohne Beweis aufgestellten Sätze des Aristarch mit einem solchen versehen zu haben: „. . . ὡς ὕστερον 'Αρίσταρχος καὶ Σέλευκος ἀπεδείκνυσαν· ὁ μὲν ὑποτιθέμενος μόνον, ὁ δὲ Σέλευκος καὶ ἀποφαινόμενος.“ Ueber diesen letzteren Gelehrten gewähren Aufschluß Cornewall Levis (An Historical Survey of the Astronomy of the Ancients, London 1862. S. 192)

Auch im fernen Osten hat die den Sinnen zuwiderlaufende Anschauung von einer sich um ihre Achse drehenden Erde schon tausend Jahre vor Coppernicus ihre Anhänger gehabt. Der Schlußabschnitt der mehrerwähnten Monographie von Schiaparelli ist den beiden Indern Aryabhatta und Prithùdaca-Swami (auch Chaturveda genannt) gewidmet, deren einer die Erdrotation durch einen die Erde umkreisenden Luftstrom erzeugt werden ließ, während der andere ganz sachverständig die landläufigen, gegen die Erdumdrehung zu erhebenden Einwände widerlegte.

Indem wir das sogenannte „Aegyptische" System dem nächsten Kapitel vorbehalten, wohin es dessen ganzer Bestimmung nach gehört, haben wir jetzt diejenigen Theorien kennen zu lernen, welche für Altertum und Mittelalter von wirklich durchschlagender Bedeutung gewesen sind, denn eine irgend nachhaltige Wirkung ist, von der Eudoxischen Reform abgesehen, durch die Gelegenheitsaussprüche und vorübergehenden Anregungen der „Vorcoppernicaner" nicht erzielt worden. Um so tiefer griff Hipparch mit seiner Lehre vom *exzentrischen Kreise* ein, welche wir sofort an einem besonders scharf kennzeichnenden Beispiele kennen lernen wollen.

Hipparchs Theorie der Sonne. Hipparch, dieser sonder Zweifel größte Astronom des Altertums, ging vor allem darauf aus, für die erste Ungleichheit, wie wir sie oben kennen gelernt haben, eine zureichende Erklärung zu geben [1]), und zwar hielt er sich zu dem Ende an die Sonne, in der richtigen Erwägung, daß das von ihr als wahr Erkannte auch auf die übrigen Planeten ausgedehnt werden könne. An der Kreisbahn eines Himmelskörpers zu rütteln, hielt er noch nicht für erlaubt;

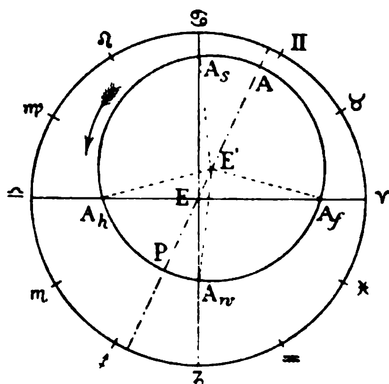
---

und Ruge (Der Chaldäer Seleucus, Dresden 1865). Seleucus dürfte seine Blütezeit um 150 v. Chr. gehabt haben.

[1]) Von Hipparch selbst sind, den weniger wichtigen Kommentar zu den „Φαινόμενα" des Aratus abgerechnet, keine Originalien auf uns gekommen, doch hat Ptolemäus im ersten Buche seines Almagestes dessen wichtigste Leistungen registriert.

um aber trotz dieser Form der Sonnenbahn die Verschiedenheiten in der scheinbaren Größe des Tagesgestirnes richtig zu interpretieren, rückte er die Erde E aus dem geometrischen Mittelpunkte des Kreises heraus. Hipparch ist so der Begründer der Lehre *vom exzentrischen Kreise* geworden [1]. In *Fig. 123* stellt der äußere, mit den Tierkreiszeichen versehene Kreis die auf die

Fig. 123.



Himmelskugel projizierte Ekliptik vor, deren Mittelpunkt E' — das späterhin so zubenannte „punctum aequans" — nicht von der Erde eingenommen wird. Man wußte damals bereits, daß der Durchmesser der Sonne dann am kleinsten erscheint, wenn diese letztere an einem gewissen Punkte im Zeichen der Zwillinge angekommen war, und ebenso war die Sonne an einem gewissen Punkte im Zeichen des Schützen größer denn sonst irgendwo. Indem man diese beiden Punkte durch eine grade Linie verband, erhielt man auf dem exzentrischen Kreise, auf dem man sich die Sonne thatsächlich umlaufend dachte,

[1]) Sehr gründlich ist die Darstellung dieser in vielen Werken nicht gehörig beachteten Theorie bei Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 94 ff.) gehalten.

dessen geometrischer Mittelpunkt E' aber leer war [1]), zwei Fixpunkte A und P, die *Erdferne* — das *Apogäum* — und die *Erdnähe* — das *Perigäum* — der Sonne. Die Linie AP selbst ist die sogenannte *Apsidenlinie.* Nun handelte es sich bloß noch um die Bestimmung der Strecke EE', und bei dieser Aufgabe entfaltete sich Hipparchs Genie in seiner vollen Fruchtbarkeit. Es war ihm nicht entgangen, daß die *Jahreszeiten*, d. h. die resp. zwischen dem Eintritte der Sonne in die Zodiakalzeichen des Widders, des Krebses, der Wage und des Steinbockes verlaufenden Fristen nicht genau gleich, daß vielmehr dem Frühling $94\frac{1}{2}$, dem Sommer $92\frac{1}{2}$, dem Herbst 88 und dem Winter 90 Tage zuzurechnen seien. Wir kennzeichnen in unserer Figur die dem Beginne einer bestimmten Jahreszeit entsprechenden Punkte, d. h. die Punkte, in welchen resp. die Geraden ♈♎ und ♋♑ den Exzenter der Sonne schneiden, resp. mit A_f, A_s, A_h, A_ω; ziehen wir dann noch die Halbmesser $E'A_f$, $E'A_s$, $E'A_h$, $E'A_\omega$, so muß EE' so gewählt werden, daß die vier entstehenden Zentriwinkel durch die Proportionen

$$\sphericalangle A_f E' A_s : \sphericalangle A_s E' A_h : \sphericalangle A_h E' A_\omega : \sphericalangle A_\omega E' A_f$$
$$= 94\tfrac{1}{2} : 92\tfrac{1}{2} : 88 : 90$$

zusammengehalten werden. Mit einer die vorliegenden Beobachtungen hinreichend darstellenden Genauigkeit setzte Hipparch, unter R den Halbmesser $E'A = E'P$ verstehend, die Distanz EE' des geometrischen und des kinematischen Mittelpunktes, oder, wie man sich später auszudrücken lernte, die *lineare Exzentrizität*, $= \frac{1}{24}R$.

Jetzt war auch die Möglichkeit gegeben, die erste *Sonnentafel* zu berechnen. Denken wir uns nach einem willkürlichen Punkte D des Exzenters die Linien ED und $E'D$ gezogen, und bezeichnen wir mit m die *mittlere*

---

[1]) Hieran erkennt man das unvollkommene mechanische Wissen des Griechentums. Vom geometrisch-schematischen Standpunkte aus ist die Theorie des Hipparch so gut, wie nur irgend eine andere; vom physikalischen aus freilich ist sie unbedingt zu verwerfen.

Anomalie, d. h. den $\sphericalangle DE'A$, mit v die *wahre Anomalie*, d. h. den $\sphericalangle DEA$, so ist erstere offenbar der seit dem Durchgange der Sonne durch das Apogäum A verflossenen Zeit t proportional, und man kann, wenn T die ebenfalls von Hipparch schärfer bestimmte Jahreslänge bedeutet, die Größe m in Graden aus der Proportion $m : 360 = t : T$ berechnen. Die Tafel wäre jedoch erst dann brauchbar, wenn ihr für jeden gegebenen Wert von t der zugehörige Wert der wahren, d. h. geozentrischen Anomalie zu entnehmen wäre. Hier half sich Hipparch durch eine Konstruktion, da ihm aller Wahrscheinlichkeit nach zwar schon sphärische, nicht aber auch schon ebene Trigonometrie zu gebote stand[1]; wir heutzutage würden die Gleichung zwischen m und v leicht folgendermaßen aufstellen. Im ebenen Dreieck $EE'D$ ist $\sphericalangle DEE' = v$, $\sphericalangle DE'E = 180^0 - m$, $\sphericalangle EDE' = m - v$ bekannt; der Sinussatz zeigt also, daß sich

$$E'D : EE' = \sin v : \sin (m - v)$$

verhält. EE' ist $= \frac{R}{24}$ oder allgemein $= Re$, unter e die *numerische Exzentrizität* verstanden; führen wir diese Werte ein, so können wir unserer Proportion auch die nachstehende Form erteilen:

$$\frac{1}{e} = \frac{\sin [m - (m - v)]}{\sin (m - v)} = \sin m \operatorname{cotang} (m - v) - \cos m,$$

woraus sich

[1] „Eine ebene Trigonometrie im Dienste der theoretischen Planimetrie ist dem Altertum ebenso fremd, wie eine solche im Dienste feldmesserischer Untersuchungen, wenn man von der einzigen Ausnahme der Zahlenformeln Herons für den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke absieht“ (Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880. S. 356). Auf das erste Beispiel eines wirklich durchgerechneten Beispieles von Dreiecksauflösung hat Arneth (Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852. S. 121) zuerst hingewiesen; es handelt sich für Ptolemäus darum, die Größe des Kreiszweieckes aufzufinden, welches bei einer partiellen Sonnenfinsternis durch den Mond aus der Sonnenscheibe herausgeschnitten wird.

$$v = m + \text{arc tang} \frac{e \sin m}{1 + e \cos m}$$

berechnet. Jene Differenz $(m - v)$, welche bei der geringen Exzentrizität der Sonnenbahn niemals bedeutend, nämlich im Maximum nur $\pm 2^{0} 13'$ groß wird, in den Punkten des Apo- und Perigäums aber gänzlich sich annulliert, wurde die *jährliche Gleichung* genannt.

Ganz ähnlich wurde nun von Hipparch selbst, sowie von seinen Nachfolgern für den Mond und für jeden der fünf Planeten ein Exzenter ermittelt. Ptolemäus adoptierte das in seiner Art treffliche Mittel zur Erklärung der ersten Ungleichheit und fügte seinerseits die Normen hinzu, welche auch für die Eigentümlichkeiten der Planetenbahnen eine wenigstens mathematisch befriedigende Auslegung zu erbringen geeignet war.

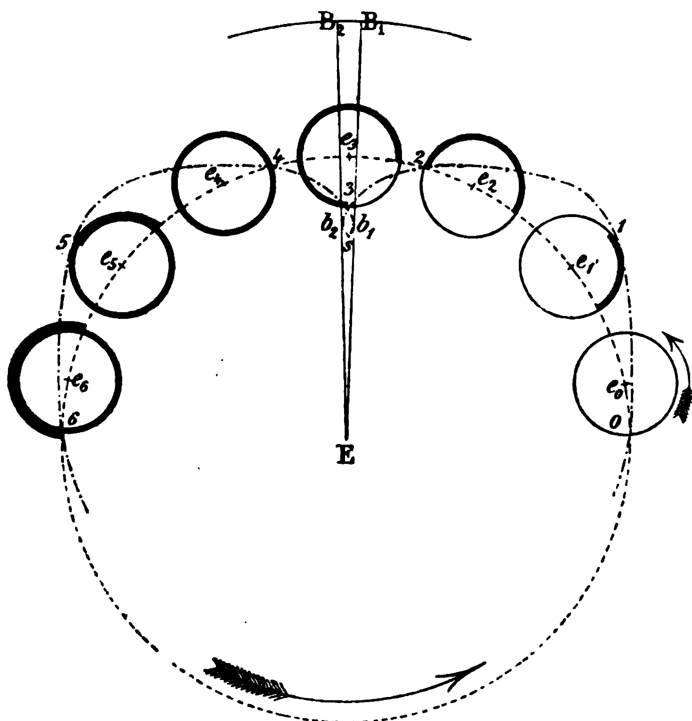
Das Ptolemäische System. Claudius Ptolemäus aus Alexandria, ein Zeitgenosse der Kaiser Trajan und Hadrian, war es, der das gesamte astronomische Wissen, wie es sich bis auf ihn und unter seiner eigenen Mitwirkung entwickelt hatte, in einem großen systematischen Werke, dem sogenannten *Almagest*[1]), zusammenfaßte. Sein Hauptverdienst war hierbei, wie schon erwähnt, die Erklärung der zweiten Ungleichheit, wiewohl das erste Auftreten der bezüglichen Lehre wahrscheinlich in eine viel frühere Zeit zu verlegen sein wird[2]). Wir meinen

[1]) Eine Uebersicht über den Inhalt dieses Werkes, welches von seinem Verfasser „Μεγάλη Σύνταξις" (Magna Constructio) genannt, später als „Μεγίστη Σύνταξις" bezeichnet und von den Arabern durch Vorsetzung ihres bestimmten Artikels in „Almegisti" resp. in „Almagest" verketzert wurde, gibt Mädler (Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 78 ff.).

[2]) Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, Halle 1839. S. 1839. S. 18. „Apollonius hat auch den Ruhm, die Geometrie auf die Astronomie angewandt zu haben, denn man schreibt ihm die Theorie der Epizykel zu, vermöge deren man die Phänomene des Stillstandes und der Rückläufigkeit der Planeten erklärt. Ptolemäus führt ihn in Bezug auf diesen Gegenstand in seinem Almagest an." Die kurze Andeutung im Almagest (lib. XII, cap. 1) gewährt allerdings kein ausreichend scharfes Bild von der Leistung des Pergäers (gegen 200 v. Chr.).

die berühmte *Theorie der Epizykeln.* Der exzentrische Kreis des Hipparch wird nicht vom Planeten selbst durchwandert, sondern es bewegt sich auf der Peripherie des erwähnten *Deferenzkreises* oder *Deferenten* lediglich der Mittelpunkt

Fig. 124.



eines kleinen Kreises, des *Beikreises* (ἐπίκυκλος) mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und mit ebensolcher rückt auf dem Umfange dieses Epizykels der Planet selber fort. Daß bei solcher Annahme die mehrerwähnten Unregelmäßigkeiten einer Planetenbahn wohl begreiflich werden, das mag aus *Fig. 124* erhellen. *E* ist der Mittelpunkt

des Deferenten; e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 sind sieben äquidistante Positionen des epizyklischen Zentrums. Wenn das letztere sich in e_0 befindet, liegt der Planet gerade, wie wir der Uebersichtlichkeit halber annehmen wollen, im Schnittpunkte des Deferenz- und Beikreises, in 0; in der Zeit, die das Beikreiszentrum brauchte, um nach e_1 zu kommen, hat der Planet etwa den vierten Teil der Peripherie zurückgelegt und ist in 1 angelangt; in ähnlicher Weise sind die Punkte 2, 3, 4, 5, 6 dadurch erhalten worden, daß man jeweils vom Schnittpunkte beider Kreise aus in gleichem Sinne auf dem Umfange $2\rho\pi$ des kleineren derselben die Bogen

$$2 \cdot \frac{2\rho\pi}{4},\ 3 \cdot \frac{2\rho\pi}{4},\ 4 \cdot \frac{2\rho\pi}{4},\ 5 \cdot \frac{2\rho\pi}{4},\ 6 \cdot \frac{2\rho\pi}{4}$$

aufgetragen hat. Durch stärkere Auszeichnung, welche dann, wenn die Peripherie zum zweitenmale beansprucht wird, sich gleichfalls um das Doppelte verdickt, sind die aufgetragenen Bogen ersichtlich gemacht worden. Die krumme Linie 0 1 2 3 4 5 6, welche der Planet solcher Gestalt beschreibt, führt bei den Geometern den Namen *Epizykloide* [1]); sie hat in der Nähe des Punktes 3 eine *Schleife* [2]), und solange der Planet sich auf dieser bewegt, müssen Irregularitäten wie diejenigen eintreten, um deren Erklärung es sich eben handelt. Wir legen aus E an die Schleife die beiden Berührenden Eb_1 und Eb_2, welche in ihrer Verlängerung die Himmelskugel in B_1 und B_2 treffen; die Berührungspunkte führen im Mittelalter die Namen „statio secunda“ und „statio prima“. Ehe der

---

[1]) Epizykloide wird die Kurve genannt, die durch einen bestimmten Punkt im Umfange eines auf der Peripherie eines zweiten Kreises außen abrollenden Kreises entsteht. Denkt man sich um E als Mittelpunkt einen Kreis konstruiert, dessen Halbmesser gleich der Differenz aus den Halbmessern des Deferenten und Epizykels ist, so rollt der letztere offenbar auf der Außenseite dieses letzteren Kreises.

[2]) Ganz strenge genommen, würde unsere Art der Konstruktion nicht zu einer Schleife, sondern nur zu einer Spitze führen, doch glaubten wir die Verhältnisse möglichst an ein und derselben Figur zur Darstellung bringen zu sollen.

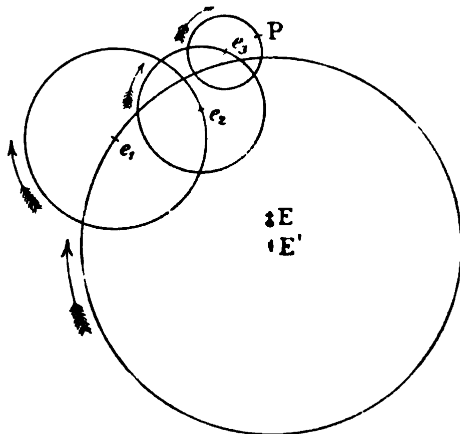
Wandelstern nach b_2 kommt, ist seine, auf die Himmelssphäre projizierte Bewegung durchaus rechtläufig; der Weg $B_2 B_1$ dagegen, welcher dem epizykloidischen Bogen $b_2 b_1$, der durch den der Erde nächst benachbarten Punkt s der Schleife halbiert wird, entsprechen soll, wird nach dem Urteile des in E befindlichen Beobachters offenbar in einer der bisherigen entgegengesetzten Richtung zurückgelegt; die Bewegung ist also *rückläufig* geworden. In der Umgebung der Tangentialpunkte b_2 und b_1 dagegen fällt die Fortschreitungsrichtung des Sternes mit der Berührungslinie zusammen, und da diese beide Male auf E hinführt, so scheint für den Beobachter, dem eine derartige Bewegung nur durch augenfällige Veränderung der Größe erkennbar zu werden vermöchte, der Planet vollständig stillzustehen, es ist also ein *Stillstand* eingetreten. Erst von b_1 aus nimmt der Stern seine gewöhnliche *rechtläufige Bewegung* wieder von neuem auf.

Man überzeugt sich, daß die Gesamtheit der unter dem Namen der ersten Ungleichheit vereinigten Besonderheiten einer Planetenbahn durch die epizyklische, oder, richtiger gesprochen, epizykloidische Bewegung richtig und auch verhältnismäßig ungezwungen erklärt wird. *Die Epizykloide des Ptolemäus thut in ihrer Art dieselben Dienste, wie die Hippopede des Eudoxus* (S. 619). Immerhin konnte es vorkommen, daß diese Konstruktion zwar *qualitativ*, nicht aber auch zugleich dem *vollen Grössenbetrage* nach die Abweichungen darstellte. In diesem Falle häuft das ptolemäische Lehrgebäude die Beikreise nach Maßgabe der *Fig. 125.* E[1]) ist wieder der Mittelpunkt des Deferenten, auf dem sich ein Punkt e_1 als Mittelpunkt des ersten Epizykels im Sinne des beigesetzten Pfeiles bewegt. Auf der Peripherie des *ersten Epizykels* kreist e_2 als Mittelpunkt des *zweiten Epizykels*, der vielleicht auch noch nicht selbst Träger des Planeten ist, sondern dieser, hier als P bezeichnet, durchwandert erst die Peripherie

[1]) Von der doch immer geringen Exzentrizität glaubten wir bei den schematischen Diagrammen dieses und des folgenden Abschnittes Abstand nehmen zu dürfen.

eines *dritten Epizykels,* dessen Zentrum e_3 auf die Peripherie des um e_2 beschriebenen Beikreises angewiesen ist. Es ist klar, daß, wenn die Radien der einzelnen Kreise, die konstanten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für jeden einzelnen und endlich der — in der Zeichnung durch Pfeile

Fig. 125.

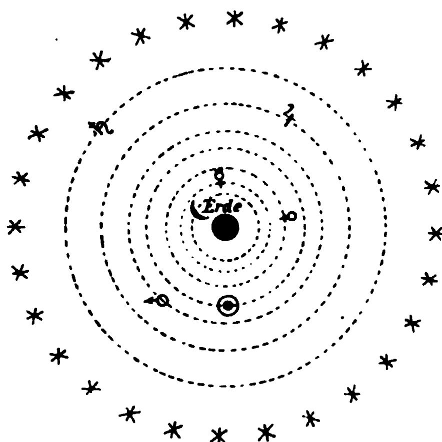


angedeutete — Bewegungssinn in jedem Einzelkreise gegeben sind, die vom Punkte P zu beschreibende Kurve geometrisch sich konstruieren läßt. Ebenso ist folgendes klar: *Durch Häufung der Epizyklen kann jeder Planetenort, mag er von der Normalbahn in noch so auffallender Weise abstehen, mit beliebiger Annäherung an die Wahrheit dargestellt und berechnet werden* [1]).

[1]) Jede geometrische Größe kann, wie wir namentlich seit Fourier wissen, durch eine nach den Sinus und Kosinus der Vielfachen eines Winkels fortlaufende, trigonometrische Reihe ausgedrückt werden. In dem schönen Werke von Möbius „Die Elemente der Mechanik des Himmels“ (Leipzig 1843) ist der Nachweis geführt worden, daß die Theorie der epizyklischen Bewegung ganz das nämliche auf konstruktivem Wege leistet, was jene Reihenentwicklung analytisch ermöglicht. Auch die moderne Sternkunde steht also (vgl. zumal a. a. O., S. 52 ff.) noch immer auf Ptolemäi-

Das sogenannte *Weltsystem des Ptolemäus* nun [1]), welches vierzehnhundert Jahre nahe unangefochten (siehe den nächsten Abschnitt) in Geltung blieb, hat die in *Fig. 126* wiedergegebene Einrichtung. Im Zentrum des durch die Fixsternsphäre nach außen — gegen das Nichts — ab-

Fig. 126.



geschlossenen Weltalls steht die Erde; nicht eigentlich um sie, sondern bezüglich um ihr mit dem Zentrum der Erde allerdings nicht genau übereinstimmendes Punctum aequans (s. o.) bewegen sich in stets größer werdenden Bahnen Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Juppiter und Saturn. Es läßt sich nicht leugnen, daß die Erscheinungswelt, soweit sie dem Altertum bekannt war und überhaupt dem unbewaffneten Auge bekannt sein konnte, durch die Weltordnung des Ptolemäus eine im wesentlichen zufriedenstellende Erklärung gefunden hat, und

schem Boden; nur der philosophische Gehalt der Lehren ist ein anderer geworden, der im engeren Sinne mathematische Inhalt mußte der Natur der Sache nach dagegen der gleiche bleiben.

[1]) Im Almagest nimmt dessen Darlegung die Bücher 9—13 ein.

nichts wäre verfehlter, als auf dieses System, welches wahrlich den Besten seiner Zeit genug gethan, heute mit Achselzucken herabblicken zu wollen[1]).

III. Die Vermittlungssysteme des Mittelalters und der beginnenden Neuzeit.

Das Aegyptische System. Im vorigen Abschnitte (S. 621) ist von Heraclides Ponticus als von einem der wenigen unter den Kosmologen des Altertums die Rede gewesen, welche sich bereits mit dem fremdartigen Gedanken einer Umdrehung der Erdkugel um ihre Achse vertraut gemacht hatten. Auch darauf ward angespielt, daß derselbe Mann hinsichtlich der Planetenbewegung seinen besonderen Standpunkt vertreten habe. Schiaparelli ist (s. o.) der Ueberzeugung, daß Heraclides der eigentliche Begründer jenes Weltsystemes sei, für welches infolge eines eigentümlichen Mißverständnisses der Name des *Aegyptischen Systemes* gebräulich geworden ist. Einiges Licht über dessen Entstehung ist zuerst, wie es scheint, durch Henri Martin[2]) verbreitet worden. Bei Cicero[3]) findet sich eine Stelle, in welcher er die Sonne als das Licht und Wärme spendende Gestirn preist.

---

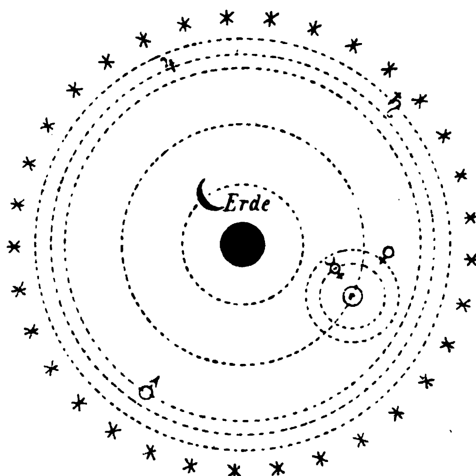
[1]) Als einen solchen Beleg einer dem geschichtlichen Werden nicht durchweg gerecht werdenden Auffassung möchten wir das Urteil Kretschmers über Albertus Magnus zitieren (s. dessen „Physische Erdkunde im christlichen Mittelalter“ in Pencks „Geogr. Abhandlungen“, Band 4, Heft 1, a. v. O.). Allerdings sind Alberts Beweise vielfach nur Scheinbeweise, allein wie viele von den Zeitgenossen nahmen an solchen erkünstelten Erklärungsversuchen Anstoß?

[2]) H. Martin, Études sur le Timée de Platon, 2. Band, Rennes 1841. S. 111 ff.

[3]) Die Ciceronische Stelle findet sich im vierten Kapitel des „Somnium Scipionis“, wozu dann noch eine weitere Ausführung in des Macrobius Kommentar (lib. I, cap. 19) hinzutritt. Uebrigens ist es unrichtig, wenn hie und da dem Macrobius die erste Erwähnung des Aegyptischen Systemes in der oben beschriebenen Form zugeschrieben wird, denn er sagt lediglich, daß Platon den Lehren der Aegypter gefolgt sei.

um daran die Worte zu knüpfen: „hunc“ — solem — „ut comites consequuntur Veneris alter, alter Mercurii cursus.“ Bei dem im 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebenden Kompilator Marcianus Capella findet man für diese Abweichung von der Ptolemäischen Lehre den anscheinend durch keine inneren Gründe gerechtfertigten, aber unvertilgbaren Ausdruck „Aegyptiorum ratio“. In späterer Zeit scheint Gassendi[1]) zuerst darauf

Fig. 127.



hingewiesen zu haben, daß Tycho Brahe (s. u.) sich in seinen Spekulationen durch das sogenannte Aegyptische, thatsächlich aber Heraclidische System wesentlich bestimmen ließ. In *Fig. 127* sehen wir das Planetensystem nach dieser Lehre systematisch dargestellt: *Um die Erde*

---

[1]) Gassendis Lebensbeschreibungen der vier Astronomen Brahe, Coppernicus, Peurbach und Regiomontan (Paris 1654) lassen sogar den Apollonius Pergäus als den eigentlichen Begründer des Tychonischen Systemes auftreten, wozu Galles gelehrte Bemerkungen im Humboldtschen „Kosmos“ (S. 342 ff. der neuen Lieferungsausgabe) zu vergleichen sind.

als — ungefähres — Zentrum kreisen in dieser Reihenfolge Mond, Sonne, Mars, Juppiter und Saturn, während die Sonne von den Planeten Merkur und Venus als von ihren besonderen Trabanten begleitet wird.

Reformbestrebungen des Mittelalters; Nikolaus von Cusa. Auch die mittlere Zeit nahm nicht durchweg nur kritiklos das ihr vom Altertum Gebotene hin, obwohl ja allerdings Ptolemäus, und sicher nicht ohne Grund, eine im wesentlichen unerschütterliche Stellung behauptete. Wenigstens von den wichtigeren Versuchen, den komplizierten geometrischen Weltbau der griechischen Astronomen zu vereinfachen, soll im folgenden berichtet werden [1].

Die Scholastiker hielten zwar im allgemeinen am Alten fest, aber einzelne Zweifel scheinen ihnen doch gekommen zu sein. Nach Beckmann [2]) spricht einmal Thomas von Aquin die Ansicht aus, die Bewegungen der Wandelsterne seien so überaus verwickelter Natur, daß die Möglichkeit einer von der hergebrachten verschiedenen Erklärung ihres Laufes gar nicht abgewiesen werden könne. Ungemein kühl spricht sich ferner Roger Bacon über die aus dem „Buch Josua“ und dem „Prediger Salomonis“ zu gunsten des Stillstandes der Erde hergeholten Gründe aus [3]. Bekannt genug ferner ist, daß König Alfons von Kastilien bei seinem erfolgreichen Bemühen um die Verbesserung der astronomischen Tafeln der Notwendigkeit, die kosmischen Bewegungen unter einfacheren Gesichtspunkten zu betrachten, einen nur allzu deutlichen Ausdruck verliehen hat [4].

---

1) Vgl. hierzu Günther, Studien zur Geschichte d. math. u. phys. Geographie, S. 1—128.

2) Beckmann, Zur Geschichte des Coppernicanischen Systemes, Braunsberg 1861. S. 5.

3) Fratris Rogeri Bacon ordinis Minorum Opus Majus ad Clementem Quartum, pontificem Romanum, ed. Jebb, London 1733. S. 112 ff.

4) Thatsache ist, daß Alfons X. (1223—1284) — während des Interregnums auch vorübergehend deutscher Kaiser — von seinem Sohne entfernt wurde, und daß die Aufrührer ihre Berech-

Auch im Oriente gab es Astronomen, welche in dieser oder jener Weise auf die im vorigen Kapitel geschilderten, von der Ptolemäischen Norm abweichenden Ansichten des Altertums zurückgriffen. Der Kosmograph Kazwîni z. B. ist ganz gut von solchen Abweichungen unterrichtet, wenn er sagt [1]: „Unter den früheren gibt es auch einige Anhänger des Pythagoras, die behaupten, daß die Erde sich beständig im Kreise herumbewege, und daß aller Kreislauf der Sterne, den wir sehen, eben nichts weiter als der Kreislauf der Erde, nicht etwa der der Sterne ist." In dem Werke des Arabers Katibi konnte Sprenger [2]) eine ganz klar ausgedrückte Antizipation der Lehre von der Erdrotation nachweisen, und von dem durch seine medizinische Schriftstellerei weit bekannter gewordenen Abubekr-er-Rasi (Rhazes, 10. Jahrhundert) soll nach der Angabe eines bekannten Orientalisten [3]), der allerdings nicht immer durch Zuverlässigkeit sich auszeichnet, eine Schrift erhalten sein „von der Gestalt der Welt, um zu zeigen, daß die Erde rund sei, daß sie inmitten des Himmels um zwei Pole sich drehe, daß die Sonne größer als der Mond, der Mond kleiner als die Erde sei". Von einem gewissen Ibn Badja wird berichtet [4]), er habe

---

tigung zu solchem Thun aus dem ketzerischen Ausspruche des Königs herleiteten, er hätte, wäre er von Gott bei Erschaffung der Welt um seinen Rat gefragt worden, eine bessere Weltordnung empfohlen. Die Nachricht, daß ein ähnlicher Satz in der Anklageschrift wirklich gestanden habe, ist uns durch einen gewissen Roderich Sanctius (Mädler, Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 100) überliefert worden.

[1]) Zakarija ben Muhammed ben Mâhmud el Kazwînis Kosmographie, deutsch von Ethé, 1. Halbband, Leipzig 1868. S. 296.

[2]) Sprenger, The Copernican System of Astronomy among the Arabs, Journal of the Asiatic Society of Bengal, 25. Band. S. 189 ff.

[3]) v. Hammer-Purgstall, Litteraturgeschichte der Araber. 4. Band, Wien 1853. S. 366.

[4]) Mit dem früher ganz unbekannt gewesenen Neuerer Ibn Badja hat uns der große jüdische Polyhistor Maimonides bekannt gemacht in seinem inhaltsreichen Werke „Der Führer der Irrenden". Vgl. Le guide des égarés; traité de théologie et de philosophie par Moise ben Maimon, herausgeg. von Munk, 2. Band, Paris 1856. S. 194.

die Epizykeln des Ptolemäus grundsätzlich verworfen, weil es ungereimt sei, einen festen Körper in steter Umwälzung um einen bloß mathematischen Mittelpunkt sich vorzustellen, freilich aber habe er die exzentrischen Kreise beibehalten, gegen welche sich doch dasselbe Argument geltend machen läßt. Radikaler ging in dieser Beziehung Ibn Tofeil vor, denn von ihm sagt Munk folgendes aus [1]: „Dès le commencement du XIIe siècle, les astronomes arabes d'Espagne reconnurent ce qu'il y avait d'invraisemblable dans cette hypothèse, par laquelle Ptolémée cherche à expliquer certaines anomalies dans le mouvement de divers planètes. Ibn Badja s'éleva contre l'hypothèse des épicycles, et Ibn Tofeil rejeta à la fois les excentriques et les épicycles.“ Von den Ideen der alten Homozentriker, Eudoxus und Aristoteles (s. o. S. 618 ff.) erweist sich in hohem Grade beeinflußt der Maure Bitrodji, von den Abendländern gewöhnlich Alpetragius genannt [2]), und in der Tendenz, den Ptolemäus zu korrigieren, begegnete sich mit ersterem sein Landsmann, Djâbr Ibn Aflah (Geber) aus Andalusien [3]). Inwieweit eine viel besprochene Stelle in dem kabbalistischen Buche „Sohar“ für die Erdbewegung in Anspruch genommen werden kann, muß hier unentschieden bleiben.

Im 15. Jahrhundert, als die große astronomische Reformbewegung im Westen ihren Anfang nahm, mußte eine teilweise Revision der Ptolemäischen Aufstellungen sich von selbst ergeben. Der treffliche Peurbach arbeitete daran [4]), eine gewisse gegenseitige Durchdringung

---

1) Ebenda, 1. Band. S. 358.

2) Das wenige, was wir von Alpetragius sicher wissen, hat uns der Historiker Baldi mitgeteilt, dessen Werk, bereichert durch treffliche Noten, Steinschneider in Fürst Boncompagnis „Bulletino“ (Separat, Rom 1864. S. 44 ff.) herausgegeben hat.

3) Dem Geber schreibt Baldi (Steinschneider, a. a. O., S. 81) die Absicht zu, dem Ansehen des Ptolemäus ein gänzliches Ende zu bereiten. Wenn dies wirklich der Fall war, so ist die Verwirklichung doch nicht über recht bescheidene Bemängelungen einzelner Punkte hinausgediehen.

4) Die ersten Druckausgaben der „Theoricae novae planetarum“ erschienen 1472 zu Nürnberg und 1488 zu Venedig. Aber noch 1573 legte Nunez das Werk von neuem in Coimbra auf.

der epizyklischen und der homozentrischen Theorien anzubahnen; er kam, um Wolfs [1]) Darstellung wiederzugeben, auf die „Idee, die dem Mittelpunkte der Welt entsprechenden sogenannten homozentrischen Sphären der Physiker so weit auszuhöhlen, daß in der Höhlung die einem anderen Zentrum entsprechenden exzentrischen Kreise der Astronomen Platz finden konnten, und diese Idee fand in jenen Zeiten sodann wirklich großen Anklang" [2]). Peurbachs „Planetentheorik", in welcher man die notwendige Ergänzung zu dem herrschenden Lehrbegriffe der sphärischen Astronomie von Sacrobosco erblickte, war ein Jahrhundert lang, noch bis über die Zeit des Coppernicus hinaus, das immer wieder aufgelegte und kommentierte Vorlesebuch der Hochschulen [3]). An der Ruhe der Erde hat Peurbach nicht gerüttelt, und auch Regiomontanus scheint, obwohl auch ein gegenteiliges Zeugnis vorliegt [4]), ein überzeugter Ptolemaiker gewesen zu sein.

Wohl aber hat eine sehr originelle Anschauung über die rotatorische Bewegung des Erdkörpers der bekannte Kardinal Nikolaus von Cusa (Cues an der Mosel) geäußert. Das von Clemens aufgefundene Fragment, in welchem der frei denkende Mann seinen Gedanken, frei-

---

[1]) R. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 212.

[2]) Zur besseren Erläuterung drucken wir Peurbachs stets an die Stelle der antiken „Kreise" wirkliche Hohlkugeln setzende Einführung in die Lehre von den speziellen Bewegungen der Sonne ab: „Sol habet tres orbes a se invicem omnicunque divisos atque sibi contiguos quorum supremus secundum superficiem convexam est mundo concentricus: secundum concavam autem excentricus. Infimus vero secundum concavam concentricus: sed secundum convexam excentricus. Tertius autem in horum medio locatur tam secundum superficiem suam convexam quam concavam est mundo excentricus." Bei den Planeten gestalten sich diese Konstruktionen teilweise recht verwickelt.

[3]) Vgl. hierzu: Günther, Gesch. des mathem. Unterrichtes, S. 238 ff.

[4]) In dem „Opusculum geographicum" des Johann Schöner (Nürnberg 1533) findet sich eine sonst durch nichts beglaubigte Angabe dieser Art: „Joannis de Monte Regio disputatio est, quod terra moveatur, quia per motum terrae circularem omnia salvari possunt, quae in astris apparent. Igitur si dicamus terram moveri et coelum quiescere nullum apparet inconveniens."

lich in etwas schwierigem Latein Ausdruck gibt, ist weder von Clemens selbst[1]), noch auch sonst, mit Ausnahme einer Abhandlung von Schanz[2]), richtig analysiert worden, während doch ein ganz guter Sinn hineinzubringen ist. Der Cusaner hat die Umdrehung der Erde wirklich gelehrt, und zwar läßt sich sein astronomisches Glaubensbekenntnis in den folgenden drei Sätzen zusammenfassen[3]): Die Erde dreht sich in 24 Stunden von Ost nach West — man bemerke wohl, daß diese Angabe zunächst paradox erscheinen muß — um ihre mit derjenigen der Himmelskugel zusammenfallende Achse; gleichzeitig wird sie von der mit ihr fest verbundenen Fixsternsphäre, welche sich in entgegengesetztem Sinne und mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit um jene Achse dreht, mit fortgenommen; die Sonne nimmt an letztgenanntem Umschwunge teil, aber mit einer Verlangsamung, welche im Verlaufe eines Jahres gerade auf 360° anwächst. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß auch diese Auffassung den Erscheinungen der täglichen Bewegung vollauf gerecht wird.

Die Nähe der großen Umwälzung, welche sich an den Namen Coppernicus knüpft, macht sich, wenn wir die Schwelle des 15. Jahrhunderts überschreiten, mehr und mehr durch selbständige Reformbestrebungen bemerkbar. Nur das Wichtigste vermögen wir hier namhaft zu machen. Fracastor nahm die homozentrische Theorie der Alten in ihrer ganzen Reinheit wieder auf[4]), Lionardo da Vinci behandelte um 1510 die Achsendrehung der Erde als eine bekannte Sache[5]), vor allem aber zieht

[1]) Clemens, Giordano Bruno und Nikolaus von Cusa, Bonn 1847. S. 96 ff.

[2]) Schanz, Die astronomischen Anschauungen des Nikolaus von Cusa und seiner Zeit, Rottweil 1872.

[3]) Günther, Studien etc., S. 30.

[4]) Hieronymi Fracastori Homocentrica ejusdem de causis criticorum dierum per ea, quae in nobis sunt, (ohne Druckort, wahrscheinlich Verona) 1538.

[5]) Auf diese Bemerkung des vielseitigen Künstlers machte zuerst Whewell aufmerksam (Geschichte der induktiven Wissenschaften, 2. Band, deutsch von J. J. v. Littrow, Stuttgart 1840. S. 21).

Celio Calcagnini unser Augenmerk auf sich, der ein dem Coppernicanischen in seinen Grundzügen nahe verwandtes Weltsystem sich ausgedacht und aller Wahrscheinlichkeit mit keinem anderen, als mit Coppernicus selbst, Meinungsaustausch über die Notwendigkeit, dem Ptolemäischen Systeme ein besseres zu substituieren, gepflogen hat [1]).

Das Tychonische System. Wir gehen vorerst noch über Coppernicus hinaus und erwähnen des letzten der Vermittlungssysteme, durch welche eine übersichtlichere Anordnung der himmlischen Bewegungen mit gleichzeitiger Schonung des Zeugnisses der Sinne erzielt werden sollte, des *Tychonischen Systemes*. Teilweise wohl durch kirchliche und philosophische Bedenken, teilweise auch durch die ihn stark beseelende Ehrsucht, Besonderes geleistet zu haben, und drittens wohl endlich nicht zum wenigsten (s. o.) durch seine Bekanntschaft mit dem Aegyptischen Systeme beeinflußt, stellte Tycho Brahe die folgende, durch *Fig. 128* verdeutlichte Behauptung auf [2]): *Direkt um die Erde bewegen sich in exzentrischen Kreisbahnen nur Mond und Sonne, und diese letztere ist das Zentrum für die von den Planeten Merkur, Venus, Mars, Juppiter und Saturn beschriebenen Kreise.* Die Verwandtschaft zwischen den Systemen des Brahe und des Heraclides Ponticus ist eine augenfällige.

Angesichts der Thatsache, daß auch das Coppernicanische Weltsystem, wie wir bald Gelegenheit haben werden uns zu überzeugen, durchaus nicht gänzlich von dem schwerfälligen Rüstzeuge befreit war, welches seit Ptolemäus und noch mehr seit Peurbach für unerläßlich galt, hat der Tychonische Vorschlag, altes und neues

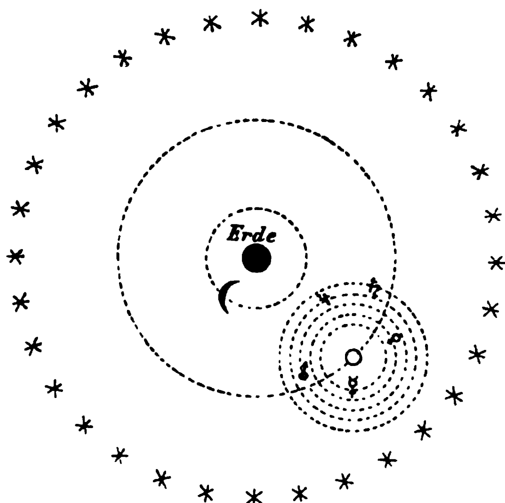
---

[1]) Mitteilungen über Calcagnini macht Prowe (Nikolaus Coppernicus, 1. Band, Berlin 1883. S. 316 ff.). Eine Uebersetzung der bezüglichen Schrift, die erst posthum gedruckt wurde (Quod coelum stet et terra moveatur, Basel 1544), hat Hipler im vierten Hefte der Veröffentlichungen des „Coppern.-Ver. f. Wissensch. u. Kunst zu Thorn“ geliefert.

[2]) Die Tychonische Weltordnung wird von ihrem Urheber mehr nur gelegentlich in den „Astronomiae instauratae progymnasmata“ (S. 477 ff.) vorgetragen.

miteinander zu verbinden, immerhin eine gewisse Berechtigung gehabt, und es ist dies auch mehrfach anerkannt worden [1]). Trotzdem ist die Lebenszähigkeit dieses Systemes keine große gewesen, vielleicht deshalb, weil

Fig. 128.



Brahe selbst schon frühe starb (1601), und von denen, die um ihn waren, keiner die zur weiteren Verfolgung der Sache notwendige Spannkraft besaß. Von Kepler allerdings hatte Tycho die Ausgestaltung seiner Lehre gehofft, allein dieser war damals schon überzeugter Coppernicaner und weit entfernt, sich in den Dienst einer verlorenen Sache stellen zu lassen. Uebrigens darf nicht verschwiegen werden, daß der Holsteiner Reimarus

[1]) Z. B. bei Wolf, Gesch. d. Astr., S. 245. Eingehender und mit historischer Gerechtigkeit spricht sich darüber Schinz aus (Würdigung des Tychonischen Weltsystemes aus dem Standpunkte des 16. Jahrhunderts, Halle 1856).

Ursus hartnäckig darauf bestand[1]), daß er zuerst sämtliche Planeten als Begleiter der die Erde umkreisenden Sonne aufgefaßt, und daß Brahe ihm die Ehre dieser Neuerung geraubt habe.

Mehrere spätere Astronomen versuchten dem Tychonischen Systeme dadurch eine Verbesserung angedeihen zu lassen, daß sie wenigstens der Erde eine Achsendrehung beilegten. Ob Ursus bereits so weit gegangen sei, lassen wir dahingestellt[2]); gewiß aber ist es, daß Longomontanus entschieden für die Umdrehung der Erde um ihre Achse eintrat[3]), und daß sich Origanus ihm hierin beigesellte[4]).

Ephemeriden nach Tychos Systeme sind von dem Italiener Argoli — dem Lehrer Wallensteins in Padua — berechnet worden[5]); später aber neigte sich Argoli mehr dem Aegyptischen Weltsysteme zu[6]). Der ganz sonderbare Vermittlungsvorschlag Ricciolis[7]), unter prinzipieller Festhaltung der Tychonischen Anordnung nur Juppiter und Saturn direkt um die Erde gehen zu lassen, ist begreiflicherweise ohne jedweden Erfolg geblieben.

---

[1]) Ohne Tycho zu nennen, entwickelt Ursus seine kosmologischen Ansichten im fünften Kapitel seines „Fundamentum astronomicum“ (Straßburg 1588). Seine Beschwerden gegen den angeblichen Plagiator sind enthalten in der an Moritz von Hessen gerichteten Dedikationsepistel, welche dem „Tractatus astronomicus de hypothesibus astronomicis seu de systemate mundano“ (Prag 1597) vorgedruckt ist.

[2]) Die Ansicht Wolfs (a.a.O., S. 245) ist vielleicht deshalb nicht zweifellos, weil die wenigen Worte, die Ursus von der nicht immer gleichen Stellung der Erde gegenüber den Fixsternen sagt, vielleicht auch auf eine Bewegung des Exzentermittelpunktes resp. des Punctum aequans bezogen werden können.

[3]) Der zweite Teil von Longomontans „Astronomia Danica“ (Amsterdam 1630) stützt sich auf diese Verschmelzung von Bestandteilen beider Systeme.

[4]) Dedikationsvorrede zu den 1609 erschienenen „Novae ephemerides“ des David Origanus (recte Post).

[5]) Diese von 1641—1700 reichenden Ephemeriden kamen nach des Autors Tode 1677 zu Leyden heraus.

[6]) Vgl. Argolis „Pandosion sphaericum“ (Padua 1644. S. 10ff.).

[7]) Riccioli, Almagestum novum, 2. Band, Bologna 1651. S. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 246.

IV. Das heliozentrische System des Coppernicus.

Alle die in den vorhergehenden Abschnitten gekennzeichneten Weltsysteme verloren, obwohl diese Erkenntnis (s. u.) durchaus nicht etwa mit *einem Schlage* zum Durchbruch kam, sofort dann ihre Berechtigung, als Nikolaus Coppernicus (geb. 1473 zu Thorn, gest. 1543 zu Frauenburg) mit dem seinigen hervortrat. Dies geschah erst im Todesjahre des großen Mannes [1]), obschon allerdings schon etwas früher einige Aufklärung über die sich anbahnende Reform in die Oeffentlichkeit gedrungen war [2]).

Wesen der Coppernicanischen Weltordnung. In fünfzigjährigen, unverrückt auf dasselbe Ziel gerichteten Studien war Coppernicus zu der Ueberzeugung gelangt, daß die viel beklagte Verwirrung in den Bewegungen der Himmelskörper sofort zu beheben sei, wenn man den *geozentrischen Standpunkt* verlasse und sich auf

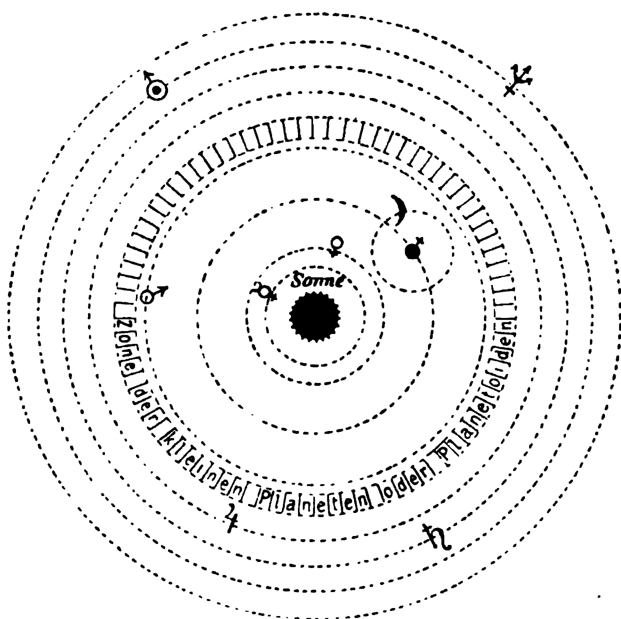
---

[1]) Mit der eigentlichen Konzeption der gewaltigen Idee und mit den Hauptpunkten der Begründung scheint Coppernicus schon etwa im Jahre 1507 im reinen gewesen zu sein. Zur Ausarbeitung und Veröffentlichung seines Hauptwerkes, der „Revolutiones orbium coelestium", ließ er sich jedoch nur durch vielfaches Drängen seiner Freunde bewegen: das in Nürnberg gedruckte Werk, welches Osiander mit einer höchst unpassenden Vorrede versah — vgl. Curtze, Hat Coppernicus die Einleitung in sein Werk „de revolutionibus" selbst gestrichen oder nicht? Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-litter. Abteil., 20. Band. S. 60 ff. —, erschien (s. o.) 1543. Zum 400jährigen Jubiläum dieses Ereignisses besorgte Curtze nach dem in Prag aufbewahrten Originalmanuskripte eine Neuauflage, und von Menzzer erhielten wir eine verdienstliche deutsche Uebersetzung, von der im folgenden mehrfach Gebrauch gemacht werden wird.

[2]) Gewöhnlich meint man, die „Narratio prima", die Rheticus 1540 zu Danzig drucken ließ, sei die erste zusammenhängende Darstellung der Coppernicanischen Lehren gewesen, allein, wie wir heute wissen (Prowe, Nikolaus Coppernicus, 2. Band. S. 282 ff.), stammt schon aus früherer Zeit ein „Commentariolus" aus des Meisters Feder selbst, den Prowe abdruckt, und der in nuce alle Grundlehren entwickelt.

den ***heliozentrischen Standpunkt*** stelle; die Sonne steht unverrückt in der Mitte ihres Planetensystemes, und das in dieses Zentrum versetzte geistige Auge sieht nun alle Verhältnisse in schönster Einfachheit und Regelmäßigkeit vor sich. So haben wir uns denn, nach Maßgabe

Fig. 129.



von *Fig. 129,* den Weltbau folgendermaßen vorzustellen: *Die Sonne ist der Zentralkörper; um sie bewegen sich als Planeten zunächst Merkur und Venus, dann die von ihrem Monde als Nebenplaneten begleitete Erde. Weiterhin liess Coppernicus, wie es eben der Wissensstand seiner Zeit erheischte, bloss noch Mars, Juppiter und Saturn um die Erde kreisen, während, wie man heutzutage weiss, wie es auch unser Bild darstellt, zwischen Mars und Juppiter*

noch die kleinen Planeten, jenseits von Saturn noch Uranus[1]) *und Neptun*[2]) *ihren Umlauf vollziehen. Die Rotation der Himmelskugel um die Erde ist nur scheinbar und wird dadurch zuwege gebracht, dass in Wahrheit die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit von West nach Ost sich um ihre — mit der bisher angenommenen Himmelsachse zusammenfallende — Achse dreht.*

So einfach und übersichtlich alles wird, sobald man die *Leuchte der Welt* auch in ihre Rechte als Zentralpunkt einsetzt[3]), so bleiben doch auch bei dieser Anordnung, solange nicht die im übernächsten Abschnitte zu behandelnden Verbesserungen angebracht sind, noch gewisse Schwierigkeiten übrig, zu deren Beseitigung es geometrischer Konstruktionen bedurfte. Coppernicus schaffte also die Epizykeln des Ptolemäus nicht gänzlich ab[4]), nur deren Zahl allerdings verminderte er beträchtlich. Auch litt sein System in der Urgestalt noch an einem Gebrechen, welches nur übertriebener Aengstlichkeit des Begründers sein kurzlebiges Dasein verdankte: dies war die Annahme einer *Achsenschwankung*, eingeführt zu dem Zwecke, den Parallelismus der Erdachse, welchen Coppernicus sich mit Unrecht als gefährdet dachte, wieder herzustellen[5]). Abgesehen von diesem

---

[1]) Uranus ward entdeckt von W. Herschel am 13. März 1781.

[2]) Die Entdeckung dieses Planeten gehört zu den großartigsten Leistungen der neueren Astronomie; aus den Störungen des Uranus (s. Abschnitt VII) hatte Leverrier auf das Vorhandensein eines transuranischen Planeten geschlossen und dessen Ort am Himmel theoretisch vorausbestimmt. Am 23. September 1846 wurde Galle — vgl. seinen authentischen Bericht in Nr. 2134 der „Astr. Nachr." — von jener Thatsache benachrichtigt, und noch am gleichen Abend fand er den Stern wirklich auf.

[3]) Von der Sonne sagt Coppernicus (lib. I, cap. 10): „Quis enim in hoc pulcherrimo templo lampadem hanc in alio vel meliori loco poneret, quam unde totum simul possit illuminare?"

[4]) Beim Monde z. B. sind noch zwei Epizykel erforderlich: s. Nikolaus Coppernicus aus Thorn über die Kreisbewegungen der Weltkörper, deutsch von Menzzer, Thorn 1879. S. 214 ff.

[5]) Diese „Titubation" der Erdachse ist bereits von Rothmann und nachher von Galilei als etwas Ueberflüssiges und der Natur Zuwiderlaufendes erkannt worden (Wolf, a. a. O., S. 228).

Fehlgriffe hat Coppernicus' System die Prüfung von dreiundeinhalb Jahrhunderten zu ertragen vermocht, und daran, daß dasselbe in seinen zwei Hauptsätzen sich jemals überleben, also sozusagen nur einen Durchgangspunkt unserer Erkenntnis darstellen könne, ist nach menschlichem Ermessen nicht mehr zu denken.

Aufnahme und Verbreitung des Systemes. Sehr rasch hat sich diese Ueberzeugung freilich nicht über weitere Kreise ausgedehnt, vielmehr blieb die Anerkennung, welche man dem neuen Weltsysteme schenkte, lange nur eine beschränkte. Nur in Wittenberg stellten sich die berufenen Fachmänner sofort auf Coppernicus' Seite; Rheticus war und blieb die eigentlich agitatorische Kraft, wie er denn auch zuerst Ephemeriden nach der neuen Lehre berechnete [1]); ihm schloß sich der Theologe Cruciger an [2]), und Reinhold, der Professor der „höheren" Mathematik (Sternkunde), lieferte mit Unterstützung des Herzogs Albrecht von Preußen ein Tafelwerk [3]), welches, da es eben auf richtige Grundsätze sich stützte, alles in dieser Hinsicht vorhandene weit übertraf und erst durch Keplers „Rudolphinische Tafeln" achtzig Jahre später seinerseits überholt wurde. Dagegen nahm Melanchthon, dem es an Verständnis für den sachlichen Wert der Neuerung keineswegs mangelte, von vornherein gegen diese aus philosophisch-dogmatischen Gründen eine scharf ausgeprägte gegnerische Stellung ein [4]), und ihm folgte das Gros der evangelischen Theo-

---

[1]) Rheticus, Ephemeris ex fundamentis Copernici, Leipzig 1550.

[2]) Dieser gelehrte Mathematiker (s. Pressel, Kaspar Cruciger, Elberfeld 1862; Kästner, Gesch. d. Math., 2. Band. S. 466 ff.) war nebenbei, seiner Kenntnisse in orientalischen Sprachen halber, eine Hauptstütze Martin Luthers.

[3]) Dies sind die „Tabulae Prutenicae motuum coelestium" (Wittenberg 1551; neue Auflagen von Mästlin, Tübingen 1571, und Straub, Wittenberg 1581).

[4]) Im Jahre 1549 gab Melanchthon seine gediegenen „Initia doctrinae physicae" heraus, welche man auch im „Corpus Reformatorum" abgedruckt findet, und in diesen (am zuletzt angeführten

logie, während die katholische sich zunächst noch ziemlich neutral verhielt. Daß Tycho Brahe, seiner hohen persönlichen Verehrung des Coppernicus [1]) zum Trotz, von jedweder Bewegung der Erde nichts wissen und für ein Palliativsystem Stimmung machen wollte, ist im vorigen Abschnitte dargethan worden.

Das Auftreten Keplers und Galileis (geb. 1564, gest. 1642, im Geburtsjahre Newtons) verhalf der Wahrheit in allen wirklich wissenschaftlichen Kreisen zum Siege, soweit diese nicht durch Nebenrücksichten in der Bethätigung ihres Urteiles gehindert waren. Nachdem Galilei im Jahre 1633 auf Grund eines siebzehn Jahre früher vom heiligen Offizium in Rom ergangenen Dekretes [2]), gegen welches er in seinen berühmten Dialogen [3]) sich verfehlt haben sollte, zur Abschwörung der „Irrlehre von

---

Orte, 13. Band. S. 216 ff.) sucht der Autor seine Anhänglichkeit am Alten mit biblischen und physikalischen Gründen zu rechtfertigen. Vorab die von Coppernicus vertretene Unendlichkeit des Kosmos schien ihm mit den Prinzipien des Christentums im Widerspruch zu stehen. Zuletzt (a. a. O., S. 292) schließt Melanchthon seine Betrachtungen mit nachstehendem Satze: „Sumus autem secuti in describendis illis Ptolemaei hypotheses, quae tot saeculorum testimonio comprobatae non temere convelli debent."

[1]) Tycho war hocherfreut, als er 1584 des Coppernicus Lieblingsinstrument, einen Ptolemäischen Dreistab (s. S. 83), zum Geschenke erhielt (Prowe, a. a. O., 2. Band. S. 49) und besang dasselbe in einem eigenen Gedichte.

[2]) Das von der auf Anordnung Pauls V. niedergesetzten Prüfungskommission erlassene Dekret lautet (Wolf, a. a. O.. S. 251) im deutschen Gewande, wie folgt: „Zu behaupten, die Sonne stehe unbeweglich im Zentrum der Welt, ist absurd, philosophisch falsch und formell ketzerisch, weil ausdrücklich der heiligen Schrift zuwider; zu behaupten, die Erde stehe nicht im Zentrum der Welt, sei nicht unbeweglich, sondern habe sogar eine tägliche rotatorische Bewegung, ist absurd, philosophisch falsch und zum mindesten ein irriger Glaube."

[3]) In diesen „Dialoghi sopra i due sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano" (in Italien erst viel später gedruckt; erste lateinische Ausgabe von Bernegger, Straßburg 1635, deutsch von Strauß, Leipzig 1890) läßt Galilei den für Ptolemäus eintretenden Simplicius gegen die Coppernicaner Sagredo und Salviati durchweg den kürzeren ziehen.

der doppelten Bewegung der Erde" verurteilt war [1]), nahm die katholische Kirche, voran der Jesuitenorden, die Befehdung der Coppernicanischen Weltanschauung energisch auf, und dieser Anregung verdankten ihr Dasein Schriften, wie diejenigen von Fromond [2]), Du Bois [3]), ganz besonders aber von Riccioli, der nicht weniger als 77 Einwürfe gegen Coppernicus geltend macht, allerdings aber doch so freundlich ist, ihm 49 Gründe zu gunsten seines Systemes zuzugestehen [4]). Manche halfen sich in der Weise, daß sie die Coppernicanischen Lehrsätze als Basis für die astronomische Rechnung zwar anerkannten, aber ausdrücklich nur als Hypothese und nicht als positive Wahrheit; so handelte z. B. Chr. Clavius, einer der hervorragendsten Mathematiker seiner Zeit [5]). Selbst in den Schriften von Astronomen, wie D. und J. Cassini, begegnet man noch einer gewissen Abgeneigtheit, sich offen und klar für die Coppernicanische Lehre auszusprechen.

Allmählich ließ der Widerspruch nach, da auch die Theologen immer mehr die Notwendigkeit, sich mit einem nicht mehr rückgängig zu machenden Fortschritte auszusöhnen, einzusehen begannen. Diesmal ging die protestantische Kirche voran [6]), aber auch die katholische

[1]) Als übersichtlichste, wenn schon nicht stets ganz treue Darstellung des denkwürdigen Prozesses ist v. Geblers Buch „Galileo Galilei und die römische Kurie" (Stuttgart 1876) zu empfehlen.

[2]) Fromondus, Anti-Aristarchus, Antwerpen 1631; Vesta sive Anti-Aristarchi vindex contra Jac. Lansbergium et Copernicanos. ebenda 1634.

[3]) J. Du Bois, Dialogus theologico-astronomicus, Leyden 1653.

[4]) Riccioli, Almagestum novum, 2. Band. S. 290 ff.

[5]) In seiner „Commentatio in Sphaeram Joannis de Sacrobosco", welche im dritten Bande der sämtlichen Werke (Mainz 1612) enthalten ist, zollt Clavius dem Coppernicus als „restitutor egregius" das höchste Lob, erklärt sich mit dessen für die Bewegung der Fixsternsphäre aufgestellten Sätzen einverstanden und salviert dann (S. 68) sein Gewissen mit der Bemerkung, daß er dessen Erklärungsversuch ganz und gar zurückweisen müsse.

[6]) Schriften aus dem theologischen Lager sind z. B. die folgenden: Herbinius, Famosae de Solis vel Telluris motu controversiae examen theologico-philosophicum, Utrecht 1655; Megerlin,

konnte nicht zurückbleiben [1]). Im Jahre 1757 beschloß die Kongregation des „Index librorum prohibitorum", die früher darauf stehenden Schriften astronomischen Inhaltes von ihm abzusetzen; nur die „Dialoge über das Weltsystem" blieben bis 1835 stehen. Und am 23. September 1822 gestattete Papst Pius VII., daß Pater Settele in seinem behufs Druckerlaubnis unterbreiteten Lehrbuche [2]) die Lehre von der bewegten Erde „juxta communem modernorum astronomorum opinionem" vorzutragen berechtigt sei. Damit war der unselige Bann zweier Jahrhunderte gebrochen. Wer heute noch die Coppernicanische Weltordnung angreift, hat sich damit selbst außerhalb der Wissenschaft gestellt [3]).

Wir beabsichtigen nunmehr, die wichtigsten astronomischen Erscheinungen, wie sie sich in Konsequenz der heliozentrischen Weltanschauung erklären lassen, nacheinander durchzugehen. *Auf den Gegensatz zwischen Ptole-*

Systema mundi Copernicanum argumentis invictis demonstratum et conciliatum theologiae, Amsterdam 1682; Bernd, Neu versuchter Beweis, daß das Systema Copernici der heiligen Schrift nicht zu nahe trete, Magdeburg 1742. Aber noch J. J. Schmidts „Biblischer Mathematicus" (Züllichau 1736. S. 400) sucht sich neutral zwischen den drei vorzüglichsten Weltsystemen des Ptolemäus, Tycho und Coppernicus zu verhalten und meint, „daß die Herren Copernicaner noch lange nicht bewiesen haben. daß ihr Systema notwendig das alleinige wahre sei". Es gab eben, und darauf beruft sich Schmidt, noch immer allerhand Leute. die an der Coppernicanischen Lehre, wenn sie selbe auch im allgemeinen anerkannten, Unvollkommenheiten aufzufinden sich bemühten; solches thaten z. B. Deusing (De vero systemate mundi. quo Copernici systema reformatur, Amsterdam 1643) und Siegesbeck (De systematis Copernicani ob vaccillantia nimis fundamenta mox imminente ruina, Hamburg 1731).

[1]) Der sich anschließende Bericht ist entnommen einem auf streng kirchlichem Boden stehenden Aufsatze „Der heilige Stuhl gegen Galileo Galilei und das astronomische System des Coppernicus" (Historisch-politische Blätter, 7. Band. S. 385 ff.).

[2]) Settele, Elementi di ottica e di astronomia, Rom 1819. Im 2. Bande (S. 130) sucht der Autor etwas schwächlich zwischen geschichtlicher Wahrheit und eigener religiöser Ueberzeugung ein Kompromiß anzubahnen.

[3]) Sehr kräftige Worte widmet solchen Aspirationen R. Wolf (a. a. O., S. 789 ff.).

mäus und Coppernicus soll dabei immer besonderes Gewicht gelegt werden.

Die Mondphasen. Hinsichtlich der Deutung dieser wohlbekannten Erscheinung, über welche alles Thatsächliche bereits früher (S. 72 ff.) erschöpfend beigebracht ist, gehen die beiden Weltsysteme nicht im geringsten auseinander. Nachdem im griechischen Altertum[1]) — so zumal von Heraclitus[2]) — die sonderbarsten Anschauungen zu Markte gebracht worden waren, stellte Pythagoras die nachmals zur allgemeinen Geltung gelangte Behauptung auf: *Der Mond ist eine Kugel, welche mit erborgtem Sonnenlichte leuchtet, und je nach der wechselnden Gestalt des Dreieckes, welches im allgemeinen von den Mittelpunkten der drei Himmelskörper Sonne, Erde, Mond gebildet wird, treten die bekannten Phasen oder Lichterscheinungen auf.*

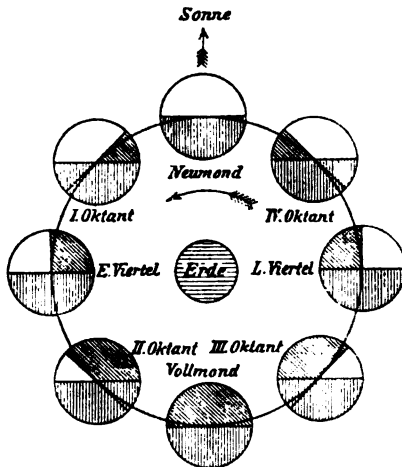
Die Sonne ist so weit von Erde und Mond entfernt, daß ihre Strahlen unbedenklich als unter sich parallel betrachtet werden dürfen. In *Fig. 130* repräsentiert der kleinere Kreis um *E* die Erdkugel, der größere die Bahn des Mondes, dessen Bewegungssinn ein Pfeil andeutet. Der Mond ist in acht Stellungen abgebildet, in den beiden *Syzygien* (Voll- und Neumond), den beiden *Quadraturen* (erstes und letztes Viertel) und in den vier *Oktanten*, durch die resp. der zwischen je einer Syzygie und Quadratur gelegene Viertelskreis halbiert wird. Die Beleuchtungsgrenze ist fast genau ein Kreis, der sich bei den Quadraturen in eine grade Linie zu verwandeln scheint; die der Sonne abgekehrte, d. h. dunkel bleibende Halbkugel des Mondes ist in unserer Zeichnung schraffiert, und wenn man sich also noch vergegenwärtigt, daß von der Erde aus immer nur die eine Halbkugelfläche des

[1]) Vgl. Sartorius, Die Entwicklung der Astronomie bei den Griechen, S. 39 ff. Die Himmelskörper sind hohle Schalen, in deren Innerem Feuer brennt. Kehren dieselben stets der Erde die nämliche Seite zu, so sind die Gestirne jederzeit sichtbar, während dann, wenn diese Schalen sich drehen, ein Lichtwechsel stattfinden muß.

[2]) Diogenes Laertius, lib. IX, cap. 9.

Begleiters gesehen werden kann, so erhellt aus der Figur sofort und ohne weitere Beschreibung, warum die Phasen

Fig. 130.



immer wieder in der männiglich bekannten Gestalt wahrgenommen werden müssen [1]).

Dann, wenn die Mondsichel sehr schmal ist, sieht man nicht selten auch den an sich unbeleuchteten Teil des Kreises, die Ergänzung der Sichel (μηνισκός), in mattem Glanze. Die Astronomie bezeichnet dieses Phänomen als das *aschgraue Licht des Mondes* [2]).

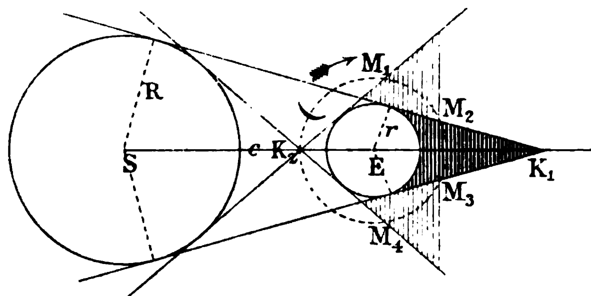
[1]) Der Sektor der Scheibe, welcher von der Erde aus beleuchtet erscheint, ist durchweg durch schiefe, der jenseits der Beleuchtungsgrenze liegende Halbkreis durch senkrechte Schraffur kenntlich gemacht.

[2]) Die richtige Erklärung des „Gegenscheines" hat zuerst Lionardo da Vinci und später, von diesem ganz unabhängig, Keplers Lehrer, Mästlin, gegeben (Wolf, a. a. O., S. 179). Die Erde empfängt ihrerseits Licht von der Sonne und reflektiert einen Teil desselben wieder nach dem Monde, so daß also das aschgraue Licht erst nach zweimaliger Zurückwerfung unser Auge trifft. Daher der matte, verschwommene Glanz des konvexen Teiles der Scheibe.

Allgemeines über Finsternisse. Wenn die Kreisbahnen, die der Mond um die Erde und diese wieder um die Sonne beschreiben, in ein und dieselbe Ebene fielen, so müßten sich in jedem Monate zwei Finsternisse ereignen: *jeder Neumond würde zu einer Sonnenfinsternis, jeder Vollmond zu einer Mondfinsternis Veranlassung geben.* Eine Finsternis tritt eben stets dann ein, wenn das Dreieck Erde-Mond-Sonne einen von 180° nur sehr wenig abweichenden Winkel besitzt, resp. wenn dieses Dreieck wirklich vorübergehend durch eine grade Linie ersetzt wird. Obwohl wir in Abschnitt V des vorigen Kapitels mit diesem Phänomen uns bereits mehrfach, freilich unter einem rein praktischen Gesichtspunkte, zu beschäftigen hatten, so können wir doch jetzt erst die theoretischen Bedingungen aufstellen, von welchen eine Verfinsterung — ἔκλειψις, vgl. die Erklärung dieses Wortes auf S. 70 — abhängig ist.

Beginnen wir mit der *Mondfinsternis.* S *(Fig. 131)* sei der Mittelpunkt der Sonne, E derjenige der kleineren

Fig. 131.



Erde, ES die Verbindungslinie der Mittelpunkte. Auf letzterer Graden liegen zwei Punkte K_1 und K_2 so, daß, wenn man von dem einen derselben einen Berührungskegel an die eine der beiden Kugeln legt, dieser Kegel die gleiche Eigenschaft auch für die andere Kugel be-

sitzt [1]). Der *innere Berührungskegel* grenzt jenseits der Erde den Raum des *Halbschattens*, der *äussere Berührungskegel* grenzt gleicherweise den Raum des *Kernschattens* ab, wie dies auch in der Figur durch verschieden starke Schraffierung zum Ausdrucke gebracht wird. Die Bahn des Mondes (☽) ist durch einen zu E konzentrischen Kreis dargestellt. Für gewöhnlich nun wird dieser Kreis so gelegen sein, daß er mit keinem der beiden Schattenkegel zum Durchschnitte kommt, und dann gibt es auch keine Verfinsterung. In anderen Fällen wird der Mond nur mit einem Teile seiner Scheibe in den Schattenkegel eintreten, so daß die Durchschnittskurve der Kugel und des Kegels sich als kreisähnliche — uns aus den Beweisgründen für die Sphärizität der Erde (S. 210) wohlbekannte — Linie auf der Mondscheibe abzeichnet. Alsdann liegt eine *partielle Mondfinsternis* vor, für deren Dauer eine bloße Lichtschwächung konstatiert wird. Endlich aber kann die Lage der Bahnkurve gegen den Kegel auch eine solche sein, daß der Erdbegleiter eine Zeitlang vollständig unsichtbar wird; dann ist die Eklipse eine *totale Mondfinsternis*. Jede solche wird von einer partiellen eingeleitet und zum Abschlusse gebracht. In M_1 tritt der Mond in den Halbschatten, in M_2 in den Kernschatten; diesen verläßt er bei M_3, den Halbschatten aber bei M_4, so daß der Zurücklegung des Bogens $M_2 M_3$ die totale, der Zurücklegung der beiden Bogen $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ die partielle Finsternis entspricht. Da die Mittelpunkte der drei in Rede stehenden Himmelskörper annähernd in einer graden Linie sich befinden, so kann für die Dauer einer Verfinsterung nur ganz ausnahms-

[1]) Versteht man unter R und r die wirklichen (linearen) Halbmesser von Sonne und Erde, unter c die Länge der Strecke SE, so kann man nach der in der Geometrie zu entwickelnden Theorie der *Aehnlichkeitspunkte* die Lage von K_1 und K_2 leicht angeben. Es ist nämlich

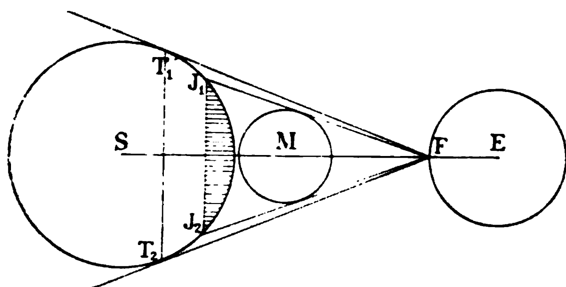
$$EK_1 = \frac{cr}{R-r}, \quad EK_2 = \frac{cr}{R+r}.$$

Zum Beweise bedarf es nur des Satzes, daß die Seiten ähnlicher Dreiecke in Proportion stehen.

weise der Fall eintreten, daß die Sonne und der teilweise verdunkelte Mond gleichzeitig sichtbar werden [1]).

Auch eine *Sonnenfinsternis*, die durch das Zwischentreten der ihre dunkle Seite der Erde zukehrenden Mondkugel zwischen die Sonne und unseren Planeten erzeugt wird, kann *total* oder *partiell* oder auch — eine nur sehr selten eintretende dritte Möglichkeit — *ringförmig* sein. Die Bedingungen, unter welchen letztere sich ereignet, sind in *Fig. 132* leicht zu überblicken. Der Kreis um *S* repräsentiert die Sonne, derjenige um *M* den Mond, der

Fig. 132.



um *E* die Erde. Von dem Punkte *F*, der auf der gradlinigen Verbindungslinie *SME* liegt, ist an die Mondkugel ein Tangentialkegel gelegt, welcher die Sonnenkugel längs des Kreises $J_1 J_2$ schneidet, während die Berührung eines analog von *F* aus tangierend an die Sonne gelegten Kegels mit dieser längs des Kreises $J_1 J_2$ statthat. Die Kalotte $J_1 J_2$ ist demgemäß für einen Beobachter in *F* verfinstert, wogegen rings um den schwarzen

---

1) Die Refraktion bewirkt es, daß die Sonne auf der einen, der verfinsterte — meist in schmutzig rotem Lichte sichtbare — Mond auf der anderen Seite des Horizontes gesehen wird. Schon aus dem Altertum liegen Zeugnisse für eine solche Beobachtung vor; am 6. Dezember 1862 hat Cantzler dieselbe in Greifswald gemacht und seine bezüglichen Wahrnehmungen, verbunden mit historischen und anderen Erörterungen über den Gegenstand, im Jahrgang 1863 der von Heis herausgegebenen „Wochenschr. f. Astronomie, Meteorologie und Geographie" veröffentlicht.

Kreis ein heller, allenthalben gleichbreiter Lichtring, der Kugelzone $J_1\,T_1\,T_2\,J_2$ entsprechend, sich herumlegt. Ein von F etwas nach Westen oder Osten, Norden oder Süden abliegender Erdort erblickt ebenfalls die Finsternis noch ringförmig, nur ist natürlich jetzt die Breite des Lichtringes an einer bestimmten Stelle ein Minimum, an der ihr diametral gegenüberliegenden Stelle ein Maximum geworden.

Um die *Grösse der Verfinsterung* bequem und in vergleichbaren Zahlen angeben zu können, bedient man sich des folgenden Hilfsmittels. Man teilt denjenigen Durchmesser des der ganzen oder teilweisen Verfinsterung ausgesetzten Himmelskörpers, welcher auf der Lichtgrenze senkrecht steht, in zwölf gleiche Teile oder *Zolle,* die natürlich mit dem bekannten Linearmaße gleichen Namens nicht das mindeste gemein haben. Dann sagt man im Einzelfalle aus, wieviel Zolle der dunklen Seite angehörten, und, wenn man den Maximalzeitpunkt im Auge hat, so kann man, wofern in diesem Augenblicke die Dunkelheit n Zoll umfaßte, von einer *n zölligen Finsternis* sprechen. Für $n \geqq 12$ ist dieselbe total.

Wir haben uns davon überzeugt, wie die verhältnismäßige Seltenheit der Eklipsen einzig von dem Umstande abhängt, daß Mond- und Erdbahn nicht zusammenfallen, sondern einen Winkel von beiläufig 5^0 (s. S. 76) miteinander bilden. Nennen wir die beiden Durchschnittspunkte des vom Monde beschriebenen Kreises mit der Erdbahnebene resp. den *auf- und absteigenden Knoten* des ersteren [1]), so können wir offenbar behaupten: *Das Zustandekommen einer Finsternis hängt davon ab*, *dass zu gleicher Zeit Sonne und Mond sich in der Nähe ein und desselben Knotens befinden.* Hieraus ergibt sich ein Mittel,

[1]) Bezeichnet wird der aufsteigende Mondknoten in der Astronomie gewöhnlich durch ☊, der absteigende durch ☋. Woher für diese beiden Punkte die eigentümlichen, mutmaßlich an astrologische Spielereien einer älteren Zeit erinnernden Worte *Drachenkopf* und *Drachenschwanz*, die man auch nicht selten angewendet findet, eigentlich stammen, scheint sich nicht mehr mit Sicherheit ermitteln zu lassen.

um die Wiederkehr einer bestimmten Finsternis wenigstens im rohen Umrisse vorausbestimmen zu können. Die Zeit, welche der Mond braucht, um wieder an einen bestimmten Knotenpunkt heranzukommen, beträgt, wie weiter unten des näheren dargelegt werden wird, 27,21222 Tage, während die Zeit, die vergeht, bis das Dreieck Sonne-Erde-Mond wieder die früher gehabte Gestalt annimmt, 29,53059 Tage ausmacht. *Entwickelt man den so erhaltenen unechten Bruch in einen Kettenbruch und bestimmt dessen Näherungswerte, so geben diese mit stets wachsender Genauigkeit die Perioden an, nach deren Umlauf die Umstände dem Eintreten einer schon früher in gleicher Art dagewesenen Eklipse sich günstig erweisen.* Es ist

$$\frac{27{,}21222}{29{,}53059} = 1 : [1 + 1 : [11 + 1 : [1 + 1 : [1 + 2 : [1 + \ldots].$$

Die hieraus nach bekannter Rechnungsvorschrift sich ergebenden Näherungsbrüche sind [1]):

$$\frac{1}{1}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{35}{38}, \frac{47}{51}, \frac{223}{242}, \frac{716}{777} \ldots$$

Die fünf ersten bieten nicht die hinreichende Genauigkeit, der siebente Wert hat bereits unbequem große Zahlen; man hält sich also an den sechsten Bruch und kleidet die in demselben sich aussprechende Wahrheit folgendermaßen ein: *Nach Umfluss von 242 Monaten der erstbezeichneten oder, was fast genau dasselbe ist, von 223 Monaten der zweitbezeichneten Art kehren Sonnen- und Mondfinsternisse in der nämlichen Reihenfolge wieder.*

Man belegt die so festgelegte Periode mit dem Namen *Saros,* der eines altbabylonischen Ursprunges sich rühmen darf [2]). Der Zeitraum umfaßt 18 Jahre 11 Tage; wer

---

[1]) R. Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 206.

[2]) Das assyrisch-babylonische Wort „Sar" bedeutete von Hause aus eine bestimmte Zahl (Delitzsch, Soß, Ner, Sar, Zeitschr. f. Aegyptologie, 1878. S. 56 ff.). Die Endung „os" ist natürlich griechisch, und von den Griechen wurde wohl auch der Name Saros zuerst auf die im Zweistromlande längst bekannte Periode angewendet (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 9).

also von der Existenz desselben Kenntnis hat und zugleich über ein Verzeichnis gebietet, in welchem für eine Anzahl dieser Perioden — denn eine einzige würde nicht hinreichen, weil manche Finsternis von einem bestimmten Orte aus nicht sichtbar ist [1]) — die Eklipsen regelmäßig eingetragen sind [2]), der kann mit großer Aussicht auf Erfolg Vorausbestimmungen solcher Erscheinungen machen, wie dies denn auch thatsächlich in alter Zeit vielfach geschehen ist [3]), ehe die Mittel zu einer wirklich

---

[1]) Während eines Saros treffen im Durchschnitte 40 Sonnenfinsternisse ein, von denen aber ein unverrückt an einem bestimmten Platze verbleibender Beobachter nur höchstens den vierten Teil wirklich zu Gesichte bekommt, weil eben die Sichtbarkeitszone in jedem Falle eine andere wird. In dieser Beziehung ist der Briefwechsel Kaiser Karls des Großen mit dem in St. Denis lebenden Mönche Dungal sehr lehrreich (vgl. Jaffés „Bibliotheca rerum Germanicarum", 6. Band; K. Werner, Alkuin und sein Jahrhundert, Paderborn 1876. S. 29 ff.). Für das Jahr 810 hatte die zyklische Rechnung auf Grund des Saros zwei Sonnenfinsternisse ergeben, die aber nicht beobachtet wurden und den Kaiser deshalb zur Anfrage bei seinem astronomischen Vertrauten veranlaßten. Dungal erklärte ganz richtig, die Finsternisse seien nur für die Südhalbkugel sichtbar gewesen.

[2]) Daß die babylonischen Astronomen solche Listen bis hinauf zum Jahre 747 v. Chr. besaßen, wußten schon die Griechen, aber im assyrischen Reichsarchive ist auch die Sonnenfinsternis vom 15. Juni 763 verzeichnet (Cantor, Vorles. über Gesch. d. Mathem., 1. Band. S. 81).

[3]) Von zwei in der vorptolemäischen Zeit geglückten Prognosen berichtet Plinius (Hist. nat., lib. II, cap. 9): „Et rationem quidem defectus utriusque primus Romani generis in vulgus extulit Sulpicius Gallus, qui consul cum Marcello fuit: sed tum tribunus militum, sollicitudine exercitu liberato, pridie quam Perseus rex superatus a Paulo est, in concionem ab imperatore productus ad praedicandum eclipsim, mox et composito volumine. Apud Graecos autem investigavit primus omnium Thales Milesius, Olympiadis XLVIII anno quarto, praedicto Solis defectu, qui Alyatte rege factus est, urbis conditae anno CLX (?)." Was letzteres anlangt, so scheint in der That (Wolf, Gesch. d. Astr. 10) Thales die Sonnenfinsternis vorhergesagt zu haben, die am 28. Mai 585 der am Halys zwischen Krösus und Alyattes entbrannten Schlacht ein Ende machte, und auf die H. Barth gewisse im Felspasse von Boghasköi eingegrabene, auf einen astronomischen Vorgang hindeutende Darstellungen bezieht. — Alle Finsternisse, deren antike Autoren Erwähnung thun, hat J. Zech in mühevollster Arbeit nachgerechnet

exakten Voraussage des genauen Zeitpunktes und der einzelnen Elemente einer Verfinsterung gegeben waren.

Das Ptolemäische Almagest gewährte solche Mittel bereits bis zu einem gewissen Grade, doch stand es immerhin noch lange an, bis Kepler[1]) die im wesentlichen noch heute giltigen Methoden des Finsterniskalkuls in ihren Grundzügen entwickelte. Ueber diese älteren, natürlich nicht eben durch Eleganz ausgezeichneten Methoden gibt eine Schrift von Leonhardi[2]) gute Auskunft. Freilich aber hat sich seitdem durch Bessel, der in einer als klassisch zu bezeichnenden Abhandlung die neuere analytische Raumgeometrie auf diese Probleme anwandte[3]), eine völlig neue Auffassung dieser Fragen herausgebildet, der man gegenwärtig Rechnung zu tragen hat.

Berechnung der Elemente einer Mondfinsternis. Eine den modernen Anforderungen angepaßte sorgfältige Theorie der Verfinsterungen überhaupt scheint uns nicht mehr in das Gebiet der mathematischen Geographie, wie wir dieses eingangs umschrieben, zu gehören. Lediglich um zu zeigen, daß auch diese Aufgaben keine übertriebenen Schwierigkeiten für das Verständnis darbieten, geben wir im folgenden eine bloß von elementargeometrischen Mitteln Gebrauch machende Berechnung der wichtigsten *Bestimmungsstücke einer Mondfinsternis.*

(Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des klassischen Altertums erwähnt werden, Leipzig 1853). Den Zeitraum 26 bis 103 n. Chr. prüft auf Grund der theoretischen Arbeiten v. Oppolzers sehr gründlich Ginzel (Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, Wien 1882); speziell mit der kleinasiatischen Verfinsterung beschäftigt sich G. Hofmann (Die Sonnenfinsternis des Thales vom 28. Mai 585 v. Chr., Triest 1870).

[1]) Die bezügliche Entwicklung enthalten die „Paralipomena ad Vitellionem" (Frankfurt a. M. 1604; sämtliche Werke, ed. Frisch, 2. Band. S. 297 ff.).

[2]) Leonhardi, Anleitung zur Berechnung und graphischen Bestimmung der Sonnenfinsternisse und Mondfinsternisse, Leipzig 1846.

[3]) Die „Analyse der Finsternisse" bildet den fünften Bestandteil der über verschiedene Materien sich erstreckenden „Astron. Untersuchungen" Bessels (Königsberg 1841—42).

Es sei $e_1 e_2$ die Bahn, auf welcher die Erde sich bewegt *(Fig. 133)*; für die kurze Dauer einer Finsternis haben wir das Recht, sowohl $e_1 e_2$ als auch das in betracht kommende Stück $m_1 m_2$ der Mondbahn als gradlinig zu behandeln. Sowohl Erde als Mond bewegen sich

Fig. 133.

nach Coppernicus, allein wenn wir, da ja erstere in astronomischer Breite (s. S. 134) gar keine Bewegung besitzt, dem Monde die Bewegung $(\Delta l - \Delta \lambda)$ beilegen, wo Δl die stündliche Fortbewegung unseres Trabanten, $\Delta \lambda$ die stündliche Fortbewegung der Erde selbst bedeutet, so können wir letztere als ruhend annehmen. In Breite hat der Mond die Bewegung db; stellt somit DF den Stundenweg des Mondes in seiner Bahn vor, und ziehen wir durch F eine Parallele zu $e_1 e_2$, auf welche wir aus D eine Senkrechte fällen, so ist das Lot $DG = \Delta b$, die andere Kathete $= \Delta l - \Delta \lambda$, der von letzterer mit der Mondbahn selbst gebildete Winkel $= \alpha$, wo α die ungefähr 5^0 (s. o.) betragende Neigung der Mondbahn gegen die

Ekliptik[1]) sein soll. Es ist also der stündliche Fortschritt des Mondes in seiner Bahn

$$DF = \Delta b : \sin \alpha = \sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta \lambda)^2}.$$

Wenn der Mondmittelpunkt in M_1 angekommen ist, berührt seine Scheibe den um E als Mittelpunkt mit dem bekannten, d. h. dem astronomischen Kalender zu entnehmenden Halbmesser ρ_1 beschriebenen Querschnitt des Schattenkegels; B_1 sei der Berührungspunkt; die partielle Verfinsterung hat begonnen. Dieselbe endet, sobald der Mondmittelpunkt in M_3 angekommen ist, denn alsdann berühren sich Mondscheibe und Schattenkreis wiederum von außen in B_2. M sei ein beliebiger Punkt zwischen M_1 und M_3; zieht man die Linie ME, welche den Schattenkreis in J, den Mondumfang in L durchschneidet, so ist das schraffierte Segment der Mondscheibe, welches JL zum Durchmesser hat, verfinstert; diese Strecke JL, von der wir annehmen wollen, sie betrage p Zolle (s. o.), repräsentiert uns offenbar die Verfinsterungsgröße für den fraglichen Zeitpunkt. Wenn endlich das Mondzentrum in M_2, d. h. in dem Fußpunkte des aus E auf $m_1 m_2$ gefällten Perpendikels angekommen ist, dann ist, wie auch die Figur erkennen läßt, das größte Segment verdunkelt, und es ist *die Maximalphase der Verfinsterung eingetreten.* Da in den Dreiecken $M_1 M_2 E$ und $M_1 M_3 E$ Seite $M_2 E = M_2 E$, Seite $M_1 E =$ Seite $M_3 E = \rho_1 + \rho_2$ (unter ρ_2 den Mondhalbmesser verstanden) und $\sphericalangle M_1 M_2 E = \sphericalangle M_3 M_2 E = 90^0$ ist, so sind obige Dreiecke kongruent, und daraus folgt $M_1 M_2 = M_2 M_3$; bei M_2 ist also zugleich die *Mitte der Finsternis* erreicht. Wir können nun folgende Fragen stellen:

I. Um welche Zeit beginnt, um welche Zeit endet eine bevorstehende Finsternis und wann ist ihre Mitte zu erwarten? Die Zeiten seien resp. t_1, t_2, t_3 [2]).

---

[1]) Eigentlich ist die Ekliptik die Sonnenbahn des Ptolemäus und nicht die Erdbahn des Coppernicus. Es leuchtet jedoch ein, daß die sonstigen räumlichen Beziehungen durch die Alternative, welcher von beiden Weltkörpern der bewegte sei, nicht berührt werden.

[2]) Wir denken uns reine Uhrzeiten. Dann aber muß selbst-

II. Um welche Zeit t ist die Finsternis gerade p zöllig? In der Beantwortung letzterer Frage ist zugleich auch Aufschluß darüber enthalten, ob Totalität eintritt, denn wenn wir in der gefundenen Formel $p = 12$ setzen und für diese Annahme einen reellen Wert von t bekommen, so tritt der Mond eine zeitlang ganz in den Erdschatten ein.

Bekannt sind uns die Größen α, ρ_1, ρ_2, Δb, Δl, $\Delta \lambda$, T. Außerdem liefern uns die Tafeln auch noch die Lage des *Oppositionspunktes* N, in dem die Mondbahn von einer in E auf $e_1 e_2$ senkrecht gezogenen Graden getroffen wird. $EN = d$ ist also auch bekannt; dann ist $\sphericalangle NEM_2 = \alpha$ und $EM_2 = d \cos \alpha$. Nunmehr treten wir an die Lösung unserer obigen Fragen heran.

In N befindet sich der Mondmittelpunkt zur Zeit T; dann wird zur Zurücklegung des Weges $M_1 N$ die Zeit $(T - t_1)$, zur Zurücklegung des Weges NM_3 die Zeit $(t_3 - T)$ beansprucht. In einer einzigen Stunde legt der Mond den Weg DF, wie wir wissen, zurück, weshalb $M_1 N = DF(T - t_1)$, $NM_3 = DF(t_3 - T)$ gesetzt werden kann. Aus den beiden Dreiecken $M_1 NE$ und $M_3 NE$ ergeben sich nun nach dem Kosinussatze, da $\sphericalangle M_2 NE$ das Komplement von α ist, folgende zwei Gleichungen:

$$(\rho_1 + \rho_2)^2 = d^2 + \overline{DF}^2 (T - t_1)^2 + 2d \, . \, DF\,(T - t_1) \sin \alpha,$$

$$(\rho_1 + \rho_2)^2 = d^2 + \overline{DF}^2 (t_3 - T)^2 - 2d \, . \, DF\,(t_3 - T) \sin \alpha.$$

Aus jeder der beiden quadratischen Gleichungen folgt je ein Wert von t_1 und t_3; rechnen wir aus, so zeigt sich, daß je einer der Werte von t_1 mit einem solchen von t_3 identisch ist, und wenn wir noch für DF den oben erhaltenen Wurzelausdruck einsetzen, so erhalten wir zum Schlusse:

$$t_1 = \frac{T\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2} + d \sin\alpha - \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - d^2 \cos^2\alpha}}{\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2}},$$

verständlich noch ein fester Zeitpunkt vorhanden sein, mit dem wir rechnen können, und dies ist der in den Jahrbüchern registrierte Zeitpunkt T, in welchem der Mond bei N seine Oppositionsstellung erreicht.

$$t_3 = \frac{T\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2} + d\sin\alpha + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - d^2\cos^2\alpha}}{\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2}},$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(t_1 + t_3) = T + \frac{d\sin\alpha}{\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2}}.$$

Damit ist die erste unserer Aufgaben vollständig erledigt.

Was die zweite anlangt, so ist zunächst die Länge EM zu bestimmen. Nach Voraussetzung ist $JL = \frac{2p\rho_2}{12} = \frac{p\rho_2}{6}$; ferner hat man

$$EM = EL + JL + JM, \quad \rho_1 = EL + JL, \quad \rho_2 = JL + JM,$$

und daraus fließt $EM = \rho_1 + \rho_2 - \frac{p\rho_2}{6}$. Die Strecke MN ist gleich $DF\,(T - t)$, somit ist, ähnlich wie vorhin,

$$\left(\rho_1 + \rho_2 - \frac{p\rho_2}{6}\right)^2 = d^2 + \overline{DF}^2(T - t)^2 + 2d . DF(T - t)\sin\alpha,$$

$$t = \frac{T\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2} + d\sin\alpha \mp \sqrt{\left(\rho_1 + \rho_2 - \frac{p\rho_2}{6}\right)^2 - d^2\cos^2\alpha}}{\sqrt{\Delta b^2 + (\Delta l - \Delta\lambda)^2}}.$$

Das doppelte Vorzeichen erklärt sich daraus, daß zu beiden Seiten von M_2 sich alles symmetrisch verhält, daß also auch dem Punkte M auf der einen Seite ein ebensolcher auf der anderen entsprechen muß. Für

$$\rho_1 + \rho_2 - \frac{p\rho_2}{6} \overline{\gtrless} d\cos\alpha$$

findet überhaupt keine Verfinsterung statt, da dann die Quadratwurzel imaginär wird. Für $p = 0$ stimmen, wie man sieht, die drei Größen t_1, t_3, und t überein, was auch natürlich ist, da in diesem Falle die Mondscheibe den Schattenkreis nur streift, nicht aber mit ihm zum Durchschnitte gelangt.

Um die *Grösse der Maximalverfinsterung* zu finden,

setzen wir in unserer Gleichung $EM = \rho_1 + \rho_2 - \frac{p \rho_2}{6}$ die Größe $EM = EM_2 = d \cos \alpha$. Es ist also [1])

$$\frac{p \rho_2}{6} = \rho_1 + \rho_2 - d \cos \alpha, \quad p = \frac{6 (\rho_1 + \rho_2 - d \cos \alpha)}{\rho_2}.$$

Will man die ermittelten Formeln an einem Zahlenbeispiele prüfen, so thut man gut, eine historisch wichtige Finsternis herauszugreifen [2]). Die gefundenen numerischen Werte lassen sich dann leichter durch die Thatsachen kontrollieren.

Die Jahreszeiten. Auch die geozentrische Lehre stand der Frage, wie die *Abwechslung der Jahreszeiten* kausal zu begreifen sei, keineswegs ratlos gegenüber. Ungleich naturgemäßer jedoch gestalten sich die Dinge, sobald wir von der Bewegung der Erde um die Sonne unseren Ausgang nehmen. *Fig. 134,* worin S die Sonne vorstellt, gibt uns Aufschluß über die Sache. Für die Dauer eines Jahres kann der *Achsenparallelismus* der Erde, der ja (s. S. 174 und unten Abschnitt VIII) durchaus kein vollkommener ist, als ein solcher gelten; wenn also durch die vier Kreise unserer Figur eine orthographische Abbildung unserer Erdkugel in den zwei Solstitialtagen (E_1 und E_3) und in den beiden Aequinoktialtagen (E_2 und E_4) gegeben sein soll, so dürfen wir die vier dem entsprechenden Lagen der Rotationsachse, $N_1 S_1$, $N_2 S_2$, $N_3 S_3$ und $N_4 S_4$ als unter sich parallel betrachten; $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$, $a_3 a_3'$, $a_4 a_4'$ sollen jeweils die Stellungen des Erdäquators

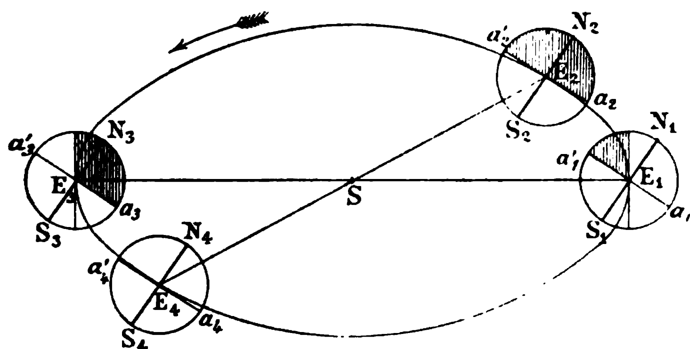
---

[1]) In ähnlicher Weise berechnet die Maximalgröße Copernicus (a. a. O., S. 250).

[2]) Besonders zu empfehlen ist die numerische Detaildurchrechnung der Umstände einer Eklipse, welche Matthiessen (Schlüssel zu Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, 2. Band, Köln-Wien 1873. S. 541 ff.) gegeben hat, zumal da dort auch die Bestimmung der Größe ρ_1 gezeigt wird. Die betreffende Mondfinsternis ist die aus der Geschichte des peloponnesischen Krieges bekannte vom 27. August 413, welche während der für die Athener verhängnisvoll gewordenen Belagerung von Syrakus sich ereignete.

sein. Für E_1 und E_3 sind die Bestrahlungsgrenzen, da ja die Sonne ein Parallelstrahlenbündel aussendet, durch die auf der Linie $E_1 E_3$ lotrecht stehenden Graden dar-

Fig. 131.



gestellt, und es ist beziehungsweise von der nördlichen Halbkugel derjenige Teil mit Schraffen ausgezeichnet, der auf der bestrahlten Seite gelegen ist. In E_1 ist das bestrahlte Nordsegment kleiner als das unbestrahlte; *ein der Nordhalbkugel angehöriger Ort wird infolge der Achsendrehung einen grösseren Weg innerhalb des dunklen als innerhalb des hellen Oberflächenteiles beschreiben, es ist folglich Winter.* In E_3 hingegen ist das beleuchtete Segment der nördlichen Halbkugel größer als das unbeleuchtete; *ein der Nordhalbkugel angehöriger Ort wird infolge der Achsendrehung einen grösseren Weg innerhalb des hellen als innerhalb des dunklen Oberflächenteiles beschreiben, es ist folglich Sommer.*

Die Linie $E_2 E_4$ ist als senkrecht zu $E_1 E_3$ stehend gedacht, obwohl dies in der Figur, welche auch aus dem Bahnkreise eine Ellipse macht, nicht zum Ausdrucke kommen konnte. Man bemerkt, daß dann, wenn der Erdmittelpunkt bezüglich mit E_2 und E_4 zusammenfällt, die Nord- und Südhalbkugel an der Bestrahlung und Nichtbestrahlung zu gleichen Teilen partizipieren; *jeder Erd-*

ort ohne Ausnahme verweilt gleichlange im bestrahlten und im nichtbestrahlten Teile der Oberfläche, es besteht Gleichheit von Tag und Nacht und es kennzeichnet — wenn man noch auf den die Bewegungsrichtung andeutenden Pfeil Rücksicht nimmt — *E_2 den Anfang des Frühlings, E_4* den *Anfang des Herbstes.* Hiermit ist also dargethan [1]), daß Jahreszeit und Tageslänge ausschließlich von der *Neigung der Erdachse gegen die Ebene der Erdbahn*, nicht aber etwa von der wechselnden Distanz zwischen Erde und Sonne abhängen [2]). Dieser Neigungswinkel ergänzt die uns bereits (von S. 69) bekannte Schiefe der Ekliptik zu 90°, ist also ungefähr gleich 66½°. Stünde die Erdachse senkrecht auf der Bahnebene, so gäbe es keinen Unterschied der Jahreszeiten oder schärfer ausgedrückt: *Für jeden beliebigen Punkt der Erde wäre der Tag mit dem Sommer, die Nacht mit dem Winter identisch, und die Erdpole, welche von den Sonnenstrahlen nur gestreift werden, wären ebenso zu ewiger Nacht wie zu ewigem Winter verurteilt.*

Unsere *astronomischen Jahreszeiten* aber haben diese Dauer: Vom 21. Dezember bis zum 21. März (Bogen $E_1 E_2$ der Figur) ist es *Winter*, vom 21. März bis zum 21. Juni (Bogen $E_2 E_3$) *Frühling*, vom 21. Juni bis zum 23. September (Bogen $E_3 E_4$) *Sommer*, vom 23. September bis zum 21. Dezember (Bogen $E_4 E_1$) *Herbst.* Nun leuchtet auch die Wahrheit des früher (S. 251) beweislos hingestellten Satzes ein, daß hinsichtlich der Jahreszeiten zwischen irgend einem Punkte der einen Halbkugel und seinem

---

[1]) Unsere Darstellung ist die in den Lehrbüchern übliche, und wir können nicht glauben, daß dieselbe eine didaktisch so minderwertige sein soll, wie Matz (Die Jahreszeiten, nach eigener Konstruktion dargestellt, Zeitschr. f. Schulgeographie, 7. Jahrgang, 3. Heft) behauptet. Allerdings aber ist auch nicht zu leugnen, daß die von Matz hier angegebene Abbildung der vier Hauptstellungen der Erde in horizontaler Projektion ihre Vorzüge hat und insbesondere die Ungleichheit von Tag und Nacht in den verschiedenen Jahreszeiten, sowie die Grenzlinie der Orte, für deren Horizont die Sonne nicht mehr auf- oder untergeht, recht gut hervortreten läßt.

[2]) Im VI. Abschnitte wird sich sogar herausstellen, daß die Erde im Winter der Sonne etwas näher als im Sommer steht.

Antöken- sowie Antipodenpunkte auf der anderen Halbkugel ein vollständiger *Gegensatz* obwaltet.

Schärfere Begriffe der Zeiteinteilung. Durch die Verbindung der beiden Thatsachen, daß die Erde die Sonne umkreist, daß aber der Widderpunkt, von dem aus wir (s. o. S. 135) astronomische Längen und damit auch indirekt die Zeiten zählen, kein wirklich *fixer* Punkt ist, muß es geschehen, daß der oben (S. 173) eingeführte Begriff *Jahr* verschiedene Formen annimmt, die wir nun auseinanderzuhalten haben. Bisher war nur vom tropischen Jahre die Rede; nunmehr haben wir die folgenden Zeiträume zu unterscheiden:

I. Siderisches Jahr, der Zeitraum zwischen zwei identischen Stellungen der Sonne zu dem nämlichen Fixsterne; die Dauer desselben ist unveränderlich [1]) und beträgt nach neuesten Festsetzungen [2]) $365^d\ 6^h\ 9^m\ 10{,}75^s$ (s. S. 177).

II. Tropisches Jahr, der zwischen zwei konsekutiven Durchgängen durch den Widderpunkt verstreichende Zeitraum; dieses Jahr muß, da der genannte Punkt der Sonne auf ihrer scheinbaren Bewegung entgegenkommt, kürzer als das siderische sein und umfaßt, wie bereits Hipparch (s. o. S. 625) sehr nahe richtig gefunden hatte, $365^d\ 5^h\ 48^m\ 46{,}08^s$.

III. Anomalistisches Jahr, das Intervall zwischen den zwei Momenten, in denen die mittlere Anomalie gleiche Werte annimmt, also auch zwischen zwei konsekutiven Durchgängen durch die Sonne und Aphelium [3]) verbindende Linie. Länger als das siderische, zählt das anomalistische Jahr $365^d\ 6^h\ 13^m\ 48{,}3^s$.

IV. Mondjahr, zwölf synodische Monate (s. u.) be-

---

[1]) Vorausgesetzt freilich, daß dem Sterne nicht etwa — s. u. Abschnitt IX — eine merkliche eigene Bewegung zukommt.

[2]) Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 79.

[3]) Wir nehmen diesen an die Stelle des Apogäums tretenden Begriff hier voraus, uns seine nähere Erörterung für den nächsten Paragraphen vorbehaltend.

greifend, das *Normaljahr orientalischer Völker,* gleich $354^d\ 8^h\ 48^m\ 34{,}8^s$.

Wegen des *bürgerlichen Jahres* ist zu vergleichen S. 77.

Die Zeitrechnung nach dem Monde führt in ähnlicher Weise zu verschiedenen Unterarten der allgemeinen Bezeichnung *Monat,* und zwar sind dies die folgenden:

I. Siderischer Monat, dem siderischen Jahre analog, $27^d\ 7^h\ 43^m\ 4{,}7^s$ zählend.

II. Synodischer Monat (s. o.), die Zeit von einem Neu- oder Vollmonde bis zum nächsten, gleich [1]) $29^d\ 12^h\ 44^m\ 2{,}9^s$.

III. Tropischer oder *periodischer Monat,* die Zeit, bis der Mond wieder zum Frühlingspunkte zurückkehrt, $27^d\ 7^h\ 43^m\ 4{,}7^s$.

IV. Anomalistischer Monat, dem anomalistischen Jahre nachgebildet, $27^d\ 13^h\ 18^m\ 35^s$.

V. Drakonitischer Monat, der Zeitraum zwischen zwei konsekutiven Durchgängen unseres Begleiters durch den aufsteigenden oder durch den absteigenden Knoten, $27^d\ 5^h\ 5^m\ 49^s$.

VI. Sonnenmonat (uneigentlicher, weil nicht vom Monde vorgezeichneter Monat), die Zeit, welche die Sonne bei ihrem scheinbaren Jahreslaufe — in Wahrheit also die Erde, von der Sonne aus gesehen — in jedem Zeichen des Tierkreises verweilt, $30^d\ 10^h\ 29^m\ 37^s$.

Im Jahre 433 fand der Athener Meton [2]) den wichtigen Satz auf: *Neunzehn tropische Jahre sind fast ganz*

---

[1]) Mit übertriebener Genauigkeit setzt Coppernicus (a. a. O., S. 199) die Länge eines solchen Monates gleich 29 Tagen $31^{I}\ 50^{II}\ 80^{III}\ 9^{IV}\ 18^{V}$; die Einteilung ist die sexagesimale, so daß also nach ihr dem Tage $(60^5)^V$ zukommen. Solcher „Ziffernprunk" ohne sachliche Berechtigung war im Mittelalter überaus beliebt (Mädler, Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 101).

[2]) E. Biot (Études sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise, Paris 1862) ist geneigt, in den Metonschen Zahlen einen Nachhall altchinesischer Interpolationsmethoden zu erblicken. Vgl. auch Redlich, Der Astronom Meton und sein Zyklus. Hamburg 1854.

genau gleich 235 synodischen Monaten. Wie diese Entdeckung zustande kam, ist für uns in Geheimnis gehüllt; ein moderner Rechner aber führt den Beweis dadurch, daß er den das Verhältnis beider Zeiträume ausdrückenden echten Bruch in einen Kettenbruch (s. o. S. 657) verwandelt. So wird

$$\frac{29,53059}{365,24220} = 1:[12+1:[2+1:[1+1:[2+1:[2+\ldots];$$

die Näherungswerte hiervon sind $\frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37}, \frac{8}{99}, \frac{19}{235}$. Letzterer Bruch entspricht also den von Meton für die Reform des athenischen Kalenders verwerteten Zahlen, während die weit minder genaue Annahme, daß 8 tropische Sonnenjahre mit 99 synodischen Mondmonaten sich deckten, die Grundlage für die von Calippus[1]) eingeführte *Oktaëteris* gebildet hatte.

Die Planetenbewegung nach der Erklärung des Coppernicus. Wir werden nunmehr zu zeigen haben, daß alle die verwickelten Bewegungen der Wandelsterne sich ungemein viel einfacher übersehen und erklären lassen, wenn wir uns auf den Coppernicanischen Standpunkt stellen, d. h. *wenn wir den Beobachter von der Erde weg auf die Sonne versetzen.* Die allernächste Folge davon ist, daß die Begriffe *Erdnähe* und *Erdferne* (s. S. 626), bei deren Festsetzung die Sonne als der sich bewegende Körper galt, sich in *Sonnennähe oder Perihelium* und *Sonnenferne oder Aphelium* (eigentlich *Apohelium*) verwandeln müssen. Dabei ist zunächst noch, ganz im Sinne Coppernics, an dem exzentrischen Kreise festgehalten, in dessen — für jeden einzelnen Planeten verschiedenem — Mittelpunkte die Sonne selbst nicht steht. Der nächste Abschnitt wird ergeben, welchen Sinn die erwähnten Ausdrücke infolge der Keplerschen Neuerungen annehmen. Die Verbindungslinie zwischen Sonnennähe und Sonnenferne verbleibt die *Apsidenlinie* der Planeten-

[1]) Wolf, Gesch. d. Astr., S. 16.

bahn. Besitzen zwei Planeten, von denen der eine also natürlich die Erde sein kann, die nämliche Rektaszension, so sagt man, sie stehen in *Konjunktion* (Zeichen ☌); beträgt die Rektaszensionsdifferenz 90°, so sagt man, sie stehen in *Quadratur* (Zeichen □); beträgt endlich die Rektaszensionsdifferenz 180°, so sagt man, sie stehen in *Opposition* [1]) (Zeichen ☍). Für die gegenseitigen Stellungen irgendwelcher Wandelsterne unter sich und gegenüber dem Zentralkörper bedient man sich der Bezeichnung *Aspekten*.

Dass die heliozentrische Theorie völlig die gleichen gegenseitigen Stellungen von Erde und Wandelstern er-

Fig. 135 a.

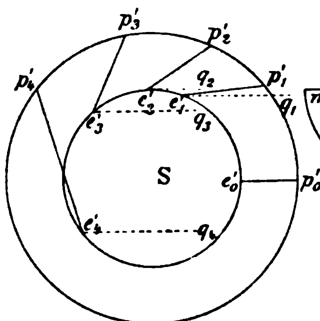
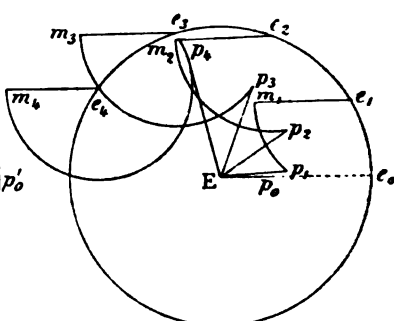


Fig. 135 b.



gibt, wie die Epizykeln, wird durch nachfolgende Betrachtung ersichtlich gemacht [2]). In *Fig. 135a* sehen wir S, die Sonne, in *Fig. 135b* sehen wir E, die Erde, als gemeinsames Zentrum der Planetenbahnen vor uns. Betrachten wir zunächst die Verhältnisse, wie sie uns *Ptolemaeus* vorführt. e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 sind fünf äquidistante Mittelpunkte des Epizykels, den der Planet p beschreibt;

[1]) Die Oppositionsstellung des Mondes ward oben (S. 662), im Einklange mit dieser Bestimmung, dadurch gefunden, daß man die von der Sonne auf die Erdbahn gefällte Lotlinie über jene hinaus bis zum Durchschnitte mit der Bahn des Mondes verlängerte.

[2]) Hübsch entwickelt den Sachverhalt H. J. Kleins „Pop. astr. Enzyklopädie“ (S. 120 ff.).

diese fünf Punkte liegen also auf der Peripherie des Deferenzkreises. Die Radien $e_0 p_0$ — dieser soll durch den Mittelpunkt E hindurchgehen —, $e_1 m_1$, $e_2 m_2$, $e_3 m_3$, $e_4 m_4$ sind einander parallel, und die Planetenstellungen sind so gewählt, daß arc $m_2 p_2 = 2$ arc $m_1 p_1$, arc $m_3 p_3 = 3$ arc $m_1 p_1$, arc $m_4 p_4 = 4$ arc $m_1 p_1$ ist. Alsdann sind Ep_0, Ep_1, Ep_2, Ep_3, Ep_4 nach Lage und Größe die *geozentrischen Distanzen* des Planeten p. In *Fig. 135a* dagegen soll der innere Kreis um S die Bahn der Erde, der äußere die eines — oberen — Planeten darstellen, $e_0' p_0'$ soll gleich und parallel oder, wie man sich in der Geometrie kurz ausdrückt[1]), *äquipollent* ($\#$) zu $e_0 p_0$ sein. Gleicherweise ist es nicht schwer, versuchsweise auf dem inneren Kreisumfange die Punkte e_0', e_1', e_2', e_3', e_4' versuchsweise so auszuwählen, daß erstens

$$e_0' p_0' = Ep_0,\ e_1' p_1' = Ep_1,\ e_2' p_2' = Ep_2,\ e_3' p_3' = Ep_3,\ e_4' p_4' = Ep_4,$$

und daß zweitens, wenn noch die Linien $e_1' q_1$, $e_2' q_2$, $e_3' q_3$, $e_4' q_4 \parallel e_0' p_0'$ gezogen werden,

$$\sphericalangle p_1' e_1' q_1 = \sphericalangle p_1 E p_0,\ \sphericalangle p_2' e_2' q_2 = p_2 E p_0,$$
$$\sphericalangle p_3' e_3' q_3 = p_3 E p_0,\ \sphericalangle p_4' e_4' q_4 = \sphericalangle p_4 E p_0$$

wird. Dann aber ist

$$e_0' p_0' \# Ep_0,\ e_1' p_1' \# Ep_1,\ e_2' p_2' \# Ep_2,\ e_3' p_3' \# Ep_3,\ e_4' p_4' \# Ep_4,$$

und damit ist ausgesprochen, dass vom geometrischen Standpunkte aus beide Annahmen, die geo- und die heliozentrische, gleich möglich sind. Welches freilich die einfachere und mechanisch natürlichere sei, bedarf wohl keiner Hervorhebung.

Das *Stationärwerden* eines Planeten und die *Umkehr des Bewegungssinnes* (s. S. 631) erläutern wir[2]) an der

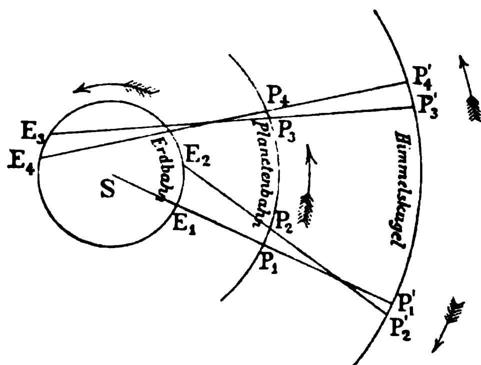
---

[1]) Name und Ausbildung des Aequipollenzenkalkuls stammen von Bellavitis (Ann. delle scienze del regno lombardo-veneto, 7. und 8. Band).

[2]) Newcomb-Engelmann, Pop. Astr., S. 51. Die bezügliche Darstellung im Originalwerke des Coppernicus muß

Hand von *Fig. 136*. Wir sehen drei Kreise mit dem gemeinsamen Zentrum S (Sonne) vor uns; der innerste entspricht der Erdbahn, der mittlere einer Planetenbahn, der äussere der Himmelskugel, auf die wir unwillkürlich alle Bewegungen projizieren, und die wir, bei der ungeheuren Entfernung der Fixsterne (s. u.), als um S be-

Fig. 136.



schrieben annehmen dürfen. Die Pfeile kennzeichnen die Bewegungsrichtung für Erde und Planeten. E_1, E_2 seien zwei wenig entfernte Erdpositionen; die entsprechenden Planetenstände seien P_1, P_2, so daß etwa S, E_1, P_1 in grader Linie liegen. Da die Erde sich rascher bewegt, als der Planet, so schneiden sich die Gesichtslinien $E_1 P_1$ und $E_2 P_2$ jenseits der Erdbahn; wenn also P_1' und P_2' die Projektionspunkte sind, so scheint sich für den an die Erde gefesselten Beobachter der Planet von P_1' nach P_2', also *rückläufig*, zu bewegen, während ein auf der Sonne befindlicher Beobachter die Dinge sieht, wie sie wirklich sind. Späterhin legt die Erde den Bogen $E_3 E_4$, der Planet den Bogen $P_3 P_4$ zurück; der Durchschnitt der Visierlinien erfolgt innerhalb der Erdbahn, und dem-

---

man nicht ohne Mühe aus ihren einzelnen Bestandteilen (S. 271 ff.) sich zusammensuchen.

gemäß vollzieht sich die Durchwanderung des Projektionsbogens $P_3'P_4'$ *rechtläufig*. Fallen die Gesichtslinien aber parallel aus, so bedeutet dies, daß es nicht zwei Projektionspunkte gibt, sondern daß nur ein einziger vorhanden ist, mit anderen Worten, der Planet *scheint stillzustehen*, ist stationär.

Graphische und instrumentelle Darstellungen. Von jeher sind mehr oder minder gelungene Versuche gemacht worden, Diagramme herzustellen, welche dem Coppernicanischen Systeme entsprechen und es dem höherer Rechnung Unkundigen ermöglichen sollen, *zeichnend* Planetenörter aufzufinden, während dieselben sonst aus den Tafeln berechnet werden müssen. In den vierziger Jahren lieferte Eichstrom achtungswerte Versuche dieser Art für bestimmte Jahrgänge [1]; neuerdings aber haben besonders Nell [2] und Thurein [3] diese graphische Methode so verbessert, daß jeder Liebhaber der Sternkunde auf solche Weise Bestimmungen zu machen sich befähigt sieht.

Maschinelle Vorrichtungen zu gleichem Zwecke datieren schon aus früher Zeit; Apians mühsam ausgedachter Mechanismus [4] brachte freilich dem Entdecker von Keplers Seite [5] nur das zweifelhafte Lob einer *„miserabilis industria“* ein, weil natürlich die eigentliche Absicht, den astronomischen Kalkul durch bloßes Drehen von Scheiben zu ersetzen, an und für sich unrealisierbar ist. Im Sinne der *Coppernicanischen Weltordnung* erstellten solche, durch Uhrwerk bewegbare *Planetolabien* oder *Orrerys* — die Entstehung dieses Namens ist nicht recht aufgeklärt —

[1] Den erläuternden Text zu seinen Diagrammen veröffentlichte Eichstrom in Stuttgart (1846, 1847).

[2] Nell, Der Planetenlauf, eine graphische Derstellung der Bahnen der Planeten, Braunschweig 1861.

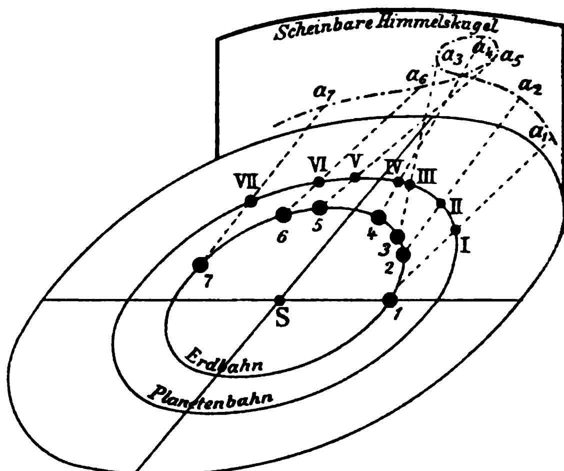
[3] Thurein, Elementare Darstellung der Planetenbahnen durch Konstruktion und Rechnung, Berlin 1886.

[4] Das „Astronomicum Caesareum“ Apians (Ingolstadt 1540), Kaiser Karl V. gewidmet, bleibt trotz Keplers tadelnder Bemerkung ein Denkmal echten deutschen Gelehrtenfleißes.

[5] Wolf, Gesch. d. Astr., S. 267.

Grammatici und Graham[1]); auch aus neuerer Zeit liegen Mechanismen zur Verdeutlichung planetarischer Bewegungen vor[2]), die natürlich nur didaktische Tendenzen verfolgen können. Wahrscheinlich jedoch erreicht man

Fig. 137.



diesen Zweck besser durch den sehr einfachen Apparat Joh. Müllers[3]) (*Fig. 137*). Drei kreisförmige Drähte sind um ein gemeinsames Zentrum herum so ausgespannt.

---

[1]) Nachrichten über diese älteren Arbeiten erteilt Mädler (Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 411; 2. Band. S. 524).

[2]) Ein komplizierter und kostspieliger Apparat ist der, den Rittenhouse (A Description of a new Orrery, Transact of the Amer. Phil. Society, 1. Band. S. 1 ff.) beschrieb; er sollte auch die Präzession anzeigen. Andere hierher gehörige Schriften sind: van Swinden, Beschreibung eines Planetariums, Leipzig 1807; Gelpke, Kurze Darstellung des Weltgebäudes, nebst Anleitung zum Gebrauche seines Planetarii, Braunschweig 1809; Garthe. Beschreibung des Kosmoglobus, München 1830.

[3]) J. Müller, Lehrbuch der kosmischen Physik, Braunschweig 1875. S. 141 ff.

daß sie ziemlich in dieselbe Ebene zu liegen kommen; der erste Kreis stellt die Erdbahn, der zweite eine Planetenbahn, der dritte den Durchschnitt der Ekliptik mit der scheinbaren Himmelskugel vor, welch letztere am Rande des Drahtes durch ein zylindrisches Blechstück versinnlicht ist. Die dicken Kugeln *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* entsprechen sieben Erd-, die dünnen Kugeln *I, II, III, IV, V, VI, VII* ebensovielen zugehörigen Planetenständen, und gradlinige Verbindungsdrähte bezeichnen auf dem Bilde der Himmelskugel die sieben Projektionspunkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, durch die eine Kurve, die *scheinbare geozentrische Planetenbahn*, hindurchgezeichnet ist. Je nach der den großen und kleinen Kügelchen angewiesenen Stellung weist diese Kurve Schleifen, recht- und rückläufige Strecken und stationäre Punkte auf.

V. Später erdachte Beweise für die tägliche und jährliche Bewegung der Erde.

Sein neues System durch *wirkliche Beweise* von durchschlagender Kraft zu stützen, war Coppernicus selbst erklärlicherweise noch nicht in der Lage; er musste sich darauf beschränken, die neuen Wahrheiten nach Möglichkeit *einleuchtend zu machen*. Hören wir, wie er dabei zu werke ging.

Die eigene Begründung des Coppernicus. Er geht davon aus, dass die Grösse der Erdkugel, verglichen mit derjenigen der Himmelskugel, eine verschwindende sei, da ja (s. o. S. 205) in den allermeisten Fällen der theoretische Unterschied zwischen wahrem und falschem Horizont praktisch jede Bedeutung verliere [1]). Da sei es denn doch viel weniger befremdend, der kleinen Erde als der unermeßlichen Fixsternsphäre — deren Realität ja der Reformator (s. o. S. 615) noch anerkennt — einen vierundzwanzigstündigen Achsenumschwung beizulegen.

[1]) Coppernicus-Menzzer, S. 16 ff.

Die Meinung der Alten[1], dass die Bewegung der Erde in der ruhenden Atmosphäre einen merkbaren Luftzug, einen Gegenwind, hervorbringen müsse, wird einfach mit dem Hinweise darauf widerlegt[2], dass die Lufthülle zur Erde selbst als deren integrierender Bestandteil gehöre, somit also auch an jeder Bewegung des Erdkörpers Anteil nehmen müsse. Alle Bewegungen seien relative, und aus der scheinbaren täglichen Bewegung aller Sterne dürfe man ebensowenig auf die wirkliche schliessen, wie dies der Schiffer thue, der, ruhig auf seinem Verdecke stehend, die Dinge am Ufer an sich vorüberfliegen sehe[3]). Alle die Gründe, welche noch heute in unseren Lehrbüchern vorgetragen zu werden pflegen, um die Umdrehung des Himmels als Sinnestäuschung erscheinen zu lassen, sind bereits von Coppernicus vorweggenommen worden.

Minder überzeugend ist, was für die zentrale Stellung der Sonne und für die Planetennatur der Erde angeführt ist, obwohl es zweifelsohne das beste, ja einzige ist, was in dieser Hinsicht *damals* angeführt zu werden vermochte. Im wesentlichen geht Coppernicus, ganz im Sinne des vorletzten Paragraphen unseres vierten Abschnittes, darauf aus, darzuthun, daß seine Annahme eine ungleich einfachere Uebersicht über die Bewegungen der Wandelsterne gewährt, als diejenige des Ptolemäus; sein „Beweis von der dreifachen Bewegung der Erde“[4] — wegen der dritten Bewegung vgl. o. S. 646 — zeigt somit nur, daß die Sache so *sein kann*, wie er für wahr hält, nicht jedoch, daß sie so *sein muss*.

Die Beweise für die Achsendrehung im allgemeinen. Erst der Folgezeit war es vorbehalten, solche *Beweise* dafür, daß die Erde sich wirklich um ihre Achse

---

[1]) Dieser selbsterhobene Einwand ist von Coppernicus dem Ptolemäischen Almagest (lib. I, cap. 7) entnommen worden.
[2]) Coppernicus-Menzzer, S. 19.
[3]) Mit Glück wird hier auf die bekannte Stelle der Vergilischen Aeneide (3. Gesang, 72. Vers) hingewiesen.
[4]) Coppernicus-Menzzer, S. 28 ff.

drehe, zu erbringen. Wir stellen dieselben im folgenden zusammen, und zwar fassen wir zuerst die *Fallversuche*, nachher die *Pendelversuche* und an dritter Stelle diejenigen Erscheinungen ins Auge, welche aus der *Richtungsablenkung horizontaler Bewegungen* resultieren. Diese drei Beweisgruppen allein können als wissenschaftlich zuverlässig erachtet werden[1]); manch anderer angebliche Beweis ist nur bedingt als richtig anzuerkennen, wenn er nämlich anderweite Voraussetzungen benötigt, über welche selbst noch keine ganz vollkommene Klarheit herrscht[2]).

Ganz zu verwerfen ist der leider noch immer in manchen populären Werken zu findende Hinweis auf die Achsendrehung der anderen Planeten. Ganz abgesehen davon, daß ohne Fernrohr dieser „Beweis" gar nicht hätte aufgefunden werden können, leidet er auch

---

[1]) Hierher möchten wir z. B. manche Argumente zählen, welche nach R. Wolfs biographischer Schrift „Zur Erinnerung an Hans Heinrich Denzler" (Basel 1874) dieser schweizerische Mathematiker geltend gemacht haben soll: „Das Voreilen sinkender, das Zurückbleiben steigender Wolken, welche in Zonen von geringerer Umdrehungsgeschwindigkeit gelangen, die an der Ostseite am stärksten hervortretende Verwitterung von Gesteinen, endlich sogar die Ostabdachung der Kontinente und das langsame Wandern der magnetischen Abweichung gegen Westen." Letzteres z. B. ist doch bekanntlich kein progressives, sondern nur ein periodisches.

[2]) Die Abplattung und ellipsoidische Gestalt der Erde (siehe S. 338) war dann eine Notwendigkeit, wenn die anfänglich kugelförmige, in einem irgendwie flüssigen Aggregatzustande befindliche Masse eine Rotation besaß. Allein so sichergestellt ist eben die freilich recht natürlich erscheinende kosmogonische Hypothese von Kant-Laplace (s. S. 367) noch nicht, um eine Umkehrung des obigen Satzes zu gestatten und aus der Abplattung heraus die Notwendigkeit der Achsendrehung konstruieren zu lassen. — Ein ganz geistvoller Versuch ist ferner derjenige Meibauers (Die physische Beschaffenheit des Sonnensystemes, Berlin 1872. S. 81 ff.), die täglichen Barometerschwankungen als eine unmittelbare Konsequenz der Erdbewegung erscheinen zu lassen. Allein damit dieser Beweis einen Sinn habe, muß man mit dem genannten Autor glauben, daß der ganze Weltraum von wirklicher atmosphärischer Luft, freilich im Zustande alleräußerster Verdünnung, erfüllt sei, und diese gewagte Hypothese dürfte nur wenige Anhänger zählen. — Wegen der vielfach behaupteten Einwirkung der Erdrotation auf die Pflanze vgl. 3. und 5. Jahrgang der Zeitschrift „Gäa".

noch an dem schwer wiegenden Uebelstande, dass er die Erde zum Planeten stempelt, während an der Stelle, an der er vorkommt, die Gleichartigkeit unseres Wohnkörpers mit den die Sonne umkreisenden Gestirnen noch gar nicht erwiesen ist.

Zum Glück jedoch gibt es auch strenge Beweise von mathematischer Ueberzeugungskraft. Wir wollen dieselben nunmehr kennen lernen [1]).

Ablenkung beim freien Falle. Die Anregung dazu, durch *Fallversuche* die Umdrehung der Erde sinnenfällig zu machen, ging von Newton aus [2]), der auf diese Weise die Einwürfe der Gegner direkt in Zugeständnisse umzuwandeln gedachte. Ein besonders beliebtes, auch von Riccioli unter seinen 77 Gegengründen (s. o. S. 619) an die Spitze gestelltes Argument war das [3]): Dreht sich die Erde von West nach Ost um ihre Achse, so muß ein von der Spitze eines Turmes herabgeworfener Stein westlich vom Fuße herabfallen, und das wird durch den

---

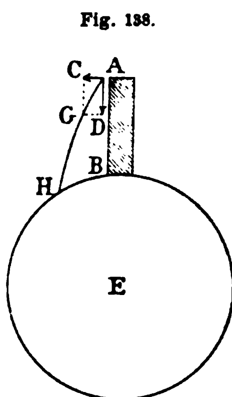
[1]) Benutzt sind dabei die beiden Abhandlungen von Th. Gilbert (Les preuves mécaniques de la rotation de la terre, Bull. de sciences math. et astron., (2) 6. Band. S. 189 ff.) und dem Verf. dieses (Die sichtbaren und fühlbaren Wirkungen der Erdrotation, Humboldt, 1. Jahrgang. S. 328 ff. S. 359 ff.). Sehr wichtig ist ferner eine Dissertation von Kamerlingh Onnes (Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der Aarde, Gröningen 1879).

[2]) Das wenige, was über dieses älteste Stadium der Geschichte der Fallversuche bekannt ist, steht in Birchs „History of Royal Society" (1. Band, London 1756); in ziemlich wörtlicher Uebersetzung hat Benzenberg diese Notizen in seine „Versuche über die Umdrehung der Erde" (Dortmund 1804. S. 262 ff.) aufgenommen. Uebrigens erzählt Poggendorff (Gesch. d. Phys., S. 303), daß Gassendi, um ein Analogon für die Kombination von Erd- und Fallbewegung zu erhalten, schon viel früher, nämlich im Jahre 1627, von den Mastkörben schnellsegelnder Schiffe schwere Körper habe herabfallen lassen.

[3]) Man liebte es — sogar ein Tycho Brahe scheute davor nicht zurück —, diesem Argumente auch die Form zu geben, daß man sagte, ein von seinem Neste auffliegender Vogel könne das unter ihm weggleitende nicht mehr beim Herabfliegen erreichen, weil die Rotationsgeschwindigkeit die Schnelligkeit des Vogelfluges so weit übertreffe.

Augenschein nicht bestätigt. Versuche, auf dem uns schon (S. 219) bekannten schiefen Turme von Bologna von Riccioli im Jahre 1640 angestellt, lehrten eher das Gegenteil. Daran knüpfte Newton an, indem er die folgende Ueberlegung anstellte. *E (Fig. 138)* ist der Mittelpunkt der Erde, ihr Aequator stimmt mit dem um *E* beschriebenen Kreise überein. In einem Punkte *B* des Aequators erhebt sich der Turm *AB*, von dessen Spitze *A* ein Stein hinabfällt. Unter *r* den Erdhalbmesser verstanden, hat *B* die lineare Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{2r\pi}{T}$, wo *T* die Umdrehungsdauer bedeutet; dem Punkte *A* dagegen, der um *h* von *B* absteht, kommt ebenso die lineare Geschwindigkeit $\frac{2(r+h)\pi}{T}$ zu, so daß also *A* vor *B*

Fig. 138.



$$\frac{2(r+h)\pi}{T} - \frac{2r\pi}{T} = \frac{2h\pi}{T}$$

voraus hat. Auf den aus *A* fallenden Körper wirken somit im Beginne der Bewegung zwei Impulse, nämlich horizontal $AC = \frac{2h\pi}{T}$ und vertikal $AD = g$[1]). Unter dem Einflusse beider Antriebe wird der Körper in der ersten Zeiteinheit die Diagonale *AG* des Parallelogrammes *ACGD* und weiterhin wieder eine schwach gekrümmte Linie beschreiben[2]), welche dem Erdboden in *H*, *östlich* von *B*, begegnet. Daraus folgt aber:

[1]) *g* bedeutet wiederum die Fallkonstante, d. h. die Beschleunigung der Schwere unter dem Aequator und in der Meereshöhe Null. Unter der Breite φ tritt $r \cos \varphi$ an die Stelle von *r*.

[2]) Die fragliche Kurve, welche Hooke für eine Ellipse, Newton für eine Spirale hielt, sollte nach der Meinung von

Ein frei fallender Körper muss auf der von West nach Ost rotierenden Erde östlich von dem vertikal unter dem Ausgangspunkte gelegenen Punkte niederfallen.

Nur das Experiment konnte zur Bestätigung oder Widerlegung dieser theoretisch erkannten Thatsache dienen. Hooke, der Experimentator der Londoner Gesellschaft (s. o.) stellte solche Versuche an einem der Londoner Paulstürme an und fand auch eine südöstliche Ablenkung, welche jedoch zu wenig konstant war, um ein sicheres Urteil zu ermöglichen. Was damals unentschieden blieb, suchte 112 Jahre später Guglielmini in Bologna zu erreichen, und seine hierauf bezügliche Schrift [1]) beweist, daß er von seiner Aufgabe und deren großen Schwierigkeiten eine ganz richtige Vorstellung besaß; leider aber lieferten auch diese Versuche kein überzeugendes Resultat. Dieses ergab sich vielmehr erst durch die im Turme der St. Michaelskirche zu Hamburg vorgenommenen Fallversuche Benzenbergs (s. o.), bei denen alle erforderlichen Vorbereitungen getroffen waren. Der genannte Physiker begnügte sich nicht mit den Versuchen im Turme, sondern wir verdanken ihm noch eine zweite Versuchsreihe aus den Kohlenbergwerken von Schlebusch in Westfalen [3]), und zwar war bei diesen Sorge getragen, daß durch Zudeckung des Schachtes zwar nicht der Widerstand der ruhenden Luft, aber doch die störende Eigenbewegung der im Schachte abgesperrten Luftsäule möglichst beseitigt wurde. Nach Laplace [4])

Olbers eine *doppelt gekrümmte* sein. In einem Briefe an letzteren (s. Benzenberg, S. 349) wies aber Gauß die *südliche Ablenkung* als lediglich vom Luftwiderstande bedingt nach. Ursprünglich hatte Gauß die Ansicht gehabt, daß die Falllinie eine Raumkurve sein müsse, aber eine analytische Betrachtung vergewisserte ihn vom Gegenteile (s. u.).

[1]) Die Fallhöhe, welche Hooke zur Verfügung stand, betrug nur 27 engl. Fuß, und bei einer solchen mußte die östliche Abweichung des Auftreffpunktes, wie die Theorie zeigt, minimal ausfallen, nämlich etwa gleich ¼ Linie.

[2]) Guglielmini, De diurno terrae motu experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum, Bologna 1792.

[3]) Benzenberg, a. a. O., S. 403 ff.

[4]) Das aus Laplaces „Essai philosophique sur les proba-

folgt aus den Benzenbergschen Experimenten für die Achsendrehung der Erde eine Wahrscheinlichkeit $= \frac{7999}{8000}$. Uebrigens hat Reich im Freiberger Dreibrüderschachte eben diese Versuche mit sehr großer Fallhöhe wiederholt und dabei Ergebnisse erzielt, welche sich ebenfalls nur zu gunsten der uns bekannten Annahme deuten lassen [1]).

Es kommt vor allem darauf an, das Fallen der zum Versuche ausgewählten Kugeln so zu bewirken, daß der Schwerpunkt der letzteren stets in der nämlichen Vertikalebene verbleibt. Zu dem Ende hatten Guglielmini und Benzenberg eigenartige Zangen konstruiert, in welche der die Kugeln tragende und dann abgebrannte Faden eingeklemmt wurde. Um die Auftreffstelle genau zu erkennen, bediente man sich eines mit Wachs überzogenen Brettes, auf welchem nach n Versuchen gewöhnlich n verschiedene Eindrücke sichtbar waren; dachte man sich jeden dieser n Punkte mit gleichen Gewichten beschwert und suchte den Schwerpunkt des Systemes auf, so konnte dieser als der relativ wahrscheinlichste Fallpunkt angesehen werden. Vielleicht würde es sich noch mehr empfehlen, als Auffangfläche eine Elfenbeinplatte und als Fallkörper gleichmäßig berußte Elfenbeinkugeln zu wählen, denn dann würden [2]) auf ersterer n fast kongruente

bilités" (Paris 1820) entnommene Resultat teilt Birnbaum (Grundzüge der astronomischen Geographie, Leipzig 1862. S. 83) mit. Laplaces eigene analytische Behandlung des allgemeinen Fallproblemes enthält sein im Prärialhefte des Jahres XI der Republik des „Bulletin de la société philomathique" abgedrucktes „Mémoire sur le mouvement d'un corps qui tombe d'une grande hauteur".

[1]) Reich, Fallversuche über die Umdrehung der Erde, Freiberg 1832.

[2]) Wenn eine elastische Kugel durch Stoß mit einer Ebene aus gleichfalls elastischem Stoffe zu vorübergehender Berührung kommt, so drückt sich erstere auf letzterer platt, um sodann rasch wieder die ursprüngliche Gestalt anzunehmen, und als sichtbares Zeichen dieser Gestaltveränderung bleibt eben, wenn man die Kugel geschwärzt hat, ein dunkler, wenn man dagegen die Platte geschwärzt hat, ein weißer Kreis übrig. Die Zeit, während deren der Vorgang sich abspielt, ist trotz ihrer Kürze doch be-

schwarze Kreise entstehen, deren jeweiliges Zentrum mit größter Schärfe den Punkt des jedesmaligen Auftreffens markierte.

Die Größe der östlichen Abweichung der Auffallpunkte gegenüber der den Erdmittelpunkt mit dem Ausgangspunkte verbindenden Graden fand, wenn unsere obigen Bezeichnungen, in Geltung verbleiben, Olbers[1]) gleich

$$\frac{4\pi \cos \varphi}{3T}\, t\left(h - \frac{1}{2}\,\delta\right);\ \delta = gt^2 - h;\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Hier sind zwei Bestimmungsgleichungen für t und δ vorhanden; setzt man diese Werte entsprechend ein, so wird die östliche und südliche Ablenkung resp.

$$a_0 = \frac{2\pi h \cos \varphi}{3T}\sqrt{\frac{2h}{g}};\ a_s = \frac{\text{Konst. } h \sin 2\varphi}{g}.$$

Allein diese letztere Formel für a_s kann, wie Weihrauch[2]) mit Recht hervorhebt, unmöglich richtig sein, weil ja Konstans und sin 2φ reine Zahlen sind, und weil somit eine *lineare Grösse* von der Dimension (1 — 1 =) 0 sein würde. Unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen hat unlängst Lorenzoni[3]) die Koordinaten des Auftreffpunktes berechnet; diese Darstellung dürfte zur Zeit wohl als die am meisten erschöpfende zu gelten haben. Wenn man die Erde als Ellipsoid betrachtet, so ergibt sich auch die oben erwähnte *südliche Ablenkung*, die auf einer kugelförmigen Erde nicht vorhanden ist, wie dies noch durch Helmert[4]) in Bestätigung des älteren Gaußschen

---

stimmbar; vgl. Schneebeli, Experimentaluntersuchungen über den Stoß elastischer Körper, Repert. d. Physik, 22. Band. S. 183 ff.

[1]) Die von Olbers entwickelte Formel reproduziert Benzenberg (a. a. O., S. 382).

[2]) Weihrauch, Ueber die Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Vertikalen, Meteorol. Zeitschr., 2. Jahrgang. S. 27 ff.

[3]) Lorenzoni, Sulla deviazione dal piede della verticale di un grave liberamente caduto, Venedig 1889. Die Formel ist zunächst für Versuche in Schächten berechnet.

[4]) Helmert, Ueber die südliche Ablenkung beim freien Falle, Meteorolog. Zeitschr., 2. Jahrgang. S. 312.

Resultates nachgewiesen wurde. Im ersteren Falle ist nämlich die vom niederfallenden Körper beschriebene Trajektorie ein sogenannter *kubischer Kegelschnitt* [1]), eine Raumkurve dritter Ordnung [2]).

Foucaults Pendelversuch. Obwohl die Fallversuche einen für jeden Sachkundigen überzeugenden Thatbeweis für die Wahrheit des ersten Coppernicanischen Hauptsatzes erbringen, so kann man doch nicht sagen, daß dieser Beweis ein sehr *augenfälliger* sei. Ungleich besser gelingt letzteres mit jenem merkwürdigen Pendelversuche, der, obwohl vielleicht schon früher ähnliches bemerkt worden ist [3]), doch zweifellos von Léon Foucault in

---

[1]) Wir kennen das angeblich von dem amerikanischen Analytiker Price gewonnene Resultat nur aus einer Notiz von Heis (Wochenschr. f. Astr., Meteorol. u. Geogr., [2] 6. Jahrgang. S. 184). Die Natur der in Rede stehenden Kurven lernt man kennen aus v. Drachs „Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte" (Leipzig 1867).

[2]) Mit der Lehre vom freien Falle steht diejenige vom *lotrechten Wurfe* in allernächster Verbindung und so hat man denn auch durch Versuche mit *senkrecht in die Höhe gechossenen Kugeln* die Erdumdrehung zu demonstrieren gesucht. Mersenne (vgl. Kästners Anfangsgründe der Mechanik fester Körper, Göttingen 1793. S. 53) und Furttenbach (Halinitro-Pyrobolia oder Beschreibung von der Büchsenmeisterey, Ulm 1627) sind in diesem Sinne vorgegangen, ohne freilich viel zu erreichen, weil mehrenteils das Projektil gar nicht mehr aufgefunden werden konnte. Der vierte Band der „Observations curieuses sur toutes les parties de la physique" (Paris 1771) enthält ebenfalls Berichte über Schießversuche der bezeichneten Art. Eingehend prüft die Frage d'Alembert (Sur le mouvement des corps pesans, en ayant égard à la rotation de la Terre, Hist. de l'acad. royale des sciences, 1771. S. 10 ff.; s. auch dessen Opuscules Mathématiques, 7. Band, Paris 1767. S. 327). Er findet, daß für $\varphi = 0$ einer Anfangsgeschwindigkeit von 900′ eine Ablenkung von der Vertikalen im Betrage von 60′ entsprechen müsse. Bei der oben zitierten Diskussion im Schoße der k. englischen Gesellschaft regte der berühmte Baumeister Wren die Frage an, ob unter der Voraussetzung, daß der Kanonenlauf eine gewisse Neigung gegen den Horizont habe, das Geschoß wieder in ihn hineinfallen könne, und der Astronom Flamsteed war der Meinung, dieser Neigungswinkel müsse $= 87^{\circ}$ sein.

[3]) In den Sitzungsberichten der phys.-med. Sozietät zu Erlangen vom 26. Mai 1873 hat der Verf. eine „Vorgeschichte des

der uns heute geläufigen Form erdacht und erstmalig beschrieben wurde [1]). Das Wesen des Versuches erläutert uns am besten der in *Fig. 139* zur Anschauung gebrachte Spezialfall.

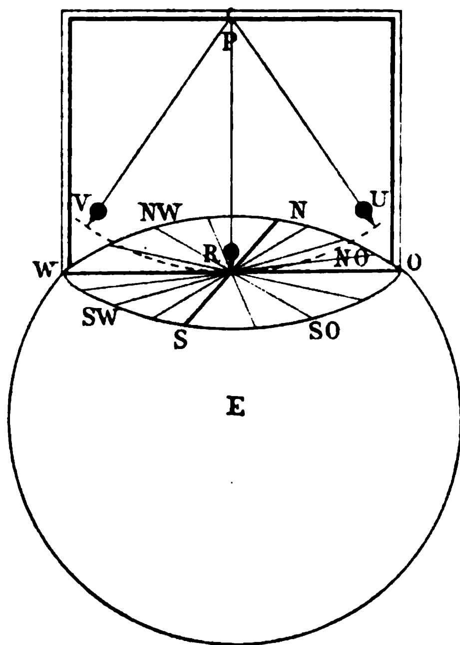
E ist der Mittelpunkt der Erdkugel; unmittelbar an einem der Erdpole denken wir uns einen Kreisschnitt senkrecht zur Achse gelegt und in dem so entstandenen Kreise — die Kalotte soll abgehoben sein — eine Strichrose mit dem Mittelpunkte *R* verzeichnet. An einem zweckmäßig angebrachten Gestelle ist ein Fadenpendel *PR* so aufgehängt, daß er in seiner Ruhelage mit der Richtung der Erdachse zusammenhängt. Man lässt nun dieses Pendel *PR* Schwingungen in der durch den Ost- und Westpunkt unserer Rose hindurch gehenden Ebene machen; *PU* und *PV* sind die äussersten Lagen, in welche das Pendel zu gelangen vermag, so dass also $\sphericalangle UPV = 2 \sphericalangle UPR = 2 \sphericalangle RPV$ den *Ausschlagswinkel* darstellt. Der Beobachter, den wir in die Nähe des Poles

Foucaultschen Pendelversuches" gegeben. Gassendi und Naudé hatten zu Beginn des 17. Jahrhunderts eine anscheinend spontane Bewegung frei hängender Pendel zu bemerken geglaubt; darüber berichtet ein sehr interessantes Schriftchen des bekannten Prälaten Caramuel (Perpendiculorum inconstantia ab Alexandro Calignono nobili Delphinate excogitata; a Petro Gassendo bona fide tradita et pulchro commentario exornata; a Joanne Caramuel Lobkowitz examinata et false reperta, Löwen 1643). Die Widerlegung Caramuels ist wenig beweiskräftig, da er als eifriger Anticoppernicaner gegen jede Wahrnehmung, die — und das war ja auch Gassendis Absicht — zu gunsten der neuen Weltordnung verwertet werden konnte, auf der Hut sein zu müssen glaubte. Andreas Mayer hat später den Sachverhalt zum Gegenstande einer lesenswerten Dissertation gemacht (De deviatione et reciprocatione penduli, Greifswald 1767). Nach R. Wolf (Handb. etc., 2. Band. S. 223) hätten auch Poinsinet de Sivry (um 1780) und A. Stark (um 1830) eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels bemerkt.

[1]) Hierher gehören nachstehende Aufsätze Foucaults: Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre, fondée sur la fixité du plan de rotation, Compt. rend., 25. Band. S. 421 ff.; Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants, entraînés par une axe fixe à la surface de la terre, ebenda, 25. Band. S. 424 ff.

postieren, soll sich im Südpunkte S der Rose befinden; er übersieht dann den Ausschlagswinkel seiner ganzen Oeffnung nach und wird ihn stets so erblicken, wenn er seinen Aufenthaltsort nicht verändert, und wenn die Erde

Fig. 139.



stillsteht. Die *Schwingungsebene des Pendels* bleibt unverändert dieselbe, sie kann auch, da ja die Ruhelage mit der Erdachse zusammenfällt, durch eine allfallsige Umdrehung der Erde in ihrer Stellung im Raume nicht beeinflusst werden. Nehmen wir nun diese Umdrehung als Faktum an; was wird davon die Folge sein? Der zuerst in S befindliche Beobachter kommt allmählich nach SO, und hier erscheint ihm die Oeffnung des Ausschlagswinkels schon sehr verkleinert, die Kreisbahn der

Pendellinse R elliptisch verzogen; beides steigert sich, je näher ihn die Erddrehung dem Punkte O bringt, und wenn er diesen erreicht hat, so befindet sich der Beschauer in der Schwingungsebene selbst und kann bloß eine abwechselnde Hebung und Senkung der Pendelkugel konstatieren. Bald aber öffnet sich der erwähnte Winkel wieder, und nachdem unser Beobachter über NO hinweg nach N geführt ist, sieht er den Vorgang wieder genau in derselben Weise sich vollziehen, wie früher von S aus. Ebenso entspricht weiterhin der Punkt NW dem Punkte SO, der Punkt W dem Punkte O, der Punkt SW dem Punkte NO, und von S an wiederholt sich alles in der nämlichen Reihenfolge. Der Beobachter muß sonach zu dem Schlusse kommen, daß die Schwingungsebene des Pendels im Verlaufe von 24 Stunden *alle möglichen mit der Voraussetzung des Senkrechtstehens auf dem Horizonte verträglichen Raumstellungen* sukzessive einnimmt; wenn er aber weiß, daß dies aus mechanischen Gründen unmöglich ist, so bleibt ihm nur die andere Alternative übrig: *Sein mit der Erde fest verbundener Standpunkt und damit überhaupt jeder Punkt der Erde beschreibt im Laufe von 24 Stunden einen vollkommenen Kreis — die Erde dreht sich um ihre Achse.*

Nun können wir freilich die Beobachtung, wie sie hier geschildert wurde, bei der Unerreichbarkeit der Erdpole nicht wirklich anstellen, dieselbe wird vielmehr wohl für ewige Zeiten eine fiktive bleiben müssen. Allein die ursprüngliche Lage der Schwingungsebene bleibt allenthalben auf der Erde von der Rotation unberührt, und so werden wir den Versuch an jedem beliebigen Erdorte — vom Aequator abgesehen — anstellen können; *nur wird es mit abnehmender Breite immer länger dauern, bis die Schwingungsebene in ihre Anfangsstellung zurückgekehrt ist.*

Zu den leicht und mühelos anzustellenden Vorlesungsversuchen gehört nun freilich dieser Pendelversuch nicht. Zunächst muß das Pendel eine sehr stattliche Länge haben, und nur dann, wenn als freier Raum eine Kirche, das Treppenhaus eines hohen Gebäudes u. dgl. zu Gebote steht, wird man die allmähliche Abweichung der Schwin-

gungsebene zu konstatieren imstande sein [1]). Sodann ist darauf zu achten, daß in dem Momente, in welchem die Pendelbewegung anhebt, das Pendel selbst nicht den mindesten seitlichen Anstoß erhalte, denn sonst bekommt man die ganz andere Erscheinungen darbietende Bewegung eines *Kegelpendels* [2]). Man thut am besten, das Pendel bis zu der Elongation, die man haben will, aus seiner Ruhelage zu bringen und in dieser Position mit einem Faden an der Wand zu befestigen, wobei jedoch Pendel- und Anknüpfungsfaden sich genau in der nämlichen Vertikalebene befinden müssen; brennt man dann das haltende Band durch, so beginnen die Schwingungen ohne Gefahr einer konischen Seitenabweichung. Um endlich die Deviation der Schwingungsebene dem Auge bequem erkennbar zu machen, häuft man längs eines Kreises, dessen Radius, wenn l die Pendellänge, 2α den Ausschlagswinkel bedeutet, kleiner als l tang α sein muß, Sand zu einer kleinen Erhöhung auf und versieht die Linse mit einem feinen Stifte; bei jedem Hin- und Hergange zeichnet dieser Stift in den Sandhügel eine Linie ein, und diese Linie stimmt nach und nach mit allen

---

[1]) Die erste Demonstration seiner Entdeckung nahm Foucault im Pantheon zu Paris vor, und ihr folgten solche Vorführungen in der Peterskirche zu Rom durch Secchi (Sulle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra, Ann. di Matem. pura et applicata, 1851. S. 238 ff.) und im Kölner Dome durch Garthe (Foucaults Versuch als direkter Beweis von der Achsendrehung der Erde, Köln 1852).

[2]) Ein *konisches Pendel*, wie es z. B. als Zentrifugalregulator an der Achsenmuffe unserer Dampfmaschinen zu sehen ist, soll nach der üblichen Annahme, wenn die gleich nachher im Texte eingeführte Bezeichnung gilt, die Umlaufsdauer $2\pi\sqrt{l\cos\alpha : g}$ haben. Danach erschiene es gleichgiltig, in welchem Sinne die Rotation stattfindet. Es ist aber von Bravais in zwei größeren Abhandlungen (Mémoire sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques, Journal de math. pures et appliquées, 19. Band. S. 1 ff.; Sur les systèmes, dans lesquelles les vibrations dextrogyres et levogyres n'effectuent pas de la même manière, Compt. rend., 32. Band. S. 166) der Nachweis erbracht worden, daß obige Formel bloß eine erste Annäherung darstelle, und daß bei genauerem Zusehen auch ein der Erdbewegung Rechnung tragendes Zusatzglied anzubringen sei.

möglichen Radien des Kreises überein, dessen Peripherie der Aufwurf umgibt. So wird also die Erdumdrehung durch ein immer weiter fortschreitendes Abkämmen des Sandwalles ersichtlich gemacht [1]).

Von Kammerlingh Onnes [2]) ist der Vorschlag gemacht worden, den Faden oder Draht des Foucaultschen Pendels durch die *Cardanische Aufhängung* [3]) eines festen Pendels zu ersetzen; zugleich stellte derselbe seine Versuche im luftverdünnten Raume an und brachte so eine die übliche namhaft übersteigende Annäherung des experimentellen Resultates an das theoretische zuwege. Der genannte holländische Gelehrte hat aber sogar gezeigt, daß das freie Ende eines irgendwie mit einem rotierenden Körper verbundenen Stabes eine Bewegung besitzt, aus der analytisch der Einfluß der Erdumdrehung herausgelesen werden kann. Sohin ließe sich dem Foucaultschen Grundversuche wohl noch manche Abänderung erteilen, obwohl nicht jeder Ersatz, den man für denselben seiner Schwierigkeit halber in Anregung gebracht

---

[1]) Ein anderes, für einen größeren Zuschauerkreis wohl geeignetes Mittel, obigen Zweck zu erreichen, gab Mauritius an (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 8. Jahrgang. S. 475 ff.). Man bringt hinter den schwingenden Draht eine helle Lichtquelle (Lichtkegel eines Sonnenmikroskopes) und merkt sich an der Wand die Lage des von jener an dieser gebildeten Schattens des Drahtes. Nach einiger Zeit sieht man, daß diese Schattenlinie, welche ursprünglich den Durchmesser des auf der Wand entstandenen Lichtkreises gebildet haben möge, in eine vibratorische Bewegung zu geraten beginnt.

[2]) Diese Idee findet sich in der zitierten Schrift S. 247 ff. Auffallenderweise war schon Gauß ganz auf denselben Gedanken gekommen, allein derselbe blieb in den Manuskripten des großen Forschers begraben, und erst Schering konnte in seiner Besprechung der Schrift von Onnes (Gött. Gel. Anzeigen, 1883. S. 71) auf das merkwürdige Zusammentreffen hinweisen.

[3]) Diese von dem italienischen Physiker Cardano (1571 bis 1576) erfundene Aufhängung, die z. B. bei Kompassen, Schiffslampen u. s. w. zur Anwendung kommt, versetzt den aufgehängten Gegenstand in eine Lage, bei der alle ihn treffenden Stöße nahezu unwirksam werden, so daß z. B. die horizontale Oberfläche eines derart befestigten Zylinders nur unbedeutende Schwingungen um die Ruhelage machen kann.

hat, auch wirklich als ein vollwichtiger betrachtet werden darf[1]).

Theoretische Bestimmung des Foucaultschen Ablenkungswinkels. Unterstützt von dem Ergebnisse zahlreicher Versuche stellte Foucault (a. a. O.) auch sofort ein Gesetz auf, welches für eine willkürliche geographische Breite φ die quantitative Seite zu regeln bestimmt war. Dem damals gefundenen Satze kann man die folgende Formulierung erteilen: *Der Winkel, welchen nach Ablauf einer Stunde die Schwingungsebene eines Foucaultschen Pendels mit der anfänglichen Schwingungsebene bildet, beträgt unter der Polhöhe φ soviel wie* $15^0 \sin \varphi$. In einer Stunde legt somit diese Ebene am Pole 15^0, in 24 Stunden — gleichförmige Bewegung vorausgesetzt — $24 \,.\, 15^0 = 360^0$, d. h. einen Vollkreis zurück, während (s. o.) am Aequator gar keine Drehung eintritt. Zu einer vollkommenen Umdrehung wird unter der Breite φ eine Zeit von $(24 \operatorname{cosec} \varphi)^h$ erfordert, unter dem Aequator also eine Zeit von unendlicher Dauer.

Die Bemühungen der Mathematiker und Physiker waren nunmehr darauf gerichtet, diesen Lehrsatz zu beweisen, resp. die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen die Foucaultsche Formel giltig ist. Es ist mit der Zeit eine sehr stattliche Litteratur hierüber angewachsen[2]),

---

[1]) Es scheint bei diesen Erörterungen vielfach übersehen zu werden, daß die Erdrotation keinem unbewegten Körper eine Bewegung mitzuteilen, sondern lediglich die Art einer bereits irgendwie ausgelösten Bewegung ihrerseits zu beeinflussen vermag.

[2]) Ein kurzer Ueberblick über diese Litteratur darf hier nicht ausbleiben; sehr erleichtert wird die Pflicht, ihn zu geben, durch A. Picks treffliche Abhandlung „Der Foucaultsche Pendelversuch" (Zeitschrift f. d. Realschulwesen, 1. Jahrgang. S. 135 ff. S. 211 ff. S. 393 ff.), der zumal in kritischer Hinsicht Röthigs historisch-didaktische Studie von gleichem Titel (Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litter. Abteil., 24. Band. S. 153 ff.) an die Seite zu stellen wäre. Die oben in I ihren Hauptzügen nach gegebene Ableitung rührt her von Crahay (Demonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule à diverses latitudes, Bull. de l'acad. royale de Belgique, 1852. S. 1 ff.); ähnlich verfährt Marignac (Note sur les expériences de M. Foucault relatives à la déviation

doch kommen die *elementaren Begründungen* wesentlich auf die eine der beiden im folgenden angedeuteten Methoden hinaus.

I. Sei γ die Winkelgeschwindigkeit der Erde am Aequator; es heißt dies, ein Aequatorpunkt, sowie dessen zur Erdachse parallele Mittagslinie legen in der Zeiteinheit

---

du plan d'oscillation du pendule, produite par la rotation de la Terre, Arch. de sciences phys. et nat., 17. Band. S. 116 ff.). Die Annahme freilich, die diesen Deduktionen sämtlich zu Grunde liegt, die Annahme von einem *Parallelismus der Schwingungsebene*, ist haltlos; mit ihr gebrochen zu haben, ist das Verdienst Jelineks (Theorie der Pendelabweichung, Sitzungsber. d. k. k. Akademie d. Wissensch., Math.-naturw. Kl., 44. Band, II. S. 241 ff.). Mit der unter II behandelten Zusammensetzung von Bewegungen scheint Coombe (On the Rotation of the Earth, Philos. Mag., [4] 1. Band. S. 554 ff.) den Anfang gemacht zu haben; ihm schlossen sich, unabhängig voneinander, Hullmann (Der Foucaultsche Pendelversuch, Oldenburg 1873) und Friedlein-Bielmayr (Zum Foucaultschen Pendelversuche, Bl. f. d. bayer. Gymnasialschulwesen, 10. Band. S. 251) an, während Tammen (Ueber den Foucaultschen Pendelversuch, Repert. f. Physik, 18. Band. S. 278 ff.) das der Hullmannschen Methode zur Basis dienende analytische Prinzip selbständig begründete. Sehr hübsch ist Schadwills Versuch (Das Foucaultsche Pendelgesetz, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 8. Jahrgang. S. 371 ff.), auf das vorliegende Problem Terminologie und Begriffsbildungen der Reuleauxschen Mechanismenlehre anzuwenden. — Ein durchaus befriedigender Weg zur Aufklärung des nicht weniger denn einfachen Thatbestandes ist nur dann zu beschreiten, wenn man die Bewegung der Schwingungsebene auf die allgemeinen Gleichungen der theoretischen Mechanik zurückführt, wie dies in unübertroffener Weise von Hansen (Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und die Bewegung der Erde, Danzig 1853) geschehen ist; eben in diese Kategorie gehören auch die unter beschränkenderen Voraussetzungen geführten Beweise von Binder (Zum Foucaultschen Pendelversuche, Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht, 8. Jahrgang. S. 389 ff.) und Pieper (Zur Kritik des Foucaultschen Pendelversuches, Dessau 1882). Von besonderer Bedeutung scheinen jedoch zwei vor kurzem erst erschienene Beiträge zu dieser Frage von Weihrauch zu sein (Ueber Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften nebst Anwendung auf das Foucaultsche Pendel, Repert. f. Physik, 22. Band. S. 480 ff.; Einfluß des Widerstandes auf die Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, mit Anwendung auf das Foucaultsche Pendel, ebenda, 22. Band. S. 643 ff.). Wir kommen auf Weihrauchs Behandlung des Gegenstandes unten noch besonders zurück.

einen Weg $r\gamma$ zurück. Die Mittagslinie eines unter der Breite φ gelegenen Punktes beschreibt dagegen während einer vollen Umdrehung der Erde einen Kegelmantel, dessen Seitenlinie r cotang φ und dessen Grundkreis vom Umfang $2r\pi \cos\varphi$ ist. Die in gleichen Zeiten von dem unter dem Pole und unter der Polhöhe φ aufgehängten Pendel vollzogenen Drehungen haben demnach ein Verhältnis wie

$$\frac{2r\pi \operatorname{cotang}\varphi}{2r\pi\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi},$$

und da die Umdrehungsgeschwindigkeit der Schwingungsebene am Pole $= \gamma$ ist, so ist sie für den unter der erwähnten Breite gelegenen Parallelkreis $= \gamma \sin\varphi$, wie behauptet war.

II. Die zweite Art, unsere Formel zu verifizieren, besteht darin, daß man Bewegungskomponenten zu einer resultierenden Bewegung zusammensetzt. Zunächst sei die Voraussetzung gemacht, daß es erlaubt sei, hierbei Drehungen ganz wie Bewegungen zu behandeln. Wäre dem so, dann könnte man die Rotation der Erde durch zwei Rotationen um Achsen ersetzen, welche sich im Mittelpunkte der Erde unter rechten Winkeln schneiden; eine einfache trigonometrische Betrachtung führt dann (z. B. bei Friedlein), wenn x den einer Drehung der Erde um t^0 entsprechenden Drehungswinkel der Schwingungsebene bedeutet, zu der folgenden Relation:

$$\sin x = \frac{\sin t \sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^4\frac{t}{2}\sin^2 2\varphi}}.$$

Allein die obige Annahme ist falsch; eine solche Zusammensetzung von Drehungen, wie sie hier in frage kam, ist nur dann erlaubt[1]), wenn diese *unendlich klein*

[1]) Die Lehre von der Vereinigung mehrerer unendlich kleiner wie endlicher Einzeldrehungen zu einer Gesamtdrehung ist von L. Euler begründet worden (Novi Commentarii Acad. Imp. Petropol., 20. Band. S. 789 ff.). Hier wird allgemein gezeigt, wie für Drehungen

sind, und so ist auch die erhaltene Formel nur richtig für $\sin t = t$, $\sin^4 \frac{t}{2} = 0$. Dann aber nimmt dieselbe die uns bereits bekannte Gestalt $x = t \sin \varphi$ an.

Maßgebend für uns ist die von Weihrauch (s. o.) festgestellte Thatsache[1]), daß für die Drehung der Foucaultschen Schwingungsebene genau die gleichen Grundsätze maßgebend sind, welche wir im nächsten Paragraphen für die Ablenkung horizontaler Bewegungen überhaupt kennen lernen werden. Diese Ablenkung ist aber ebenfalls dem *Sinusgesetze* unterworfen. Es fragt sich nur noch, ob dieses Gesetz ein völlig exaktes ist oder nur eine Annäherung an die Wahrheit darstellt; letzteres ist der Fall, und zwar gilt das Gesetz, wie Weihrauch gleichfalls feststellt, so lange, *als die Schwingungen des Pendels isochron sind,* so lange die bekannte Pendelformel $t = \pi \sqrt{l : g}$ zutrifft[2]). Der Ausschlagswinkel darf also nicht

von beliebiger Größe die Achse gefunden werden muß, um welche eine Rotation ausgeführt werden kann, die denselben Effekt hat, wie zwei gegebene Drehungen um zwei sich durchschneidende Achsen. Von diesem Satze mußte also Gebrauch gemacht werden, wenn statt des oben erwähnten unrichtigen ein richtiges Ergebnis erzielt werden sollte. Wenn die Komponenten unendlich klein werden, dann allerdings ergibt die Eulersche Methode dasselbe Endresultat, wie das einfache *Parallelogramm der Bewegungen*, an welches sich Friedlein u. a. hielten (s. Pagani, Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps, Bull. de l'acad. r. de Belgique, 1853. S. 161 ff.), und aus diesem Grunde wird auch die Schlußformel richtig, sobald der Bogen mit dem Sinus vertauscht werden darf. — Später ist die *geometrische Theorie der Drehung* vornämlich durch Poinsot und Chasles ausgebildet worden, welch letzterer (Gesch. d. Geom., deutsch von Sohncke, S. 455) das ganz allgemeine Theorem aufstellte: „Wenn ein Körper mehreren Rotationsbewegungen um verschiedene Achsen, die irgendwie im Raume liegen, unterworfen ist, so kann man auf unendlich viele Arten dieses System von Rotationen durch zwei einzige Rotationen um zwei verschiedene Achsen ersetzen."

[1]) Weihrauch, Ueber Pendelbewegung etc., S. 489.

[2]) Auch das unter I geschilderte Verfahren hat nur unter dieser Bedingung Sinn, denn es ist dabei stillschweigend angenommen, daß sich die Pendelkugel statt auf dem Kreise auf einer

mehr als höchstens 4—6 Grade betragen, allein da die Pendellänge, wie wir sahen, doch immer eine sehr beträchtliche ist, so kann auch bei einem solchen Winkel die Bewegung augenfällig genug gemacht werden.

Zwei Tabellen, welche wir umstehend (S. 694) mitteilen, sollen die Uebereinstimmung des Sinusgesetzes mit der Erfahrung übersichtlich darthun. Diejenige zur linken repräsentiert einen Auszug aus der von Bunt in Bristol (51° 27′ 16″ n. Br.) zustande gebrachten Versuchsserie[1], während das Schema rechts nach Wolf[2]) für *verschiedene Breiten* jene Uebereinstimmung zu verfolgen gestattet.

Man sieht, daß die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung eine so gute ist, wie sie bei der Fülle vorhandener Fehlerquellen[3]) nur immer erwartet werden konnte.

Noch ein Wort sei der *Gestalt der von der Pendellinse beschriebenen Trajektorie* gewidmet. Diese Kurve gehört in die Gattung der *Hypozykloiden*[4]) und wird in *Fig. 140* schematisch zur Darstellung gebracht. Wir können uns dieselbe vorstellen unter dem Bilde eines regelmäßigen Sternpolygones ... *bcdefghi* ...; die Anfangsseite *ab* und die Endseite *ik* sind nicht vollständig ausgezogen. Sämtliche Eckpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises vom Mittelpunkte *M*, und eben dieses *M* ist auch das Zentrum des kleineren Kreises,

---

im Ruhepunkte an diesen gelegten Tangente gradlinig oszillierend bewege, und daß die sämtlichen so gezogenen Tangenten sich in einem Punkte der verlängerten Erdachse begegnen, der eben von der Peripherie des Parallels den konstanten Abstand r cotang φ hat.

[1]) Bunts Versuche sind beschrieben im „Philosoph. Magazine", 4. Serie: 1. Band. S. 552 ff.; 2. Band. S. 37, 81, 158, 424; 4. Band. S. 272.

[2]) Wolf, Handbuch etc., 2. Band. S. 223.

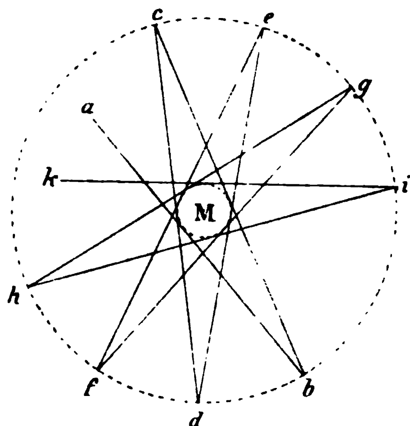
[3]) Wie vielseitig die möglichen Fehler sind, geht u. a. daraus hervor, daß in eisernen Pendelgewichten sich, wie Bunt fand, sehr leicht Magnetismus induziert, und daß alsdann die Bewegungen ein ganz falsches Bild gewähren.

[4]) Oben (S. 630) wurde die Definition einer Epizykloide gegeben; von dieser unterscheidet sich die — in diesem Falle allerdings sphärische — Hypozykloide nur darin, daß der kleinere Kreis auf der konkaven Seite des größeren Kreisumfanges abrollt.

Dauer der Beobachtung	Drehung der Pendelebene	Dieselbe berechnet	Differenz	Ort	Geographische Breite	Stündliche Abweichung berechnet	Stündliche Abweichung beobachtet	Differenz
2^{h} $54{,}4^{m}$	35,70°	34,19°	− 1,51°	Nordpol	+ 90°00′	15,00°	—	—
2^{h} $59{,}5^{s}$	35,30	35,19	− 0,11	Dublin	+ 53 23	12,04	11,90°	− 0,14°
3 34,7	43,40	42,09	− 1,31	Köln	+ 50 56	11,65	11,64	− 0,01
4 39,0	52,73	54,70	+ 1,97	Genf	+ 46 12	10,83	10,18	− 0,65
5 41,0	64,80	66,86	+ 2,06	Rom	+ 41 54	10,02	9,90	− 0,12
5 42,3	69,35	67,11	− 2,24	New York	+ 40 43	9,78	9,73	− 0,05
11 26,3	137,10	134,56	− 2,54	Ceylon	+ 6 56	1,81	1,87	+ 0,06
12 40,5	140,50	149,11	+ 8,61	Aequator	± 0 00	0,00	—	—
13 4,0	154,45	153,71	− 0,74	Rio de Janeiro	− 22 54	5,84	5.17	− 0,67

welchen die Seiten *einhüllen*. In Wirklichkeit sind die Polygonseiten nicht eigentlich gradlinig, sondern Kurvenbogen von sehr großem Krümmungshalbmesser, und

Fig. 140.



gleicherweise entstehen an den Punkten *c*, *d*, *e* . . . keine wirklichen Spitzen, sondern Kurvenbogen, deren Krümmungsradius einen überaus kleinen Wert besitzt [1]).

Deviation horizontaler Bewegungen. Jeder in einer Horizontalebene bewegte Körper, einerlei, welchen Winkel seine Bewegungsrichtung mit der Mittagslinie einschließt [2]), wird durch die Erdumdrehung von dieser seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, und zwar gilt hierbei diese durchgreifende Regel: *Auf der nördlichen Halbkugel wird die Bewegung nach rechts*, *auf der süd-*

---

[1]) Diese Figur ist derjenigen Weihrauchs (a. a. O.) nachgebildet, stimmt aber den *qualitativen* Beziehungen nach völlig mit der in des Verf. „Geophysik" (1. Band. S. 230) enthaltenen überein, was erstgenanntem Autor entgangen zu sein scheint.

[2]) Daß auch Bewegungen längs eines Parallelkreises abgelenkt werden, hatte man früher ganz allgemein in Abrede gestellt.

lichen nach links und nur auf dem Aequator wird sie gar nicht abgelenkt.

Die Verhältnisse qualitativ wie quantitativ richtig zu überblicken, ermöglicht uns eine elementare Betrachtung, welche von Buff[1]) herrührt, von Dunker[2]), Ferrel[3]) und Zöppritz[4]) aber weiter ausgestaltet wurde.

Fig. 141 a.

AC (Fig. 141a) ist der Weg, den ein Atom in der Zeiteinheit kraft des ihm erteilten Bewegungsimpulses zurück-

---

[1]) Buff, Der Einfluß der Umdrehung der Erde um ihre Achse auf irdische Bewegungen, Ann. d. Chem. u. Pharm., 4. Supplementband. S. 207 ff.

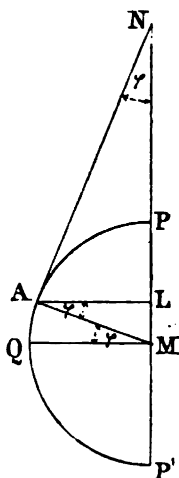
[2]) Dunker, Ueber den Einfluß der Rotation der Erde auf den Lauf der Flüsse, Zeitschr. f. d. ges. Naturwissenschaften, (2) 11. Band. S. 463 ff.

[3]) Ferrel, The motions of Fluids and Solids relative to the Earth's Surface, New York 1860; Neue Auflage, besorgt von Waldo, Washington 1882.

[4]) Zöppritz, Ueber den angeblichen Einfluß der Erdrotation auf die Gestaltung von Flußbetten, Verhandl. d. II. deutschen Geographentages, Berlin 1882. S. 47 ff.

legen würde; gleichzeitig aber würde die Erddrehung das Atom durch die Wegstrecke AB hindurchführen, und so legt der bewegte Punkt thatsächlich die Diagonale AD des Parallelogrammes $ABDC$ zurück. Die Rechtsablenkung ist damit schon erwiesen, und es kommt nur noch darauf an, zu zeigen, daß das Azimut der Anfangsrichtung AC gänzlich ohne Einfluß ist. Um die *Ablenkungsgrösse* zu erhalten, legen wir in A und B Tangenten an die Erdoberfläche, die zugleich mit den Mittagslinien beider Orte zusammenfallen, die also beide als in der Ebene des Parallelogrammes $ABDC$ gelegen zu denken sind und sich in dem der verlängerten Erdachse angehörenden Punkte N durchschneiden. Der Winkel ANB soll δ heißen, während $\sphericalangle CAN = \alpha$ sein möge; zieht man durch B eine Grade, welche AN in E schneidet, parallel zu AC, so ist auch (als Wechselwinkel) $\sphericalangle BEA = \alpha$ und $\sphericalangle EBN = \alpha - \delta = \alpha'$. Macht man in der gemeinsamen Horizontalebene $\sphericalangle NBD' = \alpha$, so gibt $\sphericalangle DBD' = \alpha'$ die erfolgte Ablenkung an, und macht man $BD' = BD$, so gibt die Strecke $DD' = \sigma$ die Strecke an, um welche sich nach der Ansicht des von dem wahren Hergange nicht unterrichteten Beobachters der Punkt A von ihm entfernt hat. Dieses σ gilt es auszumitteln. Da die beiden gleichschenkligen Dreiecke ABN und $DD'B$ den $\sphericalangle \delta$ an der Spitze gemeinsam haben, so sind sie einander ähnlich, und man hat, wenn $AC = v$, $AB = s$, $AN = k$ gesetzt wird,

Fig. 141b.



$$v : k = \sigma : s; \quad \sigma = \frac{vs}{k}.$$

Der Weg v ist gegeben, s und k dagegen werden gefunden, wenn man zu *Fig. 141b* übergeht, in welcher PP' die Erdachse, M den Erdmittelpunkt darstellt, wäh-

rend die Buchstaben A und N ihre Bedeutung beibehalten. QM ist der in die Zeichnungsebene fallende Radius des Aequators, somit $\sphericalangle QMA = \sphericalangle MAL = \sphericalangle LNA\,(AL \perp PP')$ gleich der geographischen Breite φ. $\sphericalangle MAN$ muß der Bedingung gemäß ein rechter sein, somit $AN = k = r \operatorname{cotang} \varphi$. Wenn aber γ die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet, so ist der in der Zeiteinheit vom Punkte A zurückgelegte Weg $s = \gamma \,.\, AL = \gamma r \cos \varphi$, und fasst man zusammen, so wird

$$\sigma = \frac{vs}{k} = \frac{\gamma v r \cos \varphi}{r \operatorname{cotang} \varphi} = \frac{\gamma v \cos \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = \gamma v \sin \varphi,$$

wobei γ, da ein Sterntag (s. S. 172) 86164 Sekunden zählt, $= \frac{\pi}{43082}$ gesetzt werden kann. *In diesem Ausdrucke aber kommt das ursprüngliche Azimut nicht vor*, wie dies oben behauptet worden war [1]).

Es fragt sich nun, ob dieses theoretische Resultat auch durch die Erfahrung bestätigt wird, und da wird

---

[1]) Bei schärferer, alle Umstände und insbesondere auch die wahre Gestalt der Erde in Rechnung ziehender Bestimmung der Größe und Lage von σ zeigt sich allerdings, daß das Azimut nicht gänzlich herausfällt; vgl. Finger, Ueber den Einfluß der Erdrotation auf parallel zur sphäroidischen Erdoberfläche vor sich gehende Bewegungen, Sitzungsber. d. k. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Math.-Phys. Kl., 76. Band. S. 67. Finger thut dar, daß die Ablenkung für eine nach Osten gerichtete Bewegung ein Maximum, für eine nach Westen gerichtete ein Minimum wird, und widerlegt so den alten, verbreiteten Irrtum, daß die *Maximalabweichung an die meridionale Richtung gebunden* sei. Dieser Irrtum war dadurch entstanden, daß man zwei verschiedene Erscheinungen nicht gehörig auseinander gehalten hatte: die *wirkliche Ablenkung*, die wir oben kennzeichneten, und die *scheinbare Ablenkung*, die sich bei Bewegungen von langer Dauer in einem Zurückbleiben oder Voraneilen äußert, je nachdem das Mobil an Stellen von größerer oder geringerer Umdrehungsgeschwindigkeit gelangt. Vorzüglich trennt diese beiden Konsequenzen der Erdrotation eine viel zu wenig gewürdigte Studie von Poisson (Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation et à l'influence du mouvement diurne de la terre, Compt. rend., 5. Band. S. 660 ff.).

sich zeigen, daß an solchen empirischen Belegen kein Mangel ist. Wir zählen die wichtigsten derselben auf.

a) Ablenkung der Geschosse. Von D'Alembert (s. S. 683) bereits erkannt, ist diese Rechtsabweichung solcher Projektile, denen eine erhebliche Anfangsgeschwindigkeit erteilt ward, zuerst in der unten namhaft gemachten Abhandlung von Poisson eingehend studiert worden. Darapskys Schießversuche[1]) lassen keinen Zweifel darüber, daß die Wege, welche von einer Granate modernster Konstruktion durchlaufen werden, und die wohl 10 km betragen können, groß genug sind, um eine erkennbare Abweichung von der Vertikalebene der Seelenachse hervortreten zu lassen.

b) Entgleisungstendenz der Eisenbahnen. Auf amerikanischen Bahnen wollte man die Erfahrung gemacht haben, daß die Eisenbahnzüge eine Neigung bekunden, rechts aus den Schienen herauszuspringen, und infolge dieser angeblichen Wahrnehmungen ist man der Sache auch mathematisch näher getreten[2]). Eine von Schrader aufgestellte, von Wiegand[3]) mitgeteilte Formel läßt die Dinge leicht überblicken. Wären Schiene und Radkranz nicht vorhanden, so würde die Erdbewegung einen Wagen in 1^s um $\gamma v \sin \varphi$ nach rechts abdrängen, und es hat deshalb der rechtsseitige Schienenstrang einen um D größeren Druck auszuhalten, als der linksseitige. Wenn Q das Gewicht des Wagens, so ist $g \frac{D}{Q}$ die Beschleunigung,

---

[1]) Darapsky, Ueber den Einfluß der Erdrotation auf die Abweichungen der aus gezogenen Rohren abgeschossenen Projektile, Dinglers Polyt. Journal, 186. Band. S. 98 ff.

[2]) Zu nennen wären hier folgende Arbeiten: Lindelöf, Sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur un corps mu suivant sa surface, Cosmos (v. Moigno), 15. Band. S. 697 ff.; Braschmann, Note concernant les pressions des wagons sur les rails droits et des courants d'eau sur la rive droite du mouvement en vertu de la rotation de la Terre, Compt. rend., 4. Band. S. 1068 ff.

[3]) Wiegand, Grundriß der mathematischen Geographie, Halle 1869. S. 26 ff.

$\frac{1}{2} g \frac{D}{Q}$ der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, und man hat somit

$$\frac{1}{2} g \frac{D}{Q} = \gamma v \sin \varphi; \; D = \frac{2 \gamma v Q \sin \varphi}{g}.$$

γ und $\sin \varphi$, sowie $\frac{1}{g}$, sind hier echte Brüche, so daß D, auch wenn Q und v größere Werte erreichen, stets nur klein ausfallen wird. Dies bestätigt die von Hallbauer, einem gewiegten Eisenbahntechniker, angestellte Prüfung [1]). Bei der gewöhnlichen Spurweite von 1,436 m und bei der hohen Maximalgeschwindigkeit $v = 25$ m würde es genügen, die Schiene rechts um 0,4 mm zu erhöhen, um jedweden Einfluß der Achsendrehung zu paralysieren; diese Erhöhung erreicht aber nicht einmal den Betrag der täglichen Abnützung und ist folglich praktisch bedeutungslos. Immerhin kann es dann, wenn Schienen und Schwellen auf sehr nachgiebigem (Moor-) Boden liegen, erforderlich sein, die Schienenreihe zur rechten stärker als die zur linken zu befestigen, wofür Martus [2]) ein Beispiel anführt.

c) Winde und Meeresströmungen. Das von Buys-Ballot aufgestellte Grundgesetz der modernen Meteorologie besagt [3]): *Die Luft strömt stets vom barometrischen Maximum zum barometrischen Minimum hin und wird dabei auf der Nordhalbkugel rechts, auf der Südhalbkugel links von ihrem Wege abgelenkt.* Aus diesem Gesetze

---

[1]) Hallbauer, Ueber den Einfluß der Achsendrehung der Erde auf das Entgleisen von Eisenbahnen, Zivilingenieur, 15. Band. S. 170 ff.

[2]) Martus, a. a. O., S. 203.

[3]) Betreffs der Entstehung dieses Fundamentalsatzes, der nahezu gleichzeitig von Espy, Coffin, Galton, Dippe und Buys-Ballot erkannt, aber doch nur von dem letzteren seiner vollen wissenschaftlichen Bedeutung nach erfaßt worden war, gibt des Verf. „Geophysik" (2. Band. S. 202 ff.) näheren Aufschluß. Den strengen Beweis dafür erbrachte Sprung (Theoretische Begründung des Buys-Ballotschen Gesetzes. Ann. d. Hydr. u. marit. Meteorol., 8. Jahrgang. S. 603 ff.).

heraus lassen sich alle die verwickelten Wechselspiele der irdischen Luft erklären), vor allem die *Passatwinde*, in deren Wehen man auch von alters her einen direkten Beweis für die Achsendrehung erblicken zu dürfen geglaubt hat[2]). — Auch die Richtung der *Meeresströmungen* wird von der Erdrotation beeinflußt, obwohl diese freilich nicht, wie man früher wohl glaubte[3]), als Ursache der ersteren gelten kann. P. Hoffmann[4]) und Krümmel[5]) haben nach dieser Seite hin Material zusammengebracht, und auch die ein viel kleineres Gebiet okkupierenden *Gezeitenströme* vermögen sich der ablenkenden Kraft der Erdbewegung nicht zu entziehen[6]). Viel zu hoch schätzte allerdings Witte[7]) diesen Einfluss, indem

---

[1]) Mustergiltig sowohl für die Ableitung der *Trägheitsbahn*, welche ein Luftteilchen unter dem ausschließlichen Zusammenwirken der ihm anfänglich erteilten gradlinigen Bewegung mit der Achsendrehung der Gesamtatmosphäre einschlägt, sowie für die Darstellung der allgemeinen, von Ferrel u. a. begründeten *Zirkulationssysteme* unserer Lufthülle ist Sprungs „Lehrbuch der Meteorologie" (Hamburg 1885. S. 132 ff. S. 190 ff.).

[2]) Die erste wesentlich korrekte Theorie der „trade winds" rührt von George — nicht John — Hadley (Phil. Transact., 1735; Poggendorff, Gesch. d. Phys., S. 742) her und wurde nachmals von Kant und Dove aufgenommen.

[3]) Die, wie wir wissen, aus prinzipiellen Gründen unhaltbare Ansicht, daß die Umdrehung der Erde eine kontinuierliche Strömung von Ost nach West *veranlasse*, scheint zuerst von Kepler (Sämtl. Werke, ed. Frisch, 6. Band. S. 180) ausgesprochen worden zu sein.

[4]) P. Hoffmann, Zur Mechanik der Meeresstörungen an der Oberfläche der Ozeane; eine Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung, Berlin 1884.

[5]) Krümmel, Handbuch der Ozeanographie, 2. Band., Stuttgart 1882. S. 362 ff.

[6]) Vgl. hierzu Krümmel (a. a. O., S. 253) und den maßgebenden Nachweis von W. Thomson (Nature, 19. Band. S. 571 ff.) dafür, daß im allgemeinen der in einem Kanale fortschreitende Wellenkamm höher auf der rechten als auf der linken Seite ist, und daß diese Unregelmäßigkeit in spitz zulaufenden Buchten sich noch schärfer ausprägt.

[7]) E. Witte, Die Meeresströmungen, Pleß 1878; vgl. auch desselben Autors Aufsatz in der „Zeitschr. f. wiss. Geogr." (1. Band. S. 30 ff.) und die ein ähnliches Ziel verfolgenden Schriften v. Schillings (Berlin 1874) und Blažeks (Prag 1876).

er auf ihn hauptsächlich die eigenartige Abdachung des Golfstromes zurückführen wollte.

d) Verschiedenheit der Flussufer. Anknüpfend an eine ältere Wahrnehmung des Sibirien-Reisenden Pallas stellte K. E. v. Bär das nach ihm so benannte Bärsche Gesetz auf[1]): *Das rechtsseitige Ufer der Flüsse, vorab der meridional laufenden, ist stets stärker erodiert (auf der Nordhalbkugel), als das linksseitige, und daran trägt die das Wasser nach rechts drängende Erdrotation die Schuld.* Dieses „Gesetz" hat in Babinet[2]), W. Schmidt[3]), Klun[4]), Schweinfurth[5]) Anhänger, in Bertrand[6]), Stefanovics v. Vilovo[7]) und Zöppritz[8]) entschiedene Widersacher gefunden und wird gegenwärtig wohl nur noch von einer kleinen Minderzahl der Fachmänner aufrechterhalten. Zur allgemeinen Uebersicht ist eine Schrift von B. Hoffmann[9]) zu empfehlen; weiteres gehört in die physikalische Geographie.

e) Ausflusserscheinungen. Mit einem recht merk-

---

[1]) v. Bär, Ueber ein allgemeines Gesetz in der Gestaltung der Flußbetten, Bull. de l'acad. imp. de St. Pétersbourg, 1860, II. S. 3 ff.

[2]) Babinet, Sur le déplacement vers le nord ou vers le sud d'un mobile qui se meut librement dans une direction perpendiculaire au méridien, Compt. rend., 49. Band. S. 676.

[3]) W. Schmidt, Zum Bärschen Stromgesetze, Mitteil. d. k. k. geogr. Gesellsch. zu Wien, 1877. S. 399 ff.

[4]) Klun, Einfluß der Rotation der Erde auf den Lauf und die Uferbildung der Flüsse, Mitteil. d. k. k. geol. Gesellsch. zu Wien, 6. Band. S. 144 ff.

[5]) Schweinfurth, Der Nil und das Bärsche Gesetz der Uferbildung, Petermanns Geogr. Mitteil., 11. Band. S. 126 ff.

[6]) Bertrand, Note relative à l'influence de la rotation de la Terre sur la direction du cours de l'eau, Compt. rend., 49. Band. S. 638 ff.; Seconde note etc., ebenda, S. 685 ff.

[7]) In verschiedenen Arbeiten (Ausland, 1876. S. 455 ff.; Gaea, 17. Jahrgang. S. 455 ff.; selbständige Monographie, Wien 1881) hat Stefanovics die laterale Verschiebung des Donaubettes statt auf die Bärsche Regel auf die den regelmäßigen Winden zur Last zu legenden Wanderungen der Sandhügel zurückzuführen gelehrt.

[8]) Zöppritz (s. o.) in den Verhandl. d. II. d. Geographent.; Wagners Geogr. Jahrbuch, 9. Band. S. 45 ff.

[9]) B. Hoffmann, Das Bärsche Gesetz, Halle 1878.

würdigen, *vielleicht* ebenfalls hierher gehörigen Phänomene hat uns Perrot[1]) bekannt gemacht. Er brachte in der Mitte der Bodenfläche eines zylindrischen, mit Wasser gefüllten Gefäßes ein Loch an und konstatierte, daß leichte Schwimmkörperchen, die man zuvor in die Flüssigkeit gestreut hatte, nicht *radial* der Oeffnung zustrebten, sondern sich in *Spiralen von rechtsseitigem Drehsinne* um jene herumbewegten. Der von Perrot gehegten Ansicht, daß sich auch hierin die Umdrehung der Erde offenbare, pflichtet Braschmann[2]) in längerer Ausführung bei.

Die Beweise für die Bewegung der Erde um die Sonne. An Belegen für die *Rotationsbewegung* der Erde ist, wie wir sahen, durchaus kein Mangel; ungleich minder zahlreich dagegen sind diejenigen für die *Revolutionsbewegung.* Von Anfang an schien sogar nur ein einziger möglich zu sein, der Nachweis einer *Parallaxe der Fixsterne.* Wir haben uns mit dem Begriffe der Parallaxe im ersten Abschnitte dieses Kapitels vertraut gemacht, allein damals handelte es sich lediglich um den Winkel, *unter welchem ein bestimmter Erdhalbmesser erscheint,* und dieser war für ein auf einen Fixstern versetztes Auge gleich Null. Die Lehre des Coppernicus stellt uns nun aber statt der winzigen Messungsbasis von rund 860 eine solche von rund 40 000 000 geogr. Meilen zur Verfügung, und wenn unter solchen Umständen nicht eine *Jahresparallaxe* der Fixsterne hervortritt, so sind diese entweder unendlich weit entfernt, oder der zweite Hauptsatz des Coppernicus ist falsch. Die Auffindung dieses jedenfalls sehr kleinen Winkels wurde deshalb zur ernsten Pflicht für die Astronomen.

Während man nach der Parallaxe suchte, machte man eine andere Entdeckung, die der *Lichtabirrung,* und diese Thatsache konnte nicht minder als ein vollgiltiger

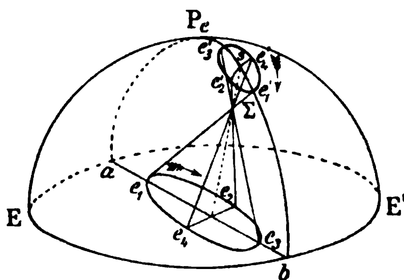
[1]) Perrot, Nouvelle expérience pour rendre manifeste le mouvement de rotation de la Terre, Compt. rend., 41. Band, S. 637.

[2]) Braschmann, Sur l'expérience de M. Perrot, Bull. de l'acad. imp. de St. Petersbourg, 1860, I. S. 571 ff.

Beleg für die revolutorische Bewegung der Erde betrachtet werden, *sobald es feststand, dass die Fortpflanzung des Lichtes nicht instantan erfolge, sondern eine gewisse Zeit benötige.* Damit also jener zweite Beweis seine ganze Kraft erlange, ist es erforderlich, die verschiedenen Methoden *zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit* und die aus diesen Methoden hervorgehenden Resultate kennen zu lernen. Hiermit ist uns für die nächsten Paragraphen unser Arbeitsprogramm genau vorgezeichnet.

Die Jahresparallaxe der Fixsterne. Das Wesen der Jahresparallaxe wird uns aus *Fig. 142* klar, worin EE' die Ekliptik, d. h. die Projektion der Erdbahn auf die

Fig. 142.



scheinbare Himmelskugel, P_e den Pol der Ekliptik bedeutet. $e_1\,e_2\,e_3\,e_4$ ist die Bahn der Erde um die Sonne, und zwar wollen wir annehmen, daß diese vier Punkte den Beginn je einer der vier Hauptjahreszeiten markieren. Die Linien $e_1\,e_3$ und $e_2\,e_4$ stehen also aufeinander senkrecht; $e_1\,e_3$ schneidet die Himmelskugel verlängert in den Punkten a und b, und durch ab und P_e sei ein größter, auf der Ekliptik senkrecht stehender Kreis gelegt. Von e_1 aus projiziert sich der Stern Σ auf der Himmelskugel in e_1', von e_2 aus in e_2', von e_3 aus in e_3', von e_4 aus in e_4'; der Stern scheint also infolge der Erdbewegung eine *kleine geschlossene Kurve,* eine sphärische Ellipse, zu durchlaufen, die, da ja $e_1\,e_2\,e_3\,e_4$ ebenso wie $e_1'\,e_2'\,e_3'\,e_4'$ auf

dem Mantel ein und desselben Kegels von der Spitze Σ gelegen ist, das *perspektivische Bild der Erdbahn* darstellt; den Achsen $e_1\,e_3$ und $e_2\,e_4$ entsprechen jeweils die Achsen $e_1'\,e_3'$ und $e_2'\,e_4'$; *die Bewegung des Sternes aber ist derjenigen der Erde entgegengesetzt*, wie die beigefügten Pfeile erkennen lassen. Das Vorhandensein einer Jahresparallaxe muß sich folglich in dem Vorhandensein einer *parallaktischen Jahreskurve* aussprechen.

Mehr denn zwei Jahrhunderte waren die Bemühungen, eine solche Kurve wahrzunehmen, vollkommen fruchtlos. Männer, wie Bradley, W. Herschel, Brinkley, Calandrelli, Pond, der zu dem Ende große Fernrohre in eine mauerfeste Stabilität zu bringen sich bestrebte [1]), konnten keine Erfolge ihrer Arbeit aufweisen, resp. die von ihnen vermeintlich ermittelten Parallaxen erwiesen sich nachgerade als unrichtig, weil viel zu groß [2]). Es schien geradezu, als müsse die Hoffnung, den durchschlagendsten Beweis für die Wahrheit der Coppernicanischen Weltordnung erbringen zu können, endgiltig fallen gelassen werden.

Endlich gelang es Bessel, mittelst einer wesentlichen Abänderung der bisherigen Methode [3]), das wirklich zu erreichen [4]), was noch William Herschel fünfzig Jahre zuvor auf dem gleichen Wege vergeblich angestrebt hatte [5]). Unsere *Fig. 143* liefert uns ein zwar schemati-

---

[1]) Nähere Details über diese erfolglosen Forschungen gibt Mädler (Gesch. d. Himmelsk., 2. Band. S. 64 ff.).

[2]) Calandrelli hatte für Wega in der Leier eine Parallaxe von 5,3", Piazzi für eben diesen Stern von 3" zu erkennen vermeint.

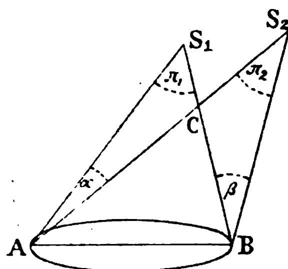
[3]) Man hat wohl (s. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 542) eine Andeutung des Besselschen Verfahrens bereits bei Galilei zu finden geglaubt, doch scheint uns da in die bezüglichen Worte (Dialogus de systemate mundi, Leyden 1641. S. 284 ff.) wohl zuviel hineingelegt zu werden. Es soll daselbst einfach dargethan werden, daß die Parallaxen der Fixsterne je nach ihrer Lage gegen die Ekliptik verschieden groß ausfallen müssen.

[4]) Bessels Untersuchungen über die Parallaxe des Sternpaares 61 Cygni sind in den Jahrgängen 1838—40 der „Astron. Nachrichten" zu finden.

[5]) W. Herschel, On the Parallaxe of the Fixed Stars, Phil. Transact., 1781. S. 82 ff.

sches, jedoch in allen Hauptpunkten zutreffendes Bild des Herschel-Besselschen Verfahrens. S_1 und S_2 sind zwei Sterne, die mit den beiden einander diametral gegenüberliegenden Punkten A und B des Erdbahnkreises in ein und derselben (der Zeichnungs-) Ebene sich befinden. S_1 soll ein hell leuchtender, S_2 ein lichtschwacher Stern sein, von dem angenommen werden kann, daß seine Parallaxe weit hinter derjenigen von S_1 zurückbleibe, also da diese schon sehr klein ist, ganz verschwinde. Denkt man sich die Gesichtslinien AS_1, AS_2, BS_1, BS_2 gezogen, von denen AS_2 und BS_1 sich in C durchschneiden, so sind $\sphericalangle AS_1B = \pi_1$ und $\sphericalangle AS_2B = \pi_2$ resp. die Jahresparallaxen der beiden Sterne, während die Richtungswinkel, $\sphericalangle S_1AS_2 = \alpha$ und $\sphericalangle S_1BS_2 = \beta$, mit größter Schärfe gemessen werden können. Ist dies geschehen, so hat man folgende einfache Beziehungen:

Fig. 143.



$$\alpha + \pi_1 + C = \beta + \pi_2 + C = 180^0,$$

$$\pi_1 - \pi_2 = \beta - \alpha.$$

Die Größe π_2 wird mit Null identifiziert, und man hat somit in der Differenz $(\beta - \alpha)$ eine *obere Grenze für die Jahresparallaxe von* S_1 ermittelt.

Der Doppelstern, an welchem Bessel diese auch unter dem methodischen Gesichtspunkte [1]) hochwichtige Parallaxenbestimmung ausführte, wird in der Geschichte

---

[1]) Wir haben hier vorzüglich die Sorgfalt im Auge, mit welcher Bessel das von ihm bei seinen Beobachtungen benützte Fraunhofersche Heliometer (s. S. 468) immer wieder darauf prüfte, ob nicht irgendwelche Fehlerquellen zu bemerken seien. Mit Recht durfte der große Mann seinen Bericht (Astr. Nachr.. Nr. 402) mit den Worten schließen, daß „an der nahen Richtigkeit der Bestimmung der jährlichen Parallaxe von 61 Cygni nicht mehr zu zweifeln sei“.

der Sternkunde stets in dauerndem Andenken bleiben. Doch blieb dieser erste Fund nicht lange vereinzelt. Bald folgte W. v. Struve nach[1]) und ermittelte die Jahresparallaxe von α Lyrae = 0,2613″ ± 0,0254″, woraus eine *Sonnendistanz dieses Sternes* gleich 771 400 Erdbahnhalbmessern hervorgehen würde. Seitdem ist noch von anderen Forschern auf diesem Gebiete rüstig weiter gearbeitet worden[2]). Henderson und Maclear, Auwers, Winnecke, O. v. Struve u. a. haben wichtige Beiträge geliefert, doch ist die mathematische Erdkunde als solche hierbei nicht weiter interessiert. Wir begnügen uns damit, festzustellen, daß von helleren Sternen der dem Südhimmel angehörige α Centauri als der unserem Sonnensystem nächste — Parallaxe fast eine ganze Sekunde — erkannt, und daß die *Richtigkeit der Lehre von der Jahresbewegung der Erde* unwiderleglich dargethan ist. Auch ein *optisches Verfahren* hat man neuerdings in den Dienst der Aufgabe, Sterndistanzen aufzufinden, zu stellen gesucht[3]).

---

[1]) W. v. Struve, Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae, St. Petersburg 1837, Anhang II („Mensuras proprias inter stellas nonnullas motu proprio insignes exhibens", S. 249 ff.); dazu der ausführliche Bericht des Autors in Nr. 396 der „Astron. Nachr.".

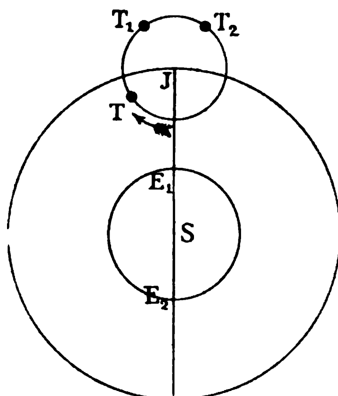
[2]) Näheres hierüber z. B. bei Wolf, Gesch. der Astr., S. 543 ff.; Newcomb-Engelmann, Pop. Astr., S. 225 ff. Auffallend erscheint, daß sehr viele unter den hellsten Sternen bislang noch gar keine Parallaxe haben ermitteln lassen; sie müssen sich also in Fernen befinden, denen gegenüber auch unsere vorgeschrittene Instrumental- und Beobachtungstechnik versagt. Selbst das Zusammentreffen von hellem Glanze und energischer Eigenbewegung (s. Abschnitt IX) gibt noch keine Bürgschaft für das Vorhandensein einer meßbaren Parallaxe. Man hat neuerdings auch bei *physischen Doppelsternen*, die also nicht bloß scheinbar, sondern durch das Band gegenseitiger Attraktion zusammengehören, die Parallaxe rechnerisch, mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes (s. den nächsten Abschnitt) zu ermitteln gesucht und z. B. für α Centauri einen gut stimmenden Wert erhalten (Gyldén, Die Grundlehren der Astronomie, Leipzig 1877. S. 363).

[3]) Wir werden von der Verwendung des Spektroskopes zur Feststellung von quantitativen Beziehungen im Weltraume in Abschnitt IX, wo von den scheinbaren und wirklichen Bewegungen der sogenannten Fixsterne gehandelt wird, noch zu sprechen haben,

Messung der Lichtgeschwindigkeit. Zu diesem Zwecke stehen dem heutigen Stande unserer Kenntnisse zufolge *dreierlei verschiedene Methoden* zur Verfügung[1]): zwei *terrestrische* und eine *astronomische*. Wir beginnen mit der letzteren, welche in der geschichtlichen Entwicklung die erste und zugleich auch wohl die einfachste von allen ist.

Um 1675 beobachteten Dom. Cassini und Olaus Römer gemeinschaftlich auf der Pariser Sternwarte die Verfinsterungen der Juppiterstrabanten, um so genaue

Fig. 144.



Tafeln der Bewegungen dieser Himmelskörper zu erhalten. Dabei machte Römer eine Entdeckung, deren Wesen uns *Fig. 144* versinnlicht. Im gemeinsamen Zentrum der Erd- und Juppitersbahn steht die Sonne S; wenn wir uns für den Augenblick den Juppiter J in seiner momentanen

---

und verweisen hier einstweilen nur auf Dufours „Mémoire sur une nouvelle méthode pour déterminer la distance de quelques étoiles" (Bulletin de la Soc. Vaudoise des sc. phys. et nat., 10. Band. S. 1 ff.).

[1]) Vgl. hierzu die einen sehr guten Ueberblick gewährende Schrift: V. Schlegel, Ueber die Methoden zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes, Hamburg 1887.

Stellung stabil, die Erde allein beweglich denken, so steht in E_1 die Erde in Konjunktion, in E_2 in Opposition mit dem genannten Planeten. Der um J als Mittelpunkt beschriebene Kreis stellt die Bahn eines Trabanten T' vor, der in T_1 in den Planetenschatten ein- und in T_2 aus diesem austreten möge. Römer bestimmte die Zeiten des Ein- und Austrittes t_1 und t_2, sowie t_1' und t_2' sowohl für die Position E_1 wie auch für die Position E_2 der Erde und fand, daß $t_1' > t_1$, $t_2' > t_2$ war, mit anderen Worten: *Zur Zeit der Konjunktion tritt ein und dasselbe objektive Phänomen früher ein, als zur Zeit der Opposition.* Im ersteren Falle hat das Licht die Wege T_1E_1 und T_2E_1, im zweiten Falle hat es die Wege T_1E_2 und T_2E_2 zu durchlaufen, und wir können uns folglich mit Römer[1]) die Sache nur dadurch begreiflich machen, daß wir annehmen: *Zur Durchlaufung eines grösseren Weges benötigt das Licht mehr Zeit als zur Durchlaufung eines kleineren, die Fortpflanzung ist also keine plötzliche, instantane* [2]).

Da die bezüglichen Wege ziemlich genau bekannt sind, so konnte Römer die *konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes* [3]) mit großer Sicherheit ermitteln und fand sie größer als 40 000 geogr. Meilen (in der Sekunde). Neuere Bestimmungen von Delambre, W. v. Struve u. a. ergaben, daß das Licht $8^m\ 35^s$ nötig hat[4]), um die mittlere Entfernung von Sonne und Erde zurückzulegen.

---

[1]) Römer, Démonstration touchant le mouvement de la lumière, Anc. Mém. de l'Acad. de Paris, 1. und 10. Band; s. auch Duhamels Akademiegeschichte, Paris 1698. S. 156.

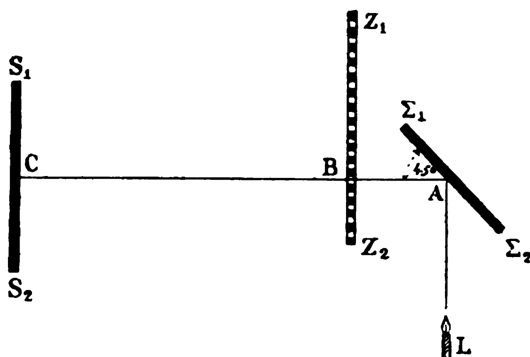
[2]) Merkwürdigerweise kam Cassini von seiner ursprünglichen Uebereinstimmung mit Römers Ansicht („que la lumière emploie quelque temps à venir du satellite jusqu'à nous") zurück und suchte nach gezwungenen Erklärungen für den gefundenen Zeitunterschied.

[3]) Konstant ist natürlich diese Geschwindigkeit nur für *ein und dasselbe Medium.*

[4]) Den neuesten hochwichtigen Forschungen von Hertz zufolge, deren Hauptresultate Oberbecks Aufsatz „Elektrische Schwingungen" (Humboldt, 8. Jahrgang. S. 329 ff.) übersichtlich

Einem von **Arago** ausgedachten Gedanken praktische Folge gebend, stellte **Fizeau**[1]) einen geistvoll konstruierten Apparat zusammen, der in *Fig. 145* in schematischer Vereinfachung, ohne Sammellinsen u. dgl., abgebildet ist. $S_1 S_2$ und $\Sigma_1 \Sigma_2$ sind zwei Planspiegel, deren Ebenen einen Winkel von 45⁰ miteinander einschließen,

Fig. 145.



so zwar, daß die Entfernung CA der Spiegelmittelpunkte eine beträchtliche (16—20 km) ist. In L ist eine Lichtquelle so angebracht, daß ein zu $S_1 S_2$ parallel verlaufender Strahl in A unter einem halben rechten Winkel zurückgeworfen wird; derselbe trifft dann den Spiegel $S_1 S_2$ senkrecht in C und wird in seiner eigenen Richtung reflektiert. Nahe bei A ist ein Zahnrad $Z_1 Z_2$ parallel zu $S_1 S_2$ und LA so aufgestellt, daß der reflektierte Strahl AC gerade durch eine Lücke der Verzahnung passieren kann; nimmt man also den Spiegel $\Sigma_1 \Sigma_2$ unbelegt, so wird ein hinter A in der Verlängerung von CA befind-

---

vorführt, scheint zwischen den Translationsgeschwindigkeiten von Licht und Elektrizität (s. S. 594) kaum ein Unterschied obzuwalten.

[1]) Fizeau-Bréguet, Sur l'expérience relative à la vitesse comparative de la lumière dans l'air et dans l'eau, Compt. rend., 30. Band. S. 771 ff.

liches Auge einen hellen Lichtpunkt erblicken. Auch nachdem das Rad mittelst Kurbel und Schnurlauf in Drehung versetzt ist, wird das erwähnte Auge den Lichtpunkt erkennen; nachdem aber eine gewisse angulare Umdrehungsgeschwindigkeit erreicht ist, wird plötzlich dieser Punkt verschwinden. *Der nach C gesandte Lichtstrahl ging eben gerade noch durch die Lücke, der rückkehrende aber hat bereits einen seinen Durchpass verhindernden Zahn getroffen.* Der an der Rotationsvorrichtung angebrachte Index gibt uns die im fraglichen Zeitpunkte erreichte Umdrehungsdauer des Rades $= T$; wenn je n Zähne und Lücken am Umfange sich befinden, so ist die Zeit, während welcher eine Lücke vorbeipassiert, $= \frac{T}{2n}$; wenn dann c die gesuchte Lichtgeschwindigkeit, $b = AC$, $d = AL$ ist, so hat man

$$\frac{T}{2n} = \frac{2b + d}{c}; \; c = \frac{2n(2b + d)}{T}.$$

Eine auf die Fizeauschen Versuche begründete Berechnung lieferte für c einen Wert, der etwas größer war, als der Römersche. Cornu[1]) hat das Verfahren Fizeaus noch sehr verfeinert und gefunden, daß für den *luftleeren Raum*, wie er jenseits der Erdatmosphäre vorhanden ist (s. übrigens u. in Abschnitt VII), die Konstante $c =$ 300400 km gesetzt werden müsse.

Auch *Foucaults Methode des rotierenden Spiegels* darf nicht unbesprochen bleiben[2]). $C_1 C_2$ *(Fig. 146)* ist ein fest aufgestellter Konkavpiegel, und in gehöriger Entfernung von diesem befindet sich der um eine (auf der Zeichnungsebene senkrecht stehende) Achse in schnelle Rotation zu versetzende Planspiegel AB, dessen Dreh-

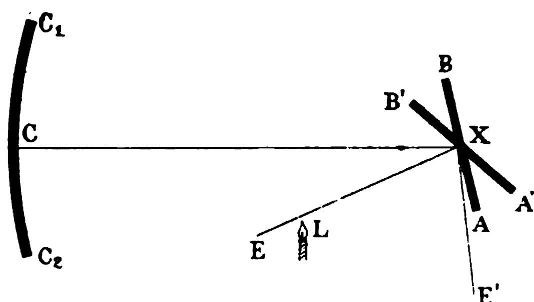
---

[1]) Cornu, Détermination de la vitesse de la lumière d'après les expériences exactes en 1874 entre l'Observatoire et Montlhéry, Ann. de l'Observatoire de Paris, 1876.

[2]) Foucault, Méthode générale pour mesurer la vitesse de la lumière dans l'air et es les milieux transparents, Compt. rend., 30. Band. S. 771 ff. S. auch Schlegel, a. a. O., S. 19 ff.; Newcomb-Engelmann, Pop. Astr., S. 241.

punkt X heißen möge. Der von der Lichtquelle L nach X gesandte Strahl EX wird vom Spiegel AB dem Hohlspiegel C_1C_2 zugeschickt, trifft diesen rechtwinklig in C und

Fig. 146.

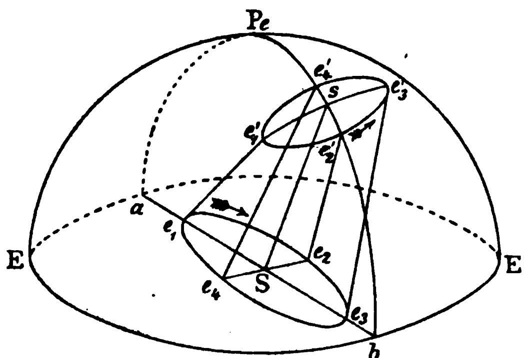


geht somit in sich selbst zurück, so daß er das bei E gedachte Auge wieder erreicht. An diesem Sachverhalte wird auch nichts geändert, wenn sich AB um X zu drehen beginnt; erst wenn eine hinreichende Umdrehungsgeschwindigkeit erreicht ist, trifft der zurückkehende und von dem Planspiegel zurückgeworfene Lichtstrahl nicht mehr das in E befindliche Auge, sondern da jetzt $A'B'$ die Richtung des Spiegels geworden ist, so wird XE' der zweimal reflektierte Strahl sein. Aus geometrischen Gründen ist $\sphericalangle\, EXE' = 2 \,.\, \sphericalangle\, AXA' = 2 \,.\, \sphericalangle\, BXB'$ oder $\sphericalangle\, EXE'$ kann gemessen werden, und da auch die Rotationsgeschwindigkeit von AB bekannt ist, so läßt sich auch die Zeit bestimmen, welche das Licht zur Durchlaufung des Weges $2XC$ gebraucht hat. Die nach Foucault ermittelte Lichtkonstante weicht nur unerheblich von der aus den Fizeauschen Experimenten erschlossenen ab.

Die Aberration des Lichtes. Die Thatsache, daß das Licht eine *endliche, angebbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit* besitzt, darf nunmehr als feststehend angenommen werden, und auf sie gestützt vermögen wir

uns auch die merkwürdige Erscheinung der *Lichtabirrung* zu erklären, welche Bradley im Jahre 1726 entdeckte und zwei Jahre darauf bekannt machte [1]). Jahrelang bemühte sich der Genannte im Vereine mit Molyneux, durch unausgesetzte Beobachtung zweier dem Nordpole des Himmels nicht sehr ferne stehender und für den Beobachtungsplatz annähernd zenitaler Sterne — γ Draconis und 35 Camelopardi [2]) — die von der Jahresparallaxe bedingte Ellipse (S. 704) herauszufinden; *er fand auch eine*

Fig. 147.



Jahreskurve von ovaler Gestalt auf, allein die Lage derselben war eine ganz andere, als nach der parallaktischen Theorie zu erwarten gewesen wäre. Die neue Ellipse lag nämlich nicht, wie wir in *Fig. 142* sahen, perspektivisch zur Erdbahn, sondern die gegenseitigen Lageverhältnisse waren so, wie sie *Fig. 147* zur Darstellung bringt. EE' ist wieder die Ekliptik, deren Pol P_e ist; e_1, e_2, e_3, e_4

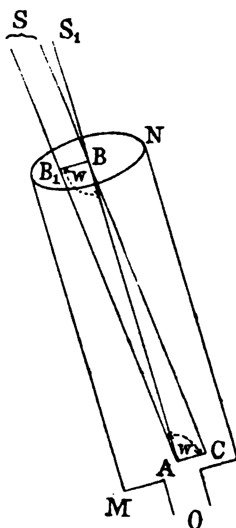
---

[1]) Bradley, Account of a new discovered Motion of the Fixed Stars, Phil. Transact., 1726—28. S. 637 ff. Die nur die Hauptpunkte klar hervorhebende Note erscheint als Schreiben an Halley.

[2]) Es muß daran erinnert werden, daß man zur Bezeichnung der Fixsterne sich zunächst des griechischen und dann des lateinischen Alphabetes, wenn aber auch dies nicht mehr ausreicht, der Bezeichnung durch Zahlen bedient.

sind die vier ausgezeichneten Positionen der Erde in ihrer Bahn; die durch e_1, e_3, resp. e_2, e_4 gezogenen Graden schneiden sich in der Sonne S, und der größte Kreis, den man durch P_s und die Punkte a, b, in denen die Linie $e_1\ e_3$ der Himmelskugel begegnet, gelegt denken kann, steht auf der Ekliptik senkrecht. Den vier Kardinalpunkten der Erdbahn entsprachen bei Bradleys Beobachtungen bezüglich die vier Punkte $e_1'\ e_2'\ e_3'\ e_4'$ der Himmelskugel so, daß wenn man durch sie eine ellipsenähnliche Kurve hindurchlegte, der Achse $e_1\ e_3$ eine Achse $e_2'\ e_4'$ und der Achse $e_2\ e_4$ eine Achse $e_1'\ e_3'$ zugeordnet werden musste: *Die parallaktische Ellipse erschien gewissermassen um 90° gedreht, während der Mittelpunkt, der wahre Sternort s, seine Lage behauptet hatte.* Bradley konnte sich diese unerwartete Wahrnehmung nur durch den Umstand erklären, daß während der Zeit, welche das Licht vom Sterne zu der sich bewegenden Erde braucht, diese selbst einen immerhin beträchtlichen Weg im Raume zurückgelegt hatte, und die Folgezeit hat seiner Deutung des Vorganges vollauf recht gegeben.

Fig. 148.



Die elementare mathematische Theorie der *Aberration des Lichtes* läßt sich in folgender Weise [1]) geben. *MN (Fig. 148)* ist das Beobachtungsfernrohr, O dessen Okular und S der lichtaussendende Fixstern. Stände das Fernrohr unbeweglich, so würde der Strahl das Okular in C treffen; thatsächlich aber sieht das Auge den Stern in S_1, in der Ver-

[1]) Eine sehr gute Darstellung ist die bei Israel-Holzwart (Elemente der sphärischen Astronomie, Wiesbaden 1882. S. 50 ff.).

längerung der Fernrohrachse, weil der Lichtstrahl eine durch $\sphericalangle ABC = \sphericalangle SAS_1 = \alpha$ gemessene Ablenkung, die wir eben die Aberration nennen, erleidet. BC entspricht der Lichtgeschwindigkeit c, $AC = BB_1$ der Fortschreitungsgeschwindigkeit c' der Erde in ihrer Bahn, und wenn wir w den Winkel nennen, welche der wahre Lichtstrahl mit der momentanen Bewegungsrichtung der Erde einschließt, so hat man nach dem Sinussatze [1])

$$\frac{\sin(\sphericalangle BAC)}{\sin(\sphericalangle ABC)} = \frac{BC}{AC}\,; \quad \frac{\sin(w-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{c}{c'} \equiv f;$$

$$\alpha = \text{arc tang}\,\frac{f \sin w}{1 + f \cos w} = \frac{f \sin w}{1 + f \cos w}\,.\,\text{cotang}\,1''$$

$$= \left[\,206267\,.\,\frac{f \sin w}{1 + f \cos w}\right]''.$$

Man sieht, daß für $w = 0$ und $w = 180^0$ die Aberration Null, für $w = 90^0$ ein Maximum wird [2]). Dieses Maximum des Ablenkungswinkels nennt man die *Aberrationskonstante* [3]). Wir unterlassen es, im Texte weiter auf

[1]) Rechnerisch sei zu den Schlußformeln bemerkt, daß es, wenn nur sehr kleine Winkel in Frage kommen, erlaubt ist, Tangens und Bogen proportional, also $\text{tang}\,(\alpha\,.\,1)'' = \alpha\,\text{tang}\,1''$ zu setzen. Von dieser Näherungsformel wird in den astronomischen Rechnungen ein umfassender Gebrauch gemacht.

[2]) Von Bradley wird, um zunächst einen generellen Einblick zu gewinnen — für die analytische Erörterung der Frage zog er nachher Machin als Hilfskraft bei —, dieser einfachste Fall einer Maximalaberration der Betrachtung (a. a. O.) zu grunde gelegt.

[3]) Folgende Bestimmungen der Aberrationskonstante mögen hier angeführt werden: v. Lindenau (Versuch einer neuen Bestimmung der Nutations- und Aberrationskonstanten, Berlin 1842) fand 20,4486″, Lundahl (De numeris nutationis et aberrationis constantibus, Helsingfors 1842) fand 20,5508″, W. v. Struve (Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes, St. Pétersbourg 1843) fand 20,4451″. Die neuesten Abhandlungen über das Problem rühren her von Nyrén (Zur Aberration der Fixsterne, Mélanges math. et astr. tirés du bull. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, 6. Band. S. 653 ff.) und von Küstner (Neue Methode zur

die manch schwierige Einzelfragen in sich schließende Lehre von der Aberration [1]) einzugehen, und begnügen uns mit der Erkenntnis:

Nachdem vorher die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes erkannt war, ist in der Existenz der Aberration ein ebenso exakter Beweis für die Fortbewegung der Erde im Raume anzuerkennen, wie in der Parallaxe der Fixsterne.

VI. Keplers und Newtons Vervollkommnungen der Coppernicanischen Lehre.

Die drei Keplerschen Gesetze. Zeit seines Lebens war Johannes Kepler (27. Dezember 1571 bis 5./15. November 1631) unabläßig damit beschäftigt, die Weltordnung des Coppernicus weiter auszugestalten und von den mancherlei ihr noch anhaftenden Mängeln zu befreien [2]).

Bestimmung der Aberrationskonstante nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe, Berlin 1888). Die hier erwähnte neue Methode ist diejenige Talcotts (s. o. S. 554), welche Küstner für die Ermittlung der Lichtabweichung aptiert hat.

[1]) Wir haben hier besonders die physikalischen Arbeiten im Auge, welche gewisse zwischen der üblichen Theorie der Lichtablenkung und der Vibrationstheorie bestehende Widersprüche zu heben bezwecken; vgl. Klinkerfues, Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie, Leipzig 1867, Ketteler, Astronomische Undulationstheorie, Bonn 1873. — Auf eine neue Aberrationserscheinung macht aufmerksam Birkenmajer (Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten in der Bewegung der physischen Doppelsterne, Sitzungsber. d. k. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, 2. Abteilung, 93. Band). Die gegenseitige Stellung beider Sterne ist so, wie wir sie beobachten, nicht die wahre; sie wäre dies vielmehr nur dann, wenn entweder das Licht ohne Zeitverbrauch sich fortpflanzte, oder wenn wenigstens die Sterne genau gleichweit von der Erde abstünden.

[2]) Es fehlt nicht an Schriften, welche den allmählichen, aus den Quellen selbst nicht ohne große Mühe zu erschließenden Fortschritt in Keplers kosmologischer Erkenntnis beleuchten; wir nennen davon: Apelt, Johann Keplers astronomische Weltansicht, Leipzig 1849; Reuschle, Kepler und die Astronomie, Frankfurt a. M. 1871; Göbel, Ueber Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen, ein Beitrag zur Entdeckungsgeschichte seiner Gesetze, Halle 1871. Einen ganz vortrefflichen Auszug aus

Nachdem er sich von der Unhaltbarkeit der in seinem Jugendwerke [1]) ausgeführten Idee einer stereometrischen Konstruktion des Planetensystemes durch die dem außerordentlichen Manne eigene strenge Selbstkritik überzeugt, arbeitete er sich mit dem größten Eifer durch das von Tycho Brahe aufgehäufte Beobachtungsmaterial hindurch, um an dem speziellen Falle des Planeten Mars die wahre Natur der planetarischen Bewegungen zu erkennen.

Ursprünglich behielt er dabei die Exzenter und Epizykel — die „Bretzeln" des Ptolemäus, wie er sich scherzweise einmal ausdrückte — noch bei und erst nach und nach warf er diesen Ballast als unbrauchbar über Bord [2]). Das große Werk über den Mars [3]) entwickelt die Grundzüge der „neuen" Astronomie. Schon verhältnismäßig früh, ehe er sich über die Art der Planetenbahn noch irgend im klaren war, bemerkte er, daß die Bewegung des Wandelsternes in seiner Bahn eine um so langsamere sei, je weiter er vom physischen Zentrum — vom Sitze der *„vis motrix"* — entfernt sei [4]), und von da war es nur noch ein Schritt zur Auffindung desjenigen Lehrsatzes, welcher chronologisch als *erstes Keplersches Gesetz* bezeichnet werden muß:

Der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten auch gleiche Flächenräume.

---

der Hauptschrift bietet auch Frischauf (Grundriß der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetenbahnen, Graz 1871. S. 115 ff.).

[1]) Kepler, Prodromus dissertationum cosmographicarum continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione coelestium orbium, Tübingen 1596.

[2]) Einen vorzüglichen, in der Geschichte der Naturwissenschaften kaum jemals ähnlich wiederkehrenden Einblick in Keplers Geisteswerkstatt, in sein Suchen und Finden gewährt sein Briefwechsel mit verschiedenen Gelehrten, den Frisch seiner Gesamtausgabe der Keplerschen Werke (3. Band. S. 23 ff.) einverleibt hat.

[3]) Kepler, Astronomia nova αἰτιολογητος, seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis, Prag 1609; bei Frisch im 3. Bande, S. 135 ff.

[4]) Am letzterwähnten Orte, S. 300 ff.

Die Bahn der Planeten hielt Kepler anfänglich, nachdem er sich von der Hypothese des exzentrischen Kreises völlig frei gemacht hatte, für eine *Ellipsoide* oder *Ovale*[1]), wie sie durch einen Achsenschnitt eines gewöhnlichen Ei's entsteht. Als er jedoch die von ihm berechneten Distanzen und Richtungswinkel unter dieser Voraussetzung berechnete, konnte er die wünschenswerte Uebereinstimmung mit den Beobachtungen nicht erzielen und verwarf die kaum aufgenommene Theorie wieder[2]). Endlich aber drang er zu der Ueberzeugung durch, welcher er in der Ueberschrift des 59. Kapitels diese Fassung gibt: *„Demonstratio, quod orbita Martis, librati in diametro epicycli, fiat perfecta ellipsis.“* Was jedoch für den Mars, dessen verhältnismäßig stark vom Kreise abweichende Bahn die Entdeckung jedenfalls erleichterte, als richtig nachgewiesen war, das ließ sich auch auf die übrigen Wandelsterne übertragen, und so entstand das *zweite Keplersche Gesetz:*

Jede Planetenbahn, also auch die Erdbahn, ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

Eine dritte Entdeckung von Belang diesen beiden hinzuzufügen, war Kepler erst in späterer Zeit vergönnt. In seinem Bestreben, musikalische Harmonie oder geometrische Symmetrie in allen kosmischen Beziehungen aufzufinden, verglich er alle möglichen Zahlenverhältnisse, die sich aus den Elementen der Planetenbahnen herauslesen ließen, und gelangte so, vom glücklichsten Instinkte geleitet, zu einer ziffernmäßigen Wahrheit[3]): *„Sed res est certissima exactissimaque, quod proportio, quae est inter*

---

[1]) Frisch' Ausgabe, 3. Band. S. 337. „Orbitam planetae non esse circulum, sed figurae ovalis.“

[2]) Sehr nahe war, wie der Briefwechsel ergibt, auch Keplers Freund Fabricius der Entdeckung des „zweiten“ Gesetzes gekommen; er verwendete auch wirklich die Ellipse bei seinen Rechnungen, ließ aber, in Unkenntnis des „ersten“ Gesetzes, die Winkel und nicht die Sektoren der Zeit proportional sich ändern (Wolf, Gesch. d. Astr., S. 297) und kam so zu irrigen Ergebnissen.

[3]) In dieser Form ist der Satz bloß angenähert richtig, da in der strengen Fassung auch die Planetenmassen auftreten. Diese aber sind sämtlich der Sonnenmasse gegenüber verschwindend klein.

binorum quorum cunque planetarum tempora periodica, sit praecise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est orbium ipsorum." Uebertragen wir den Satz aus der Terminologie des 17. Jahrhunderts in die uns geläufige Sprache, so erhalten wir als *drittes Keplersches Gesetz* [1]) das folgende:

Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier beliebiger Planeten verhalten sich zu einander, wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Dieser Lehrsatz gibt uns, wie man sieht, ein Mittel an die Hand, um *ohne Parallaxenbestimmung* (S. 596 ff.) mit großer Annäherung die Sonnendistanz jedes Wandelsternes auf die zur Einheit gewählte *Sonnendistanz der Erde* zurückzuführen. Die Erde vollzieht ihren Umlauf um den Zentralkörper in 365,25 Tagen; der von der Sonne um x Normaleinheiten abstehende Planet braucht dazu n Tage; alsdann hat man

$$1^3 : x^3 = 365{,}25^2 : n^2;\ x = \sqrt[3]{(n : 365{,}25)^2}.$$

Prüft man mittelst dieses Kriteriums die oben (S. 614) tabellarisch zusammengestellten Entfernungen innerhalb unseres Planetensystemes, so ergibt sich durchweg eine gute Uebereinstimmung.

Das dritte Keplersche Gesetz ist von Anfang an unangetastet geblieben. Gegen das erste und zweite erhob sich allerdings hie und da einiger Widerspruch [2]),

---

[1]) Das Gesetz wird so formuliert auf S. 189 der „Harmonices mundi libri V" (Linz 1619); in der Frischschen Ausgabe 5. Band. S. 279.

[2]) Die elliptische Gestalt der Planetenbahnen bestritt in einer Jugendschrift (Nova methodus inveniendi geometrice et directe apogaea, excentricitates et anomalias motus planetarum, Bologna 1669) Cassini, indem er eine *lemniskatische* (s. S. 619) dafür angenommen wissen wollte. Andere wieder gaben zwar das zweite Gesetz völlig zu, mäkelten aber dafür an dem ersten und behaupteten, die elliptische Bewegung vollziehe sich so, daß ein vom zweiten, nicht vom Attraktionszentrum eingenommenen Brennpunkte ausgehender Fahrstrahl *gleiche Winkel* (nicht Sektoren) *in gleichen Zeiten* überstreiche. Auf diese Hypothese begründen astronomische Systeme die nachstehend aufgezählten Schriften: Bouillaud, Astronomia

der jedoch verstummte, nachdem die *kausale Ableitung der drei Theoreme aus dem Prinzipe der allgemeinen Schwere* gelungen war. Dieser Fortschritt, der zugleich die *physische Astronomie* begründete, ist Isaak Newton (25. Dezember a. St. 1642 — 5. Januar a. St. 1727) zu danken.

Newtons Entdeckung der Gravitation. Was man sich unter der *Gravitation* zu denken habe, welches der allgemeine mathematische Ausdruck für ihre Wirkungsweise sei, das ist bereits früher (S. 401 ff.) ausführlich dargethan worden. Allein gerade aus den *astronomischen Aeusserungen* der Schwerkraft hat Newton deren Gesetz erschlossen, nachdem vorher nur schwache und unvollständige Andeutungen über das Walten einer solchen Weltkraft gegeben worden waren[1]). So leicht, wie Kepler, hat es uns Newton freilich nicht gemacht, den Gedankengang, welcher ihn bei seiner Entdeckung leitete, nachdenken zu können; sein großes zum öfteren schon zitiertes Hauptwerk ist die Frucht langjähriger Arbeit und führt uns die einzelnen Wahrheiten so vor, wie sie *deduktiv* gefunden wurden. Nur aus Erzählungen von Newtons Verwandten und Freunden, unter denen Pemberton in erster Reihe steht[2]), kann man das einfache Verfahren kennen lernen, mittelst dessen der große Denker sich zu der Generalisation erhob, daß dieselbe Kraft, welche den fallenden Stein beeinflußt, auch die Himmelskörper in ihren Bahnen lenke.

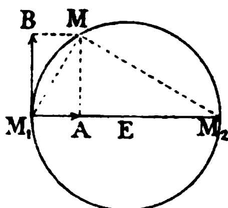
Philolaica, Paris 1645; Sethus Wardus, Astronomia geometrica, London 1658; Graf Pagan, Tractatus de theoria planetarum, Paris 1658.

[1]) Neben Coppernicus, Kepler (S. 401) u. a., die an eine freilich gewöhnlich mit dem Magnetismus verwechselte kosmische Schwere dachten, ist als der Newtonschen Entdeckung am nächsten gekommen zu nennen Borelli (s. Wolf, Gesch. d. Astr., S. 410. S. 446).

[2]) Pemberton, View of Sir Isaac Newtons Philosophy, London 1728. Wesentlich an diese Vorlage hält sich mit Recht J. J. v. Littrow (Geschichte der Entdeckung der allgemeinen Gravitation durch Newton, Wien 1835).

Newton betrachtete im Sinne unserer *Fig. 149* die Kreisbahn des Mondes[1]). E bezeichnet die Stellung der Erde, $M_1 M_2$ ist ein Durchmesser der Mondbahn, und wir betrachten das sehr — im strengen Sinne unendlich — kleine Stück der Bahn, welches zwischen den Punkten M_1 und M gelegen ist, und welches ohne Fehler als mit der Sehne $M M_1$ zusammenfallend gedacht werden kann. $M_1 M$ kann mit der linearen Geschwindigkeit des Mondes v identifiziert werden, so daß, wenn ρ den Radius $E M_1$, T die Umlaufszeit unseres Begleiters bedeutet,

Fig. 149.



$$M_1 M = v = \frac{2 \rho \pi}{T}$$

gesetzt werden kann. Nun war Newton bereits mit den durch Huygens (s. S. 338) gefundenen *Gesetzen der Zentralbewegung* bekannt; er zerlegte gemäß diesen die Bewegung $M_1 M$ in die beiden Komponenten $M_1 B$ und $M A$, deren erstere zur Bahnkurve *tangential*, deren zweite zu derselben *normal* war, und sagte sich: In der Zeiteinheit fällt der Mond durch die Strecke $M_1 A$ gegen die Erde hin, und er würde überhaupt auf die Erde fallen, wenn nicht noch die Tangentialbewegung $M_1 B$ vorhanden wäre. Diese Fallgröße $M_1 A$ ist leicht zu bestimmen, denn da $\Delta M_1 M A \backsim \Delta M_1 M_2 M$ ist, so hat man die Proportion $M_1 A : M_1 M = M_1 M : M_1 M_2$, woraus

$$M_1 A = \frac{\overline{M_1 M}^2}{M_1 M_2} = \frac{v^2}{2 \rho} = \frac{2 \rho \pi^2}{T^2}$$

sich ergibt. Wenn nun wirklich *ein und dieselbe Kraft* es ist, welche den Mond und den losgelassenen Stein zur

[1]) Daß die Bahn des Mondes kein geometrischer Kreis sei, wußte Newton wohl, doch ist die Abweichung der Mondellipse vom Kreise eine hinlänglich geringe, um die Anwendung obigen Verfahrens zu rechtfertigen.

Erde herabzieht, so müssen sich die Fallräume der ersten Sekunde wie die Anziehungskräfte oder angenähert — da die Mondmasse der Erdmasse gegenüber strenge genommen nicht vernachlässigt werden dürfte — wie die Brüche $\frac{1}{\rho^2} : \frac{1}{r^2}$ verhalten. Der Fallraum in der ersten Sekunde ist für irdische Körper aber bekannt, nämlich gleich $\frac{1}{2} g$ (S. 346), also müsste die Proportion $\frac{2\rho\pi^2}{T^2} : \frac{1}{2} g = \frac{1}{\rho^2} : \frac{1}{r^2}$ zu Recht bestehen. In ihr kommen ausschließlich bekannte Größen[1]) vor, und Newton sah seine Erwartung durch die Richtigkeit der Bedingungsgleichung bestätigt.

Nunmehr lag ihm noch ob, für jede Planetenbahn den Fallraum in der ersten Sekunde zu ermitteln und mit seinem Attraktionsgesetze zu vergleichen. Auch diesmal stellte sich ein so hohes Maß von Uebereinstimmung heraus, wie es nur irgend erwartet werden konnte, und so war der Erfahrungssatz bewiesen:

Die Kraft, mit der Sonne und Planet anziehend auf einander wirken, ist dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional.

Die heutige Form des Gravitationsgesetzes, wonach wenn m_1 und m_2 die sich anziehenden Massen sind, wenn deren Attraktionsmittelpunkte den Abstand R haben, und wenn q einen Zahlenfaktor bedeutet, der Ausdruck $q \frac{m_1 m_2}{R^2}$ das *Mass der gegenseitigen Anziehung* vorstellt, konnte nicht auf gleichem Wege empirisch erhalten

[1]) Der bezüglichen Rechnung legte Newton zuerst einen falschen Wert von r und, da er ρ als Vielfaches von r ausgedrückt hatte, auch von ρ zu grunde. So konnte die Rechnung nicht stimmen, und dies bewog ihn, seinen Gedanken überhaupt eine andere Richtung zu geben. Erst als er die durch Picards Gradmessung (s. S. 281) eruierte genauere Zahl für r in seine Bedingungsgleichung einsetzte, überzeugte er sich zu seiner Freude von der Richtigkeit seiner Voraussetzungen.

werden. Sie ist das Resultat späterer theoretischer Erwägungen.

Beweis der drei Gesetze von Kepler. Die allgemeine Gravitation, in Verbindung mit dem *Trägheitsgesetze*, sowie mit dem *Gesetze der lebendigen Kraft*[1]), genügt uns, um die von Kepler (s. o.) auf dem Wege scharfsinnigsten Tatonnements aufgefundenen drei Fundamentalsätze der planetarischen Bewegung als *notwendig* zu erweisen. Dieser Beweis bedarf keiner anderer als ganz elementarer Hilfsmittel[2]).

Beweis des ersten Gesetzes. A *(Fig. 150)* sei die momentane Stellung eines Planeten, den die Anziehungskraft AG nach dem Zentralpunkte C hintreibt, während ersterer, wenn ausschließlich die Tangentialkraft AB wirksam wäre, einen Weg gleich AB beschreiben würde. Der doppelte Impuls nötigt den Planeten, in der ersten Zeiteinheit die Diagonale AA_1 des Parallelogrammes ABA_1G zurückzulegen, und das ihm eingepflanzte Beharrungsvermögen würde ihn in der nächsten Zeiteinheit durch den Weg A_1B_1 sich bewegen lassen, der in der Verlängerung von AA_1 und dieser Strecke gleich wäre, wenn nicht wiederum eine Attraktionskraft A_1G_1 — für $CA_1 < CA$ ist $A_1G_1 > AG$ — vorhanden wäre; thatsächlich also kommt der Planet am Ende der zweiten Zeiteinheit

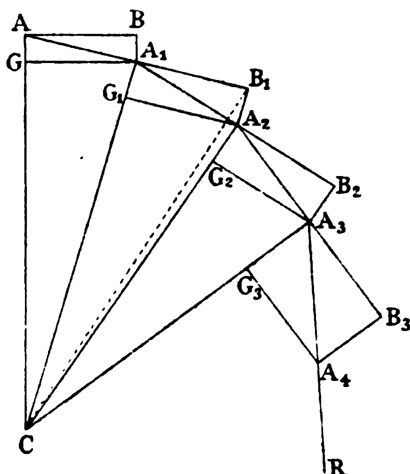
---

[1]) Eine Kraft P von gleichbleibender Größe erteilt dem von ihr betroffenen Körper eine *Beschleunigung* a, so daß, wenn m die Masse des Körpers, v_0 seine Anfangsgeschwindigkeit, v die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit sind, die Gleichungen $P = am$ und $at = v - v_0$ bestehen. Schafft man a weg, so wird $Pt = m(v - v_0)$; jedes dieser Produkte ward von Galilei die *Bewegungsgrösse* genannt. In der Zeit t wird bei gleichförmig beschleunigter Bewegung ein Weg $s = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$ zurückgelegt, und wenn man jetzt endlich t eliminiert, so bleibt $Ps = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$ übrig. Die links stehende Größe ist die uns schon von S. 405 bekannte *mechanische Arbeit*, die rechts stehende wird *lebendige Kraft* (besser *Potenz*) genannt.

[2]) Vgl. Hubert Müllers verdienstliche Schrift „Die Keplerschen Gesetze" (Braunschweig 1870).

in A_2, dem vierten Eckpunkte des Parallelogrammes $A_1 B_1 A_2 G_1$ an. Zieht man nun CA_2 und CB_1 und

Fig. 150.



wendet zweimal den Satz an, daß Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen gleichen Flächeninhalt besitzen, so hat man nach Konstruktion:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta CAA_1 = \Delta CA_1B_1, \\ \Delta CA_1B_1 = \Delta CA_1A_2,\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{durch Komparation } \Delta CAA_1 \\ = \Delta CA_1A_2.\end{array}$$

Zwei in gleichen Zeiträumen von kleinster Dauer gebildete Sektoren zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zentralfahrstrahlen sind also flächengleich, und wenn man beliebige, endliche, aber in gleicher Zeit überstrichene Sektoren in Elementardreiecke der bezeichneten Art sich zerlegt denkt, so zeigt sich allgemein, daß, wie es das erste Keplersche Gesetz fordert, zu gleichen Zeiten auch gleiche Sektoren gehören.

Konstruiert man in derselben Weise die Parallelogramme $A_2 B_2 A_3 G_2$, $A_3 B_3 A_4 G_3$ u. s. w., so sieht man, wie die gebrochene Linie $A A_1 A_2 A_3 A_4 R$ . . . die

Planetenbahn darstellt. Da die einzelnen Seiten dieses Polygonalzuges unendlich klein anzunehmen sind, so ist die fragliche Bahn in Wirklichkeit eine *stetig gekrümmte Linie* — was für eine, werden wir sofort erfahren.

Beweis des zweiten Gesetzes. Von Newton wurde diesem Gesetz das folgende allgemeinere substituiert[1]): *Jedes Mobil, auf welches einmal eine Stosskraft wirkte, während es zugleich stetig von einem festen Punkte angezogen wird, beschreibt unter der Einwirkung der einmaligen und der konstant wirkenden Kraft eine Kurve zweiter Ordnung, einen Kegelschnitt.* Wir beweisen den Satz in dieser neueren Fassung.

Das angezogene Mobil befinde sich im Beginne seiner Bewegung, zur Zeit 0, in einem Abstande ρ_0 vom Zentralkörper, die auf die momentane Bewegungsrichtung aus jenem gefällte Senkrechte sei G_0, die Anfangsgeschwindigkeit v_0, während ρ, G, v eben diese Größe nach Ablauf der Zeit t sein sollen. Nach dem ersten Gesetze ist

$$\text{I.}\quad v_0 G_0 = v G = \beta,$$

wo β eine Konstante bedeutet; versteht man unter k eine zweite Konstante, so ist nach dem Gesetze von der lebendigen Potenz (s. u.), wenn noch die Masse des Mobiles $= 1$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2}(v^2 - v^2_0) = k\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right);$$

hieraus folgt

$$\text{II.}\quad \frac{v^2}{2} = \frac{k}{\rho} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{\rho_0}\right) = \frac{k}{\rho} + \alpha,$$

wo ersichtlich wieder α eine konstante Zahl bedeutet. Die beiden Gleichungen I und II gestatten die Elimination der Geschwindigkeit v, so daß die Gleichung

$$\text{III.}\quad G^2 = \rho \,.\, \beta^2 \,.\, \frac{1}{2(\alpha\rho + k)}$$

---

[1]) Newton-Wolfers, S. 69 ff.

eine *charakteristische Eigenschaft der gesuchten Bahnkurve* angiebt. Die Diskussion von Gleichung III muß den Beweis unserer Behauptung liefern [1]).

Für $\alpha = 0$ ist diese Kurve eine *Parabel*. Geben wir im allgemeinen Falle der Gleichung die Form $\frac{\beta^2}{2G^2} - \frac{k}{\rho} = \alpha$, unter α einen positiven Wert verstanden, so ist klar, daß auch für $\rho = \infty$ die Gleichung noch einen Sinn hat; die Kurve verläuft ins Unendliche, ist eine *Hyperbel*. Wenn endlich α negativ, gleich $-\alpha'$, wird, so nimmt Gleichung III die nachstehende Gestalt an: $\frac{k}{\rho} - \frac{\beta^2}{2G^2} = \alpha'$. Jetzt kann ρ nicht mehr unendlich groß sein, die Kurve muß ganz im Endlichen verlaufen, da sonst eine zweifellos positive Quadratzahl einen negativen Wert bekäme. Die Bahnkurve ist also in diesem Falle eine *Ellipse*, und eine einfache geometrische Ueberlegung, auf welche wir hier nicht einzugehen brauchen, vergewissert uns auch darüber, daß das Attraktionszentrum ein *Brennpunkt dieser Ellipse* ist.

Beweis des dritten Gesetzes. Die Sonnenmasse sei M, die als gleich angenommenen Massen zweier Planeten seien m. Die Räume, durch welche beide Planeten (s. o.) der Sonne in der ersten Sekunde zufallen würden, sind, wenn ρ_1 und ρ_2 die Radien der als kreisförmig betrachteten Bahnen, T_1 und T_2 die Umlaufszeiten bedeuten, resp. $2\rho_1\pi^2 T_1^{-2}$ und $2\rho_2\pi^2 T_2^{-2}$; diese Räume sind resp. proportional den Anziehungskräften, also kann man die Proportion

$$\frac{2\rho_1\pi^2}{T_1^2} : \frac{2\rho_2\pi^2}{T_2^2} = \frac{qMm}{\rho_1^2} : \frac{qMm}{\rho_2^2}$$

anschreiben, die nach einfacher Umformung in die zu beweisende Proportion

$$\rho_1^3 : \rho_2^3 = T_1^2 : T_2^2$$

sich verwandelt.

---

[1]) H. Müller, a. a. O., S. 51 ff.

Bahnbestimmung eines Planeten. Diejenigen geometrischen und chronometrischen Bestimmungsstücke, durch welche erstens die Bahnellipse eines Wandelsternes im Raume und zweitens der augenblickliche Ort des Planeten in seiner Bahn festgelegt erscheinen, werden die *Elemente der Bahn* genannt. Es sind, wenn man von der *Masse des Planeten*[1]) absieht, ihrer sechs:

1. die *Neigung der Bahn,* d. h. der von ihrer Ebene mit der Ekliptik gebildete Winkel[2]);

2. die *Länge des aufsteigenden Knotens,* d. h. der Bogen der Ekliptik, welcher zwischen dem Widderpunkte und jenem Punkte gelegen ist, in welchem der Planet sich über die Ekliptik erhebt;

3. die *Länge des Perihels,* worunter gewöhnlich nicht der Abstand des Punktes der Sonnennähe[3]) vom Widder-

---

[1]) Die Masse eines Planeten mit ziemlicher Genauigkeit zu bestimmen, ist nicht schwer, wenn derselbe Satelliten hat (Wolf, Handb. etc., 2. Band. S. 255); wenn nämlich wieder M die Masse der Sonne, m die des bezüglichen Planeten bedeutet, der in einer Bahn vom Radius ρ_1 in der Zeit t_1 von seinem Trabanten umkreist wird, während er selbst zur Durchwanderung seiner Bahn vom Radius ρ_2 die Zeit t_2 gebraucht, so findet man durch Betrachtungen, welche den beim Beweise des dritten Keplerschen Gesetzes angestellten durchaus nachgebildet sind, die Proportion

$$M : m = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^3 : \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2.$$

Genauere Werte ergeben die Störungsrechnungen (s. den nächsten Abschnitt), zumal wenn ein Komet durch einen Planeten stark von seiner vorausberechneten Bahn abgelenkt wird; so hat jüngst v. Härdtl in einer 1888 erschienenen Schrift (separat aus den Sitzungsberichten der k. k. Akademie zu Wien) die Masse des Juppiter durch die von letzterem auf den seinen Bahnverhältnissen nach schon früher erforschten Winneckeschen Kometen während der Jahre 1858—86 ausgeübten Störungen viel schärfer zu berechnen vermocht.

[2]) Durchweg sind diese Winkel klein; nur einige Planetoiden, Pallas an der Spitze, haben namhafte Neigungen gegen die Ekliptik, d. h. gegen die Bahnebene der Erde.

[3]) In *Fig. 151* ist P das Perihel, A das Aphel, also AP die Apsidenlinie (S. 626) oder Hauptachse einer Planetenbahn, und im Brennpunkte S steht die Sonne. Wenn zur Durchlaufung der Bogen

punkte, sondern derjenige vom aufsteigenden Knoten verstanden wird;

4. die *halbe grosse Achse der Bahnellipse,* bezogen auf die halbe große Achse der Erdbahn als Einheit;

5. die *Exzentrizität der Bahnellipse,* d. h. (s. S. 300), wenn $2a$ die große, $2b$ die kleine Achse bedeutet, die Zahl $e = \sqrt{a^2 - b^2} : a$;

6. die *Epoche,* d. h. der Zeitpunkt, in welchem der Wandelstern durch sein Perihel geht.

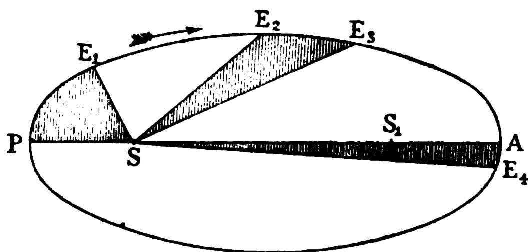
Dazu muß man noch wissen, ob der in Rede stehende Himmelskörper eine *rechtläufige,* d. h. mit dem Bewegungssinne sämtlicher Planeten übereinstimmende, oder aber eine *rückläufige* Bewegung hat [1]).

Die Auffindung der Bahnelemente eines Wandelsternes lehrt derjenige Zweig der Sternkunde, für welchen

---

PE_1, E_2E_3, AE_4 die gleiche Zeit gebraucht wird, so ist nach Keplers erstem Gesetze arc $PE_1 >$ arc $E_2E_3 >$ arc AE_4, in Worten: *Nahe dem Perihel* — bei der Erde zur Zeit des Wintersolstitiums — *hat der Planet die rascheste, nahe dem Aphel* — bei

Fig. 151.



der Erde zur Zeit des Sommersolstitiums — *hat er die langsamste Bewegung.* Der zweite Komet des Jahres 1844 hat (s. Valentiner, Die Kometen und Meteore, Leipzig-Prag 1884. S. 29) eine so exzentrische Bahn, daß er sich in seiner Sonnenferne kaum mit der Geschwindigkeit eines bequemen Fußgängers fortbewegen kann.

[1]) Zunächst gilt diese Unterscheidung nur für die Schweifsterne, indessen muß auch den Uranustrabanten (Newcomb-Engelmann, Pop. Astr., S. 388) eine retrograde Bewegung zugeschrieben werden.

die Bezeichnung der *theoretischen Astronomie* üblich geworden ist[1]). Besitzt man aber die Elemente, so findet man den Ort des Sternes in seiner Bahn mit Hilfe des *Keplerschen Problemes*[2]). Dasselbe führt zur Bestimmung eines Radiusvektor ρ, der mit der großen Halbachse a, der Exzentrizität e und der Differenz δ zwischen wahrer und mittlerer Anomalie[3]) durch die Relation

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\delta}$$

verknüpft ist. Wird mit q der Attraktionsfaktor, mit m die Planetenmasse, mit μ das Produkt $q\,(1+m)$ bezeichnet

---

[1]) So genannt im Gegensatze zur *theorischen Astronomie*, welche die Bewegungen der himmlischen Körper betrachtet, wie sie wirklich sind, nicht wie sie scheinen. Für die theoretische Astronomie, die also eigentlich nur ein Anhangskapitel zur theorischen darstellt, hat Newton (s. dessen Prinzipien, deutsch von Wolfers, S. 119 ff.) die Grundzüge gegeben; doch waren dieselben zunächst noch rein synthetischer Natur, und es war das Verdienst Halleys, sowie der großen Analytiker Clairaut, D'Alembert und L. Euler, die analytische, d. h. für die praktische Anwendung allein brauchbare Form für diese Regeln zu finden. Der Letztgenannte schrieb das erste umfassende Lehrbuch der Bahnbestimmung: Theoria motuum planetarum et cometarum, Berlin 1744 (deutsch durch J. B. v. Pacassi, Wien 1782). Mit unnachahmlicher Einfachheit ist das Fundamentalproblem, *aus drei vollständigen geozentrischen Beobachtungen die Bahnelemente zu finden*, gelöst bei Gauß (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburg 1809). Auf dem Boden dieses klassischen Werkes stehen alle die den Gegenstand behandelnden neueren Schriften: Frischauf, Theorie der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nebst deren Bahnbestimmung in elementarer Darstellung, Graz 1868; v. Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 1. Band, Leipzig 1870; Klinkerfues, Theoretische Astronomie, 1. Band, Braunschweig 1871. — Für den Spezialfall der Kometenbahnen haben Lambert und Olbers, für den der Doppelsternbahnen haben Savary und John Herschel (der ältere, s. S. 378) die Theorie zu modifizieren gelehrt.

[2]) Dasselbe kommt überein mit dem folgenden: Eine Halbkreisfläche von einem willkürlich gegebenen Punkte des Durchmessers aus durch eine nach der Peripherie gezogene grade Linie in vorgeschriebenem Verhältnisse zu teilen.

[3]) Man erinnert sich, daß gesagt ward, die Begriffe der mittleren und wahren Anomalie behielten auch in der elliptischen Theorie noch ihren guten Sinn.

und $\cos u = \frac{e + \cos \delta}{1 + e \cos \delta}$ gesetzt, so läßt sich darthun, daß, unter t die Zeit seit Eintritt der Epoche (s. o.) verstanden, die Gleichung

$$u - e \sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cdot t$$

gültig ist. Könnte man hieraus u berechnen, so hätte man auch δ und ρ und damit den Planetenort zur Zeit t durch *Polarkoordinaten* bestimmt [1]). Die Auflösung dieser Gleichung [2]) gehört also zu den Hauptaufgaben der theoretischen Astronomie.

Wir wissen jetzt, daß und wie *der momentane Erdort* mit bezug auf die *Sonne als festen Punkt* bestimmt werden kann. Weiter diesen Aufgaben nachzugehen, hat für die *mathematische Geographie als solche* keinen Zweck [3]); wohl aber müssen wir noch fragen, ob der in beschriebener Weise bestimmte Erdort wirklich der wahre, oder ob noch eine Korrektur daran anzubringen ist. Hierüber soll uns der nächste Abschnitt aufklären.

---

[1]) Wenn m die mittlere, v die wahre Anomalie ist, so bestehen für diese Größen zwei Gleichungen:

$$m - v = \delta, \quad \frac{1}{e} = \frac{\sin v}{\sin \delta}.$$

Man kann also m und v berechnen, während ρ oben bereits durch δ ausgedrückt ist.

[2]) Die Gleichung ist, wie man sieht, eine *transzendente* und läßt, wie Kepler richtig ahnte, keine explizite Lösung zu „propter arcus et sinus heterogeneiam". Nicht mit Unrecht sagte derselbe deshalb auch (Ausgabe von Frisch, 3. Band. S. 411): „Erranti mihi quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius." Die heutige Mathematik bedient sich der jeden Grad von Genauigkeit gewährleistenden Reihenentwicklungen; s. besonders Gyldéns elegante Näherungslösung im 10. Jahrgange der „Vierteljahrschr. d. deutschen astron. Gesellschaft" (S. 285 ff.).

[3]) Wir können z. B. nicht zugeben, daß eine so ausgedehnte Darstellung, wie sie bei Epstein (Geonomie, S. 301 ff.) zu finden ist, in eine „das gesetzmäßige Verhalten der Erde" behandelnde Disziplin hineingehört. Dies ist unseres Dafürhaltens bereits wirkliche Astronomie.

VII. Die gegenseitigen Störungen der Himmelskörper.

Die von jedem Planeten auf jeden anderen ausgeübte Anziehung hat zur natürlichen Folge, daß das im Schlußparagraphen des vorigen Abschnittes gezeichnete Bild eine gewisse Trübung erfährt. Die Planetenbahn bleibt dem *Wesen* nach zwar freilich eine Ellipse, allein bald nach rechts und links, bald nach oben und unten wird der Planet aus jener herausgezogen, so daß er in Wirklichkeit in einer durchaus unregelmäßigen, doppelt gekrümmten Kurve einhergeht. Alle diese Ablenkungen, welche der Wandelstern erfährt, faßt man zusammen unter dem Namen *Störungen* oder *Perturbationen*, und der *Störungskalkul* ist von höchster Bedeutung für die Astronomie [1]).

Die beiden Hauptkategorien der Störungen. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen *periodischen*

---

[1]) Die Mathematiker des 18. Säkulums führten ihre Störungsrechnungen dem augenblicklichen Bedarfe gemäß durch, ohne sich zu einer abgeschlossenen Theorie derselben zu erheben. Anknüpfend an diese Vorarbeiten, zumal von Clairaut und Euler, begründeten dann Laplaces „Recherches sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent" (Mémoires des savants étrangers pour 1773, Paris 1776) eine eigentliche Methode, und in der „Mécanique céleste" feierte diese bereits ihre vollen Triumphe. Späterhin haben Pontécoulant, Encke, J. A. Weiler, Newcomb u. a. sich um dieses schwierige Gebiet der höheren Mathematik verdient gemacht, vor allem aber Leverrier, der (Recherches astronomiques, 6 Bände, Paris 1855–61) den zur Entdeckung des Neptun (s. o. S. 646) unentbehrlichen *umgekehrten Störungskalkul* schuf, und Hansen, auf dessen Preisschrift über den Gegenstand (Untersuchungen der gegenseitigen Störungen des Juppiter und Saturn, Berlin 1831) zahlreiche Abhandlungen von derselben Tendenz gefolgt sind. In trefflicher elementarer Weise behandelt die einschlägigen Fragen Möbius (Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843 [s. S. 632]), während die Schriften von Israel-Holtzwart (Elemente der Astromechanik, Wiesbaden 1886) und von Dziobek (Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen, Leipzig 1888) Kenntnis der höheren Rechnungsarten voraussetzen; desgleichen thut dies Wolf (Handbuch etc., 2. Band. S. 261 ff.).

und *säkulären* Störungen [1]). Ein absoluter Gegensatz zwischen beiden Klassen besteht nicht, sondern nur ein relativer, gradueller, indem die periodischen Störungen sich auf kleine, nach bestimmten Zeiten in derselben Weise sich reproduzierende Oszillationen beziehen, während den säkulären Störungen langsame Aenderungen gewisser Bahnelemente entsprechen. Wäre nicht (s. S. 402) die Sonne so überaus massenkräftig gegenüber der Gesamtheit ihrer Planeten, so würde eine einigermaßen vollständige Berechnung der Perturbationen ein Ding der Unmöglichkeit sein. So jedoch ist es möglich, aus der Vielzahl der gravitierenden Körper *drei* loszulösen: Den *Zentralkörper*, den *gestörten* und den *störenden Körper*. In dieser Vereinfachung nimmt die zum vielbesprochenen *Dreikörperproblem* [2]) gewordene Störungstheorie eine Form an, welche die Bestimmung des momentanen Ortes des gestörten Körpers ermöglicht. Um den Ort des Planeten P zu erhalten, auf welchen neben der Sonne S noch die Planeten P_1, $P_2 \ldots P_n$ anziehend wirken, hat man das Dreikörperproblem n mal, nämlich für die Kombinationen P, S, P_1, sodann $P, S, P_2 \ldots$ endlich P, S, P_n aufzulösen und die Ablenkungen, welche für P bei jeder Sonderlösung einer solchen Aufgabe herauskommen, nach dem physikalischen Satze von der *Koexistenz kleiner Bewegungen* zu einer Gesamtablenkung zusammenzufassen.

Von den wichtigsten Lehrsätzen, welche seit etwa hundert Jahren für die Störungen im Inneren unseres Sonnensystemes gefunden wurden, seien hier einige angeführt:

---

[1]) Diese Scheidung scheint zuerst mit voller Klarheit in der vorgenannten Arbeit von Laplace angebahnt worden zu sein.

[2]) Die korrekte Fassung und Zurückführung auf Quadraturen wurde dem Probleme der drei Körper zuerst von Lagrange erteilt (Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps, 6. Band der neuen von der Pariser Akademie besorgten Gesamtausgabe, S. 229 ff.). Daß schon beim Dreikörperprobleme und noch mehr dann, wenn mehr Körper in betracht kommen, unserem analytischen Können gewisse Grenzen gezogen seien, lehrte Bruns' rasch berühmt gewordene Abhandlung „Ueber die Integrale des Vielkörperproblemes" (Acta Mathem., 11. Band. S. 25 ff.).

I. Durch die säkulären Störungen werden Hauptachse und Umlaufszeit eines Planeten nicht geändert.

II. Mittelst einer Konstruktion, welche ausschliesslich die Massen der Planeten, sowie die Neigungswinkel und Parameter ihrer Bahnen als Bestimmungsstücke verwendet, kann eine unveränderliche, durch die Störungen in ihrer Lage nicht zu alterierende Ebene im Raume gelegt werden[1].

III. Keine Exzentrizität einer Planetenbahn wächst im Laufe der Zeiten, ohne dass die einer anderen — oder mehrerer anderer — zugleich abnimmt.

IV. Die Neigungen sämtlicher Bahnen gegen die invariable Ebene schwanken nur innerhalb gewisser Grenzen.

Diese Sätze, vor allem der erste, bieten eine gewisse Garantie für das, was man die *Stabilität* der solaren Welt nennt, d. h. dafür, daß die Bewegungen innerhalb des Planetensystemes für immer in derselben Weise, wie gegenwärtig, sich vollziehen, daß ein Zusammenstoß mehrerer Planeten, ein Sturz derselben auf den Zentralkörper u. s. w. nicht eintritt. Allerdings jedoch kann der von Laplace geführte Stabilitätsbeweis nicht als ein absolut überzeugender anerkannt werden[2], selbst wenn man von dem allfallsigen *Widerstande eines interplanetarischen Mediums* absieht[3].

---

[1]) Schon Kepler hatte, freilich in der Sache unrichtig, gemutmaßt, daß eine solche fixe Ebene im *Sonnenäquator* gegeben sei (sämtl. Werke, 3. Band. S. 304 ff.). Auf Grund der Gravitationslehre, die er theoretisch verwarf, in der Praxis aber unentwegt anwandte, that dann Euler die Notwendigkeit einer solchen „Referenzebene“ dar (De circulo maximo fixo in coelo constituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur, Novi Comment. Acad. Imp. Petrop., 20. Band. S. 509 ff.). Die oben erwähnte Konstruktion ist von Laplace (Mécanique céleste, 1. Band, 2. Buch, cap. VII) angegeben worden.

[2]) Es sind nämlich bei den in Rede stehenden Reihenentwicklungen bloß die Anfangsglieder beachtet worden, und es steht keineswegs ganz fest, welchen Einfluß die vorläufig noch notgedrungen vernachlässigten Glieder auszuüben vermögen. Vgl. Dziobek (a. a. O., S. 243 ff.) und den von J. W. H. Lehmann bearbeiteten Artikel „Stabilitätsproblem“ in Nürnbergers „Pop. astron. Handwörterbuch“ (2. Band, Kempten 1846).

[3]) Daß ein wenn auch äußerst feines Mittel, durch welches ein in Zentralbewegung befindlicher Körper seinen Weg zu nehmen

Alles gesagte bezog sich auf die Störungen im allgemeinen [1]). Wir wollen aber jetzt auch einige Sonderfälle in Erwägung ziehen, welche für die *mathematische Geographie* — und nicht minder auch für die *physikalische* — höhere Bedeutung besitzen.

Säkuläre Aenderungen in der Gestalt und Lage der Erdbahn. Die große Achse der Erdellipse bleibt, wie wir sahen, stets dieselbe, allein die *Exzentrizität* ändert sich

---

hat, mit der Zeit zur Verkleinerung der großen Bahnachse und damit auch indirekt der *Umlaufszeit* den Anlaß geben müsse, ist theoretisch unabweisbar. Nur steht nicht fest, ob ein solches Medium, gewöhnlich *Aether* genannt, wirklich vorhanden sei. Von dem nach ihm benannten, durch seine kurze Umlaufsdauer ausgezeichneten Kometen glaubte Encke (Astr. Nachr., 13. Band. Sp. 263 ff.) sicher nachgewiesen zu haben, daß nur ein solch stetiger Widerstand die beobachteten Erscheinungen erklären könne, allein bei v. Astens Neubearbeitung der Frage (Ueber die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltraume, Gaea, 11. Jahrgang. S. 41 ff.) trat diese Notwendigkeit schon sehr zurück, und eine neuerdings geführte sehr sorgfältige Untersuchung v. Härdtls (Vierteljahrsschr. d. d. astron. Gesellsch., 22. Jahrgang. S. 319) mußte ebenfalls die Frage, ob Kometen in ihrer Bewegung vom Aether beeinflußt werden, als eine offene bezeichnen. Den massigen Planeten gegenüber wird ein solcher Einfluß, selbst wenn wir ihn als qualitativ vorhanden gelten lassen wollen, erst nach ungeheuer langen Zeiträumen in die wirkliche Erscheinung treten können.

[1]) Ein gewisses Interesse für unsere Disziplin können vielleicht noch die am meisten charakteristischen *Störungen der Mondbahn* beanspruchen. Es sind deren vier: die *Mittelpunktsgleichung*, deren Wesen oben schon als jeder exzentrischen oder elliptischen Bahn eigentümlich geschildert wurde, die an eine Periode von 32 Tagen gebundene *Evektion*, deren Betrag in den Syzygien und Quadraturen die vorgenannte Ungleichheit resp. vermehrt und vermindert, die *Variation*, die umgekehrt in den vier Kardinalpunkten der Mondellipse verschwindet und dafür hauptsächlich in den *Oktanten* hervortritt, und die *jährliche Gleichung* (s. S. 626), welche nur zweimal im Jahre, zur Zeit der Solstitien, sich annulliert. Ueber die vordem vielfach unzutreffend aufgefaßten Prioritätsfragen in der Auffindung dieser Ungleichheiten klärt vortrefflich auf ein Aufsatz von Anschütz (Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. Zeitschr. f. Math. u. Phys., 31. Band, Hist.-litter. Abteil., S. 161 ff. S. 201 ff.). Danach ist die Variation schwerlich von dem Araber Abul Wâfa, ganz sicher aber von Tycho Brahe entdeckt worden.

in langen Perioden, und ebenso bleibt auch die *Lage der Apsidenlinie im Raume* nicht immer die gleiche, sondern diese Linie dreht sich um den von der Sonne eingenommenen Brennpunkt. Die Länge des Periheliums der Erde nimmt im Jahre *absolut* um 12, *tropisch* aber, wenn man also auch die Bewegung des Anfangspunktes der Zählung berücksichtigt, um 62 Bogensekunden zu[1]), so daß nach 21000 Jahren ein voller Umlauf des Perihelpunktes vollzogen sein wird. Diese Bewegung verändert die Zeitverhältnisse, in welchen die einzelnen Jahreszeiten auf der Nord- und Südhalbkugel der Erde zu einander stehen. Während gegenwärtig Herbst und Winter bei uns etwas kürzer sind, als bei den Bewohnern der südlichen Hemisphäre, wird dereinst für die Europäer die Dauer der wärmeren Jahreszeiten eine etwas kürzere sein.

An und für sich wird dieser *säkuläre Wechsel in der Dauer der Jahreszeiten* von irgendwelchem nachhaltigen Einflusse nicht sein können; es würde letzteres aber nach der Meinung Vieler doch eintreten müssen, da auch die *Abweichung der Erdbahnellipse von einem Kreise* bald eine geringere — wie in unserer Zeit — bald eine größere ist. Das Eintreten einer sogenannten *Eiszeit* haben verschiedene Forscher auf eine Kumulation dieser variablen Exzentrizität mit derjenigen Störungswirkung, zu deren Besprechung wir uns nunmehr wenden wollen, zurückgeführt[2]).

Säkuläre Aenderung der Ekliptikschiefe. Die Ansicht, daß der von Aequator und scheinbarer Sonnen-

---

[1]) Mädler-Klinkerfues, Pop. Astr., S. 404.

[2]) Nach einer von Croll (On the Physical Cause of the Change of the Climate during Geological Epochs, Philos. Mag., (4) 27. Band. S. 130 ff.; On the Excentricity of the Earth's Orbit, ebenda (4) 32. Band. S. 119 ff.) bekanntgegebenen Revisionsrechnung Leverriers besteht für die Schwankungen der Exzentrität e der Erdbahn eine Periode von fast 24000 Jahren, und die Grenzwerte sind durch die Ungleichungen $0{,}07775 > e > 0{,}00332$ gegeben. Die verschiedenen *Eiszeithypothesen* von Adhémar, Schmick, Pilar, Croll u. s. w. kennzeichnet gut Pencks „Vergletscherung der deutschen Alpen" (Leipzig 1882. S. 433 ff.).

bahn — wahrer Erdbahn — gebildete Winkel (s. S. 70) nicht konstant bleibe, sondern im Sinne einer langsamen und erst nach langen Zeiträumen merklich werdenden Abnahme variiere, ist schon frühzeitig ausgesprochen worden. Ptolemäus hatte diesen Winkel zu 23° 51′ 20″ bestimmt, während Novara, der Lehrer des Coppernicus, dafür nur etwas über 23° 28′ fand[1]. Auch Fracastor (s. S. 640) und Coppernic selbst waren von der Richtigkeit der bezeichneten Thatsache überzeugt, und das nachstehend mitgeteilte Schema[2] spricht, mag auch die einzelne Beobachtung berechtigten Zweifeln hinsichtlich ihrer Korrektheit unterliegen, deutlich für die chronische Abnahme: Messung der Ekliptikschiefe durch

Ptolemäus	23°	51′	20″
Albatâni (10. Jahrhundert) .	23	35	00
Arzachel (11. Jahrhundert) .	23	34	00
Novara	23	29	00
Coppernicus	23	28	24

Daß die Veränderung des in Rede stehenden Winkels einen Einfluß auf die Dauer der einzelnen Jahreszeiten (s. S. 666) ausüben müßte, läßt sich nicht leugnen, indessen geht die Aenderung so langsam vor sich und verbleibt zudem innerhalb so enger Grenzen, daß jener Einfluß sich niemals in einer dem unbefangenen Menschen fühlbaren Weise geltend machen kann. Einer von Lagrange angegebenen Formel zufolge[3] beträgt der Winkel ε im Jahre $(1850 + t)$ $23^\circ\, 27'\, 29{,}6'' - 0{,}48''\,.\,t$: für 1890 ist $t = 40$, $0{,}48''\,.\,t = 19{,}2''$ und gegenwärtig somit $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 10{,}4''$. *Die Gesamtamplitude der Schwankung der Ekliptikschiefe beträgt nur etwa sechs*

[1] Vgl. betreffs der ungedruckten, nur im Originalmanuskripte uns aufbehaltenen Angaben Coppernics dessen Lebenschreibung von Prowe (1. Band, 1. Teil, Berlin 1883. S. 244).

[2] Mädler, Gesch. d. Himmelsk., 1. Band. S. 177.

[3] Lagrange, Ueber die Abnahme der Schiefe der Ekliptik, Bodes Astron. Jahrb. f. 1782. Im Zusammenhange studiert die aus älterer Zeit überlieferten Messungsergebnisse Laplace in seinem der „Conn. des temps“ von 1841 einverleibten Aufsatze „Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique qui résulte des observations des Anciens“.

Bogengrade; wenn das Minimum von 22° 54′ erreicht ist, beginnt wieder ein langsames Wachsen des Winkels. Für die Dauer des laufenden Jahrhunderts kann die von uns schon zum öfteren benützte Annahme $\varepsilon = 23\frac{1}{2}{}^0$ als eine annähernd richtige gelten.

Beeinflussung der Erdachse durch Störungen. Einige besonders wichtige Fragen der Störungslehre müssen einem besonderen Abschnitte vorbehalten bleiben. In diesem wird nämlich untersucht, ob die Umdrehungsachse der Erde stets die nämliche Richtung hat oder ob diese Richtung *regelmässigen,* d. h. *periodischen,* und *unregelmässigen Aenderungen* unterworfen ist. Man ersieht leicht, inwieweit gerade die mathematische Geographie bei diesen anscheinend zunächst geophysikalischen Aufgaben beteiligt ist. Jede Breiten- und Längenbestimmung ist auf die Erdachse als Fundamentallinie bezogen; ändert letztere ihre Lage im Raume, so wird freilich dadurch der *relative* Ort auf der Erdoberfläche *nicht*, wohl aber der *absolute* Ort des fraglichen Punktes, bezogen auf ein invariables Raumkoordinatensystem, geändert. Es könnte aber auch sein, daß durch irgendwelche Gravitationswirkung die *Erdachse selbst aus ihrer bisherigen Lage heraus- und in eine neue Lage hineinversetzt würde,* und dann würde also selbst die relative, rein terrestrische Ortsbestimmung einer Modifikation bedürfen. Außerdem aber kann durch entgegenstehende Einflüße die *Rotationsdauer,* das der Astronomie und Geographie zugrunde liegende Zeitmaß, möglicherweise eine Aenderung erleiden, und auch diese Möglichkeit darf, wenn Vollständigkeit angestrebt werden soll, nicht ungeprüft bleiben.

VIII. Periodische und unperiodische Bewegungen der Erdachse; Präzession und Nutation.

Veränderung der Polhöhen. Wir dürfen den Erdkörper betrachten als ein Ellipsoid, welches um die

Achse, um welche rotierend es geometrisch entstanden gedacht werden kann, auch wirklich nach wie vor seine Umdrehung vollzieht. *Die beiden auf die Aequatorebene bezogenen Trägheitsmomente werden* (s. S. 440) *als gleich betrachtet, und die Drehungsachse fällt mit der dem grössten Trägheitsmomente entsprechenden Achse zusammen.* Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Polhöhe *nicht konstant;* es würde vielmehr, wie schon Euler auffand [1]), jeder der Punkte oder kinematischen Pole, in denen die thatsächliche Rotationsachse die Erdoberfläche durchschneidet, einen Kreis um den zunächst gelegenen Endpunkt der Hauptträgheitsachse beschreiben müssen, und die zur Beschreibung eines solchen Kreises erforderliche Zeit wäre etwas kürzer, als ein Jahr, betrüge ungefähr *zehn Monate.* Naturgemäß wären mit dieser Achsenschwankung auch *periodische Veränderungen der Polhöhe eines beliebigen Ortes* kausal gegeben. Diese Frage ist von verschiedenen Forschern studiert worden [2]), ohne daß man zu einem abschließenden Resultate gelangt wäre. Eine sehr verdienstliche Uebersicht über die hierher gehörigen Arbeiten hat Schwahn [3]) gegeben. Jene periodischen Schwankungen der geographischen Breite würden übrigens unter dem Einflusse der Anziehung von Sonne und Mond selbst wieder kleinere periodische Modifikationen in ihrer Größe erleiden müssen, doch ist der numerische Wert dieser sekundären Abweichungen nach den Untersuchungen von Mathieu [4]) ein so geringer, daß er der Fest-

---

[1]) L. Euler, Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable, Mém. de l'acad. royale de Berlin, 1758. S. 154 ff. Eingehend erörtert auch Helmert in seinem vielzitierten Werke (2. Band. S. 386 ff.) die Bewegungen des Erdkörpers um seinen Schwerpunkt.

[2]) Vgl. zumal Nyrén (Die Polhöhe von Pulkowa, Mém. de l'acad. impér. de St. Pétersbourg, (7) 19. Band) und Downing (The possible ten-month Period of Variation in Latitude, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 40. Band).

[3]) Schwahn, Ueber Aenderungen der Lage der Figur- und der Rotationsachse der Erde sowie über einige mit dem Rotationsprobleme in Verbindung stehende geophysische Probleme, Berlin 1887.

[4]) E. Mathieu, Mouvement de la rotation de la Terre autour

stellung durch Beobachtungen ein- für allemal entzogen sein dürfte.

Wichtiger ist die Entscheidung der ebenfalls nicht ferne liegenden Frage, ob nicht *Massenumsetzungen geologischen Charakters* eine nachweisbare Einwirkung auf die Lage der Erdachse auszuüben imstande seien. Zuerst hat anscheinend Bessel[1]) eine Formel für den Ablenkungswinkel aufzustellen gesucht, welcher dem Transport einer gegebenen Masse von einem bestimmten Erdpunkte nach einem anderen entspricht, und es fand sich, daß dieser Winkel unter allen Umständen, die überhaupt in Frage kommen können, ein ganz minimaler ist. Unter der Voraussetzung, daß die betreffenden Variationen klein genug sind, um lediglich ihre ersten Potenzen berücksichtigen zu müssen, unterzog Gyldén[2]) das Problem einer sehr gründlichen Neubearbeitung und konstatierte, daß Prozesse von der Art, wie sie nach unseren gegenwärtigen geologischen Kenntnissen erwartet werden dürfen, zwar die *absolute Richtung der Umdrehungsachse im Raume um ein weniges ändern*, nicht jedoch *die geographischen Koordinaten eines Erdortes zu beeinflussen vermögend* sind. Selbst die plötzliche Hebung eines bisher nicht vorhanden gewesenen Kontinentes bis zu namhafter *mittlerer Seehöhe* würde Darwins Analyse[3]) zufolge nur eine höchstens drei Bogengrade betragende Ablenkung der Erdachse bewirken. Wenn auch die numerische Auswertung der für denselben Zweck von Haughton[4]) aufgestellten

---

de son centre de gravité, Journ. de math. pures et appliquées, (3) 2. Band.

[1]) Bessel, Ueber den Einfluß der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen, Zeitschr. f. Astr. u. verw. Wissensch., 5. Band. S. 25 ff.

[2]) Gyldén, Recherches sur la rotation de la terre, présentées à la société royale de sciences d'Upsal le 5 avril 1871.

[3]) Neben der besonders zu betonenden Abhandlung Darwins (On the Influence of Geological Chances on the Earth's Axis of Rotation, Phil. Transact., 167. Band. S. 271 ff.) sind auch die den Gegenstand berührenden Aufsätze von Hill (Proceed. of the Cambridge Phil. Society, 3. Band. S. 161 ff.; Geological Magazine [2] 5. Band. S. 262 ff.) und von O. Fisher (in dem zuletzt genannten Zeitschriftenbande, S. 291 ff. S. 551 ff.) der Beachtung zu empfehlen.

[4]) Haughton, Preliminary Formulae relating to the inter-

Formeln teilweise zu etwas anderen Ergebnissen führt, so scheint man doch zu nachstehender Behauptung berechtigt zu sein:

In der geologischen Gegenwart sind weder durch äussere noch durch innere Kräfte Umsetzungen denkbar, welche die Lage der Rotationsachse und die Anordnung der Trägheitsachsen im Erdellipsoide überhaupt derart veränderten, dass die geographische Ortsbestimmung ernstlich damit zu rechnen hätte.

Hall hat das in den letzten Jahren hinsichtlich der obschwebenden Frage gesammelte Material vereinigt [1]), und aus dieser Zusammenstellung scheint allerdings eine nicht sowohl *periodische,* als vielmehr *chronische* oder doch *säkuläre Abminderung der Polhöhen verschiedener Orte* hervorzugehen. Der Wert derselben nimmt nämlich ab bei Washington in 18 Jahren um 0,47″; bei Paris in 28 Jahren um 1,3″; bei Mailand in 60 Jahren um 1,51″; bei Rom in 56 Jahren um 0,17″; bei Neapel in 51 Jahren um 1,21″; bei Königsberg i. Pr. in 23 Jahren um 0,15″: bei Greenwich in 18 Jahren um 0,51″. Für die russische Hauptsternwarte Pulkowa liegen die folgenden Daten vor:

Beobachter	Jahr	Zahl der Beobachtungen	Gemessene Polhöhe	Wahrscheinlicher Fehler
Peters	1843	371	59° 46′ 18,73″	± 0,013″
Gyldén	1866	236	18,65	± 0,014
Nyrén	1872	155	18,50	± 0,014

Die Aenderungen sind durchaus so geringfügig, daß recht wohl an ihre Erklärung durch die nie zu vermeidenden

nal Change of Position of the Earth's Axis arising from Elevations and Depressions caused by Geological Changes, Proceed. of the Royal Society of London, 1878. S. 51 ff.

[1]) A. Hall, Variations of Latitude, American Journal of Science, 1885. S. 233 ff.

Instrumental- und sonstigen Beobachtungsfehler gedacht werden könnte, *wenn nicht der Sinn der Aenderung durchaus der nämliche wäre.* Vorläufig sind noch weitere Untersuchungen abzuwarten.

Solche sind u. a. neuerdings von Küstner[1]) angestellt worden. Danach darf von der Polhöhe als von einer wirklichen *Konstanten* innerhalb eines Genauigkeitsbereiches von 0,1 bis 0,2 Bogensekunden nicht mehr gesprochen werden, allein mit einem solchen Maße von Schärfe geographische Koordinaten zu bestimmen (s. o. Kap. II, Abschnitt 4), darauf erhebt die mathematische Erdkunde auch keinen Anspruch, und für diese Disziplin bleibt demnach trotz alledem bis auf weiteres die geographische Breite eine unveränderliche Größe[2]).

Mechanische Erklärung der Präzession. Wir haben uns überzeugt, daß die *Verschiebungen der Erdachse innerhalb des Erdkörpers selbst* nur ganz minimal, und daß die *Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt* im allgemeinen ebenfalls zu unbedeutend sind, um sich astronomisch offenbaren zu können. Nur von einer sehr erheblichen *Lageveränderung der Erdachse im Raume* haben wir früher schon Notiz zu nehmen gehabt, weil durch sie die Lage der Fixsterne gegen den Anfangspunkt der Abszissenzählung auf der Ekliptik ununterbrochen verändert wurde; es ist dies die sogenannte *Präzession,* das Vorrücken der Aequinoktialpunkte. Damals (S. 174 ff.) ließ sich einstweilen nur das *Thatsächliche der Erscheinung* feststellen, und dieses kann dahin zusammengefaßt werden: *Die Umdrehungsachse bleibt sich nicht stets parallel, sondern sie beschreibt im Laufe von ungefähr 26 700 Jahren*[3])

---

[1]) Küstner, Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe, Berlin 1888. S. 50 ff.

[2]) Vgl. auch Schiaparellis Ergebnisse (Bull. astr., VI. S. 489 ff.).

[3]) Ohne ein eigentliches Recht dazu zu haben — denn die in der „Republik" Platons niedergelegten etwas mysteriösen Spekulationen über Säkularperioden von sehr großer Dauer haben mit der Verschiebung der Durchschnittspunkte von Aequator und Ekliptik nicht das mindeste zu thun — hat man fraglichen Zeit-

den Mantel eines geraden Kreiskegels, der[1]) *eine Oeffnung von 46 bis 47 Bogengraden hat, und dessen eigene Achse den Erdmittelpunkt mit dem Pole der Ekliptik verbindet.* Infolge dieser Bewegung der Erdachse ändert jeder geometrische Himmelspol unaufhörlich seine Lage gegenüber den Fixsternen; *der gegenwärtige Polarstern wird nicht für alle Zeiten diese seine Eigenschaft* — sehr nahe am scheinbaren Umdrehungspole zu sein — *beibehalten*, und der Anblick, welchen das Firmament gewährt, ist für einen bestimmten Erdort zu verschiedenen Zeiten ein verschiedener[2]).

Wie nun erklärt sich diese konische Bewegung der Erde *kausal?* Die Möglichkeit, den mechanischen Grund der alleinstehenden und deshalb rätselvollen Erscheinung aufzuzeigen, ward naturgemäß erst durch das Erscheinen von Newtons „Prinzipien" an die Hand gegeben, und Newton selbst war es denn auch[3]), der die sphäroidische Gestalt der Erde als die Ursache ihrer Achsenschwankung bezeichnete. Was aber bei ihm nur angedeutet war, führte D'Alembert in tief eindringender Analyse des

---

raum das *grosse Platonische Jahr* genannt. Die Länge findet sich, wenn man die Zahl 1 296 000 als die Anzahl der auf einen Kreisumfang entfallenden Bogensekunden durch die *Präzessionskontante* (d. h. nach S. 175 durch die Zahl 5038) dividiert.

[1]) Der Achsenschnitt des Kegels hat eben an der Spitze einen Winkel gleich 2ε, wo ε die Schiefe der Ekliptik resp. den Bogenabstand des Himmels- und Ekliptikpoles bedeutet. ε selbst aber variiert mit der Zeit, wie wir oben (S. 736) erfahren haben.

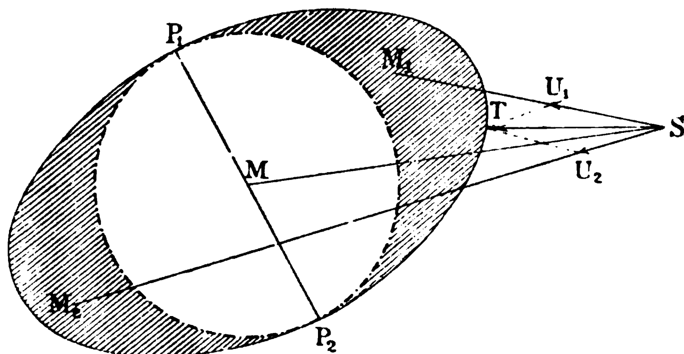
[2]) Das „südliche Kreuz" z. B., der Hauptschmuck der transäquatorialen Himmelshalbkugel, erhob sich damals, als die Germanen in die Weltgeschichte einzutreten begannen, noch über den Horizont des mittleren Deutschland, und der heutige Polarstern war dieses Namens damals würdiger, als er es heute ist. Auch die kleine Rechnung, welche wir oben (S. 239) betreffs der Sichtbarkeit des Bärengestirnes in Südamerika anstellten, bedürfte, wenn es auf große Genauigkeit ankäme, einer der Präzession Rechnung tragenden Korrektion, indessen hat es sich ja dortselbst nur um eine ganz ungefähre Ermittlung der Gegend gehandelt, bei deren Betretung jenes Sternbild wiederum am Gesichtskreise auftauchte.

[3]) Der vierte Abschnitt des dritten Buches (Wolferssche Uebersetzung, S. 455 ff.) ist diesem Gegenstande gewidmet.

Vorganges weiter aus [1]). Die folgende Darlegung schließt sich, von der modernen Ausdrucksweise abgesehen [2]), derjenigen D'Alemberts an.

Wenn ein starrer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert, und wenn gleichzeitig um eine zu dieser Achse senkrechte neue Achse der Körper durch eine konstante Kraft zu drehen gesucht wird, welche jenem eine gewisse Winkelbeschleunigung erteilen würde, so wird stets, wie die Mechanik lehrt, die Umdrehungsachse zu einer konischen Bewegung von wiederum gleichbleibender Winkelge-

Fig. 152.



schwindigkeit gezwungen [2]). Diesen Fall aber haben wir hier vor uns. *M (Fig. 152)* ist der Mittelpunkt des Erdellipsoides, auf welch letzteres irgend ein entfernter Körper *S*, z. B. die Sonne, anziehend wirkt. Wir denken uns in das Ellipsoid eine ihm konzentrische Kugel einbeschrieben, welche ersteres in den beiden Polen P_1 und P_2 berührt: solchergestalt besteht die Erde aus drei

[1]) D'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre, Paris 1749; deutsch durch G. K. v. Seuffert, Nürnberg 1857.

[2]) v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik, 1. Teil, Braunschweig 1867. S. 63 ff.

Körpern, nämlich der inneren Vollkugel und zwei ellipsoidisch-sphärischen Menisken [1]). Jeder dieser Körper wird von S angezogen, und zwar darf die Masse der Kugel im Zentrum M, die Masse eines jeden Meniskus, resp. in M_1 und M_2 vereinigt angenommen werden. Die zwischen S und der Kugel wechselseitig ausgeübte Attraktion hat die Richtung SM; SU_1 und SU_2 seien dagegen die, resp. zwischen S und M_1, S und M_2 wirkenden Anziehungskräfte. Wir setzen SU_1 und SU_2 mittelst des Kräfteparallelogrammes $SU_1 TU_2$ zu der Resultante ST zusammen. *Nur dann, wenn ST der Richtung nach mit SM zusammenfiele, würde die Attraktion von S keinen Einfluss ausüben; im allgemeinen aber findet eine solche Koinzidenz nicht statt.* Die Kraft ST ist vielmehr bestrebt, eine Drehung hervorzurufen, und zwar um eine Achse, welche zu der durch Erdachse und Radiusvektor gelegten (Zeichnungs-) Ebene senkrecht steht. Dann muß also, da alle Voraussetzungen zur Anwendung des oben erwähnten allgemeinen Satzes erfüllt sind, die Erdachse selbst den Mantel eines Kegels beschreiben, dessen sämtliche Seitenlinien zur Ekliptik gleiche Neigung haben, und die Präzession ist auf ihre physikalische Ursache zurückgeführt [2]).

---

[1]) Die Bezeichnung „ménisque" für diese Schalenkörper rührt von D'Alembert selbst her (Seuffertsche Ausgabe, S. 7).

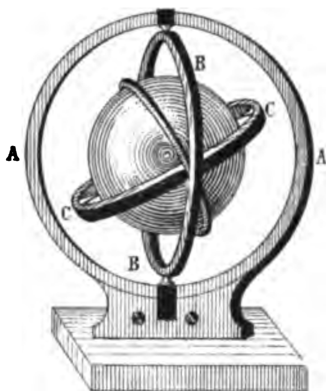
[2]) Man hat zur experimentellen Nachbildung des ganzen Herganges mannigfaltige Apparate angefertigt. Besonders bekannt ist das *Bohnenbergersche Maschinchen* (beschrieben von seinem Erfinder in einem 1817 zu Tübingen veröffentlichten Schriftchen), welches durch eine mit der Cardanischen (s. S. 688) verwandte Befestigung eines um eine Achse drehbaren Ovalkörpers eben dessen Rotationsachse in eine solche Lage zu bringen verstattet, daß sie jede willkürliche Richtung im Raume annehmen kann. AA, BB, CC *(Fig. 153)* sind die drei Ringe, zu deren jedem der im Inneren angebrachte Drehungskörper eine symmetrische Lage hat. Solange dieser Körper keine Achsendrehung besitzt, kann man ihm durch die leiseste Berührung jede willkürliche Lage erteilen; sobald aber derselbe durch eine rasch abgewickelte Schnur in Rotation versetzt ist, dreht sich die Achse mit konstanter Neigung gegen die Vertikale langsam im Raume, und die Hand, welche diesen Bewegungszustand zu ändern unternimmt, erfährt einen sehr fühlbaren Widerstand. Auch der *Maxwellsche Kreisel* (Fortschritte der Physik für 1856,

In Wirklichkeit ist nicht ein einzelner anziehender Körper vorhanden, sondern eine Vielheit von solchen. *Allgemeine Präzession* nennt man die durch die Gesamtheit derselben bedingte Knotenbewegung, als deren bei weitem überwiegender Bestandteil wir die durch die vereinte Gravitationswirkung des massenkräftigsten und des nächst benachbarten Himmelskörpers zustande kommende

---

Berlin 1854. S. 134), kann zu solchem Versuche verwendet werden. Vorzüglich eignen sich dazu auch die von Foucault, Fessel, Sire und Ducretet-Gilbert angegebenen *Gyroskope*, über

Fig. 153.



welche der letztgenannte belgische Mathematiker (Bulletin de sc. math. et astr., 2. Serie, 6. Band. S. 189 ff.) sehr ausführlich Bericht erstattete. Ohne höhere Rechnung erklären die Erscheinungen am Gyroskope Munker (Eine elementare Erklärung der Präzessionsbewegung mit Berücksichtigung der Reibung, Abhandl. d. naturf. Ges. zu Nürnberg, 7. Band. S. 193 ff.) und in zutreffenderer Weise noch Hauck (Elementare Behandlung des Kreiselproblemes durch Dualisierung mit der Zentralbewegung, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 17. Jahrgang. S. 81 ff.); die allgemeine Zurückführung aller einschlägigen analytischen Fragen auf elliptische Transzendenten enthält W. Heß' Abhandlung „Ueber das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystemes" (Math. Annalen, 29. Band. S. 500 ff.).

Lunisolarpräzession zu betrachten haben. Eine neue Untersuchung über die Abhängigkeit der Gesamtpräzession von ihrem lunisolaren und von ihrem planetarischen Bestandteile hat Dreyer geliefert[1]).

Die Nutation. Anläßlich seiner Bestrebungen (s. S. 713), eine Fixsternparallaxe aufzufinden, bemerkte Bradley noch eine weitere auffallende Bewegung der Sterne, welche er in einem am 31. Dezember 1747 publizierten offenen Sendschreiben in folgender Weise interpretieren zu können glaubte[2]): I. Die Erdachse ist während eines Umlaufes der Mondknoten einem Schwanken unterworfen, welches bis auf 18″ steigt; II. dieses Schwanken ist auch mit einer Ungleichheit im Vorrücken der Tag- und Nachtgleichen verknüpft. Diese *Nutation der Erdachse* suchte Machin, der aber nichts darüber veröffentlichte, sondern Bradley mit seinem Rate zu unterstützen sich begnügte, auf die Gravitationswirkung des Mondes zurückzuführen, und seine Erklärung war in der Hauptsache richtig, wenn auch D'Alembert noch manches daran zu bessern hatte[3]). *Fiele die Mondbahnebene mit der Ekliptik zusammen*[4]), *so könnte von einer solchen Nutation keine Rede sein; da aber die Durchschnittspunkte von Mond- und Erdbahn im Verlaufe von 18⅔ Jahren um volle 360° sich verschieben, so ist die Präzession gewissen Schwankungen von ebensolcher Periode unterworfen*[5]).

---

[1]) Dreyer, A new Determination of the Constant of Precession, Coppernicus (Astr. Zeitschrift), 2. Band, separat, Dublin 1881.

[2]) Bradley, A Letter to the Right honourable George Earl of Macclesfield concerning an apparent Motion observed in some of the fixed Stars, Phil. Transact., 1747—48. S. 1 ff. Das Schreiben ist wieder abgedruckt in der von Rigaud besorgten Gesamtausgabe Bradleyscher Schriften (Oxford 1832. S. 17 ff.).

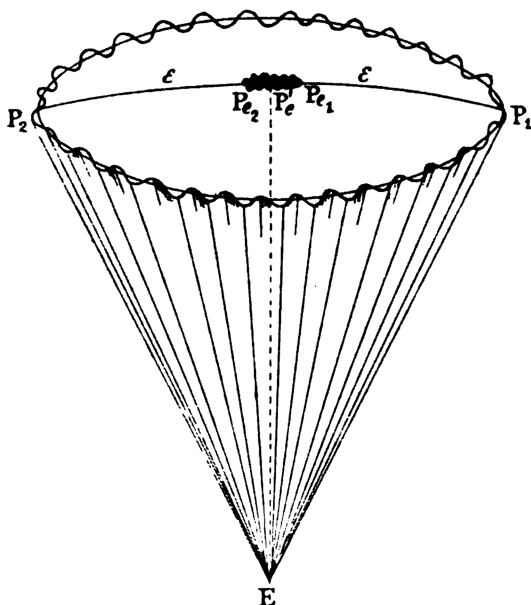
[3]) In der Seuffertschen Ausgabe S. 53 ff.

[4]) Wir erinnern uns (s. S. 76), daß der Winkel beider Bahnebenen im Mittel — denn auch er bleibt der planetarischen Perturbationen wegen nicht völlig konstant — fünf Grade beträgt.

[5]) Es ist oben (S. 175) auf die irrige mittelalterliche Hypothese von der *Trepidation* hingewiesen worden, welcher zufolge das Fortrücken der Aequinoktialpunkte ein ungleichförmiges sein

In *Fig. 154* sehen wir das Wesen der Nutation verdeutlicht. E ist der Mittelpunkt der Erde, P_e' der ideelle Pol der Ekliptik, d. h. derjenige Punkt der Himmelskugel, in welchen, wenn es keine Nutation gäbe, der wirkliche Pol der Ekliptik hineinfiele. Unter dem Einflusse der wechselnden Attraktion des Mondes beschreibt

Fig. 154.



der wahre Ekliptikpol um P_e' eine gewellte Linie P_{e1} P_{e2}, und gleicherweise bewegt sich auch die Erdachse nicht auf dem Mantel eines Kreiskegels $E P_1 P_2$, dessen Oeffnung, gemessen durch den Bogen $P_1 P_2$, $= 2\varepsilon$ ist,

---

sollte. Der Irrtum lag jedoch nur in der Auffassung dieser Ungleichförmigkeit, sowie in der viel zu hohen Schätzung ihres Wertes, denn daß die Präzessionsbewegung kleine Unregelmäßigkeiten aufweist, geht aus Bradleys Entdeckung unwiderleglich hervor.

sondern so, daß sie stets einen Punkt mit der in der Figur angedeuteten äußeren Wellenlinie gemein hat. *Durch die Mitwirkung der Nutation wird aus der Rotationskegelfläche, längs welcher sich die Drehungsachse der Erde unter der alleinigen Einwirkung der Präzession zu drehen hätte, eine gerieft- oder kanneliert-konische Fläche.*

Neuere schärfere Bestimmungen der *Nutationskonstante* haben wir von Lundahl[1]) und Nyrén[2]). Die allgemeinen Formeln für die Aenderungen, welche der Nutation wegen an der astronomischen Länge eines Sternes, sowie an der Ekliptikschiefe anzubringen sind, stellten Bessel[3]) und Peters[4]) auf. Uebrigens ist neben der bisher allein besprochenen *lunaren* Nutation auch noch eine *solare* von halbjähriger Periode vorhanden, deren numerischer Betrag freilich stets nur ein winziger ist, und neuerdings hat sich auch die Frage Beachtung erzwungen, ob nicht die sogenannte *tägliche Nutation* bedeutend genug ist, um innerhalb der unseren Messungen gezogenen Genauigkeitsgrenzen sich bemerklich zu machen[5]).

---

1) Lundahl, De numeris nutationis et aberrationis constantibus atque de parallaxi annua stellae polaris, Helsingfors 1842. In dieser Abhandlung wird (S. 33) der „numerus constans nutationis“ = 9,23635″ ± 0,04036″ gesetzt.

2) Nyrén, Bestimmung der Nutation der Erdachse, St. Petersburg 1872. Die Beobachtung des Polarsternes bietet das sicherste Mittel zur Ermittlung der Größe der Nutation, welche sonach in engster Beziehung zu einer etwaigen Ephemeride dieses Sternes steht; vgl. dazu Lamp, Der scheinbare Ort des Polarsternes α Ursae minoris, Kiel 1874.

3) Bessel, Nutationsformel, Quarterly Journal of Science, 1826. S. 321.

4) C. A. F. Peters, Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellae polaris deductus, St. Petersburg 1842.

5) Die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf diese Tagesschwankung gelenkt zu haben, ist das Verdienst Folies, von dem die folgenden Arbeiten hier in betracht kommen: Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde, Brüssel 1884; Notices sur la nutation diurne et la libration de l'écorce terrestre et sur les marées atmosphériques, ebenda 1887; Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles pour 1889, ebenda 1889. Nach den Beobachtungen von Folie, dann nach den darauf gegründeten Rechnungen von Niesten und Ronkar würde die tägliche Nutation 0,33″ betragen. Die Existenz einer solchen wird aus all-

Aenderungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Die Möglichkeit, daß die Dauer des Sterntages, diese allseitig als unveränderlich anerkannte Zeitgröße, diese Eigenschaft absoluter Konstanz doch nicht besitze, scheint erstmalig von Laplace [1]) theoretisch erwogen worden zu sein; er glaubte die *Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde* als einen direkten Ausfluß mechanischer Wahrheiten hinstellen zu können, und Poisson [2]) pflichtete ihm in dieser Auffassung bei. In der That, wenn man die mittlere Tagesbewegung des Mondes als Kriterium wählt [3]) und die von den griechischen Astronomen hierfür gegebenen Zahlen mit den durch die neuere Forschung erhaltenen vergleicht, so zeigt sich, daß die Zeit, welche die Erde zur Vollendung einer einmaligen Achsendrehung braucht, noch nicht um $0{,}4^s$ seit Hipparch kürzer geworden sein kann. Die vervollkommnete Mondtheorie der Neuzeit gestattet nun aber eine schärfere Berücksichtigung aller in betracht kommenden Umstände, und so scheint denn auch wirklich aus den Untersuchungen von Newcomb sich eine Bestätigung des von Glasenapp durch Vergleichung der Immersionszeiten der Juppiterstrabanten (s. S. 708) gefundenen Ergebnisses zu ergeben, *dass nämlich gewisse Unregelmässigkeiten die konstante Dauer der Erdumdrehung alterieren.*

Zur Erklärung dieser Anomalien kann man verschiedene Momente beiziehen. Schon Immanuel

---

gemeinen geophysikalischen Gründen auch von denen gerne zuzugeben sein, welche die Erkennbarkeit derselben mittelst wirklicher Messungen für unsicher halten (s. u. a. Naturwissenschaftliche Rundschau, 4. Jahrgang. S. 204).

[1]) Außer auf die tiefen analytischen Untersuchungen im fünften Teile der „Mécanique céleste" wäre an dieser Stelle namentlich auf die mehr gemeinfaßliche Darstellung in der „Exposition du système du Monde" (6. Auflage, Paris 1835. S. 40 ff.) hinzuweisen.

[2]) Poisson, Sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, Mém. de l'acad. de Paris, 7. Band. S. 199 ff.; 9. Band. S. 309 ff.

[3]) Sehr hübsch entwickelt die bezüglichen Formeln mit Hilfe gewöhnlicher Rechnung J. J. v. Littrow (Gehlers Phys. Lexikon, 2. Auflage, 9. Band, 1. Abteilung, Leipzig 1838. S. 54 ff.).

Kant[1]) und nachher R. Mayer[2]) suchten in der *Flutbewegung des Meeres* einen retardierenden Einfluß auf die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, für dessen Betrag Hertz[3]) sogar ungefähre Zahlwerte angeben zu können glaubte; ja selbst die durch Attraktion und Erwärmung bedingten Aenderungen in der Gestalt des *Luftsphäroides* sollen nach W. Thomson[4]) auf die Erdachse im Sinne eines drehenden Kräftepaares einwirken und dadurch Schwankungen der Drehgeschwindigkeit bewirken. welche im Laufe eines Jahrhunderts erkennbar werden könnten. Andererseits aber wirkt die *ununterbrochen fortschreitende Kontraktion der Erde*[5]) beschleunigend ein. indem eine Kugel von kleinerem Radius, wenn eine sich gleichbleibende Ursache sie zur Rotation veranlaßt, eine Umdrehung in kürzerer Zeit vollendet. Da also zwei einander entgegengesetzte Kräfte in Frage kommen, und da zudem in jedem Falle die im Laufe selbst langer Zeiträume sich ansammelnden Anomalien von kaum meß-

---

[1]) Kants Beantwortung der von der Berliner Akademie gestellten Preisfrage, ob die Erde seit ihrem Bestehen Aenderungen ihrer Umdrehungsdauer erfahren habe, eröffnet dessen von F. W. Schubert gesammelte „Schriften zur physischen Geographie" (Leipzig 1839).

[2]) Vgl. wegen Mayers Ansichten Zöllners „Natur der Kometen" (Leipzig 1883. S. 118 ff.).

[3]) Hertz, Betrachtungen über die kontinuierlichen Ströme. welche die fluterregende Wirkung der Gestirne im Meere veranlassen muß, Verhandl. der physikalischen Gesellschaft zu Berlin vom 5. Januar 1883. Dagegen scheint der strenge Kalkul Tägerts (Ueber die Einwirkung der Ebbe und Flut auf die Präzession und Nutation, sowie auf die Drehungsgeschwindigkeit der Erde, Siegen 1880) für die relative Unwirksamkeit dieses retardierenden Faktors zu sprechen, und man wird (Schönfeld, Neue Untersuchungen über die Konstanz der Rotationszeit der Erde, Ausland 1879. S. 181 ff.), wenn wirklich eine Verzögerung sich scheinbar konstatieren läßt, zuerst an mögliche Fehler in unseren Mondtafeln zu denken haben.

[4]) W. Thomson in den „Transactions of Edinburgh" (1881—82, S. 396 ff.) und Schwahn (a. a. O., S. 45).

[5]) Bekanntlich beruht auf dieser Annahme die ganze *moderne Theorie der Gebirgsbildung*, wie sie besonders im ersten Bande von Ed. Sueß' „Antlitz der Erde" (Prag-Leipzig 1885) niedergelegt ist.

barer Größe sein dürften, so sind wir wohl berechtigt, zu sagen:

Die Frage, ob die Erde ihre Umdrehung mit völlig oder mit nur nahezu konstanter Geschwindigkeit vollziehe, ist zwar theoretisch von hoher Wichtigkeit, in der Praxis jedoch, und zwar zumal in derjenigen der mathematischen Geographie, ist die Entscheidung dieser Alternative eine bedeutungslose.

IX. Fortbewegung des Sonnensystemes im Raume.

Die Sonne, der Zentralkörper unseres Planetensystemes, galt uns bisher zugleich auch als *absolut stabiler Punkt* im Weltraume, auf den wir daher eine kosmische Koordinatenbestimmung mit allem Rechte begründen konnten. Daß es in Wahrheit mit dieser Stabilität etwas anders bestellt ist, wird sich im folgenden ergeben.

Die Eigenbewegung der Fixsterne. Bis zum Anfange des 18. Jahrhunderts hegte niemand den geringsten Zweifel daran, daß die sogenannten *Fixsterne* diesen ihren Namen auch wirklich verdienten. Es war Halley[1]), der zuerst an diesem Dogma rüttelte und nachwies, daß nicht nur die astronomischen Längen mancher Fixsterne, welche man ja bereits als von der Präzession (s. o.) beeinflußt kannte, sondern auch deren *astronomische Breiten Veränderungen unterworfen* seien. Hauptsächlich Arktur und Sirius schienen ihm, wenn er seine eigenen Messungen mit den ein gutes Vierteljahrhundert älteren Flamsteeds in Vergleich stellte, in die Klasse der uneigentlichen Fixsterne zu gehören. J. Cassini, Lemonnier u. a. wußten ihrerseits ebenfalls Beispiele dieser Art namhaft zu machen, und dann nahm der ältere Tob. Mayer den Gegenstand aufs neue gründlich vor[2]), stellte eine ganze Anzahl hellerer Sterne seines

---

[1]) Halley, Considerations on the Change of the Latitudes of some of the principal Fixed Stars, Phil. Transact., 1718. S. 736 ff.

[2]) Tob. Mayers „De motu fixarum proprio commentatio“

eigenen Fixsternkataloges mit den Positionen von Römer-Horrebow zusammen und wies so unmittelbar nach, daß auch die *Aequatorialkoordinaten* dieser Sterne in dem Zeitraume eines halben Jahrhunderts ganz namhafte Aenderungen erlitten hätten. Auf theoretische Folgerungen aus dieser Erfahrungsthatsache ließ sich jedoch Mayer noch nicht ein.

Dies that aber Lambert[1]), der richtig erkannte, daß jede solche Ortsveränderung sich — zwar nicht notwendig, aber doch in vielen Fällen — aus *zwei Komponenten* zusammensetzt. Die eine derselben ist die *wirkliche Eigenbewegung des Sternes*, welche uns hier nicht weiter interessiert; die andere dagegen entspricht der *Eigenbewegung der Sonne und des von ihr untrennbaren Systemes.* Ist dem so, dann eignet unserer Erde eine dreifache Bewegung: eine *rotatorische* um ihre Achse, eine *revolutorische* um den Zentralkörper und eine *progressive* im Gefolge der selbst fortschreitenden Sonne. Unsere Auffassung von „Ruhe" und „Bewegung" ist damit eine andere geworden, und wir müssen Lambert recht geben, wenn er sagt[2]): „Kein Punkt des ganzen Weltgebäudes bleibt, auch nicht einen Augenblick, in einer absoluten Ruhe."

Der Apex der Sonnenbewegung. Die von Lambert bereits angedeutete Aufgabe, beide Komponenten voneinander zu trennen und den Punkt des Weltalls, nach welchem hin die Sonne ihren Lauf nimmt, d. h. *den Apex der Bewegung des Sonnensystemes*, zu bestimmen.

---

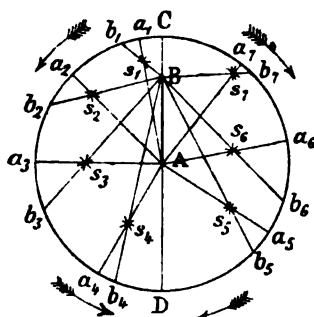
ist von Lichtenberg in den ersten Band der „Opera inedita" (Göttingen 1775. S. 75 ff.) des genannten Autors aufgenommen worden.

[1]) Lambert, Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues, Augsburg 1761. S. 121 ff.

[2]) Ebenda, S. 134. Es ist merkwürdig, daß hier Lambert, ohne von diesem Vorgänger etwas zu wissen, genau denselben Gedanken formuliert, den gerade dreihundert Jahre vor ihm Nikolaus von Cusa (s. Günther, Studien etc., S. 26) ausgesprochen hatte, daß es nämlich im ganzen Kosmos nur Bewegung, nirgends aber Ruhe geben könne.

suchte William Herschel[1]) mittelst eines durchaus sachgemäßen Gedankenganges zu lösen, von welchem uns *Fig. 155* eine Vorstellung vermittelt. A sei die momentane Position eines beweglichen Punktes, der sich in der Richtung des Kreisdurchmessers DC, also von D gegen

Fig. 155.



C hin bewegt, und es sei zugleich A das augenblickliche Zentrum des Kreises, dessen Durchmesser DC ist. In der Kreisebene liegen da und dort Punkte s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 verstreut, welche ein in A befindliches Auge, wenn jener Kreis zugleich die Sehsphäre abschließt, resp. in den Punkten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 erblickt. Nach einiger Zeit ist der bewegte Körper in B angekommen, doch soll, was natürlich in der Zeichnung nicht zum Ausdrucke gebracht werden kann, die Distanz AB gegen den Radius des Begrenzungskreises verschwindend klein sein. Aus B sieht man die erwähnten Punkte s in den Projektionspunkten b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 der Peripherie. Denken wir uns nun als Mobil die der selbst bewegten Sonne nachfolgende Erde, als Projektionskreis die Ekliptik, so folgt aus unserer Figur, wie schon aus der Richtung der Pfeile hervorgeht, nachstehende Thatsache:

[1]) W. Herschel, On the proper Motion of the Sun and Solar System, Phil. Transact., 1783. S. 247 ff.

In der dem Zielpunkte der Bewegung an der Himmelskugel, dem sogenannten Apex, zugekehrten Richtung scheinen die Sterne auseinander-, in der diametral gegenüberliegenden Richtung scheinen die Sterne zusammenzurücken.

Der beobachtende Astronom wird demzufolge zu ermitteln haben, in welcher Gegend des Himmels die *Bewegung der „Fixsterne" in Länge eine besonders energische* ist, und dort hat er den Apex zu suchen. Es leuchtet ein, daß, je nachdem die Auswahl der untersuchten Sterne eine verschiedene war, auch die Bestimmung des Apex nicht genau die gleiche sein wird, und eine Durchmusterung der bezüglichen Arbeiten bestätigt unsere Annahme.

Neuere Bestimmungen des Apex. Nachdem im vorigen Jahrhundert noch Prevost[1]) und Klügel[2]) sich an der Lösung der von Herschel gestellten Aufgabe beteiligt hatten, wurde im neunzehnten die Anzahl der Forscher, die sich diesem Gegenstande zuwandten, eine stets größere. Neben Beiträgen von Gauß, Lundahl, F. W. v. Struve, Mädler sind besonders die Arbeiten von Argelander[3]) und Galloway[4]) zu nennen, durch welche der Bezirk der Himmelskugel, in welchem der wahre Apex gelegen sein muß, mehr und mehr eingeschränkt wurde. Eine neueste kritische Bearbeitung der eigenen Bewegungen der Fixsterne mit Rücksicht auf die Translation des Sonnensystemes rührt von Martini[5])

---

[1]) Prevost, Mémoire sur le mouvement progressif du centre de gravité de tout le système solaire, Bodes Astron. Jahrbuch für 1786.

[2]) Klügel, Formel zur Untersuchung über das Fortrücken der Sonne und der Sterne, dasselbe Jahrbuch für 1789.

[3]) Argelander, Ueber die eigene Bewegung des Sonnensystemes, St. Petersburg 1847; auszüglich in den Astron. Nachr., Nr. 363 und 364.

[4]) Galloway, On the proper Motion of the Solar System, Phil. Transact., 1847. S. 79 ff. In dieser Abhandlung sind insbesondere auch erstmalig südliche Sterne in größerer Anzahl zum Vergleiche herangezogen worden.

[5]) H. Martini, Beitrag zur Frage der Eigenbewegung des Sonnensystemes, Leipzig 1882.

her. Im ganzen kann man über die Lage des Himmelspunktes, welchem unsere Sonne samt ihren Planeten zustrebt, die folgende Aussage machen:

Ein sphärisches Viereck, das durch die Grenzwerte[1] *$16\frac{1}{4}^h$ und $17\frac{1}{4}^h$ in Rektaszension, 30^0 bis 33^0 in Deklination markiert ist, schliesst den wirklichen Apex in sich, dessen schärfere Festlegung weiterer Forschung vorbehalten bleibt.*

Auch die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Sonne* hat man bereits zu ermitteln gesucht, doch sind die Bestimmungen zu unsicher, um mehr zu lehren, als daß diese Geschwindigkeit eine sehr beträchtliche sein muß. Auch darüber, ob die Bewegung *in grader oder gekrümmter Bahn* sich vollzieht, weiß man nichts Sicheres auszusagen[2].

Unerwähnt blieb oben, wie man die Bewegungen solcher Fixsterne zu erkennen vermöge, deren Fortschreitungsrichtung irgendwie durch unser Auge hindurchgeht. Hierfür bietet die *Spektroskopie* ein Mittel[3], und man

---

[1]) Die Rektaszension ist hier nicht in Bogen- sondern in Zeitmaß angegeben, wie es (s. S. 134) in der Sternkunde sehr häufig geschieht.

[2]) Die von Mädler (Die Zentralsonne, Mitau 1847) aufgestellte sonderbare Hypothese, daß der Stern *Alcyone* in den Plejaden der Punkt sei, um welchen unser Sonnensystem eine Zentralbewegung auszuführen habe, ist neuerdings allseitig aufgegeben, zumal nachdem Kowalski (Sur les lois du mouvement propre des étoiles du catalogue de Bradley, Astron. Nachr., Nr. 1266) die ganze Willkürlichkeit dieser Doktrin aufgedeckt hatte.

[3]) Der erste, der die Spektralanalyse zur Messung kosmischer Bewegungen anzuwenden vorschlug, war der berühmte englische Physiker Huggins (Further Observations of some of the Stars and Nebulae, with an Attempt to determine therefrom whether these Bodies are moving towards or from the Earth, Phil. Transact., 1868. S. 529 ff.). Eine Uebersetzung der für uns wichtigen Teile dieser Arbeit findet man bei Roscoe-Schorlemmer (Die Spektralanalyse in einer Reihe von sechs Vorlesungen, Braunschweig 1870. S. 236 ff.); gleicherweise charakterisiert findet sich das Hugginssche Verfahren bei Schellen (Die Spektralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper, Braunschweig 1870. S. 361 ff.). Schon vor Huggins hatten Doppler (Ueber das farbige Licht der Doppelsterne,

hat dieselbe sogar neuerdings[1]) auch in den Dienst der Aufgabe, den solaren Apex aufzufinden, zu stellen gesucht.

X. Vollständige Erledigung des Fundamentalproblemes der mathematischen Erdkunde.

So weit gelangt, haben wir uns daran zu erinnern, welches Ziel wir (s. o. S. 39) der mathematischen Erdkunde als solcher gesteckt haben. Es fragt sich, ob wir nunmehr in der Lage sind, die am angeführten Orte gestellte *allgemeine Aufgabe der Ortsbestimmung* zu lösen. Rekapitulieren wir also nun unsere einzelnen Ergebnisse!

Wir stellten im ersten Kapitel fest, daß die Erde ein von einer durchaus unregelmäßig gebildeten Fläche, dem *Geoid*, umschlossener Körper sei, daß aber die Ermittlung der Abstände einzelner Geoidpunkte von einer gesetzmäßigen Fläche, dem *Referenzellipsoide*, möglich werde, und daß zudem im allgemeinen die Nichtübereinstimmung von Geoid und Ellipsoid sich in äußerst beschränkten Grenzen halte. *Gestalt und Grösse des Erdsphäroides wurden bestimmt und damit die Grundlagen für die Lösung des Ortsbestimmungsproblemes geschaffen.*

Im zweiten Kapitel wurde, nachdem gezeigt war, daß die Koordinatenbestimmung auf einem Rotationssphäroide

---

Abhandl. d. k. böhm. Ges. d. Wissensch., 1841—42. S. 465 ff.) und Klinkerfues (Mitteilungen über den Einfluß, den die Bewegung einer Lichtquelle auf die Brechbarkeit eines Strahles ausübt, Gött. Nachr., 1866. Nr. 4) auf optischem Wege das Problem der Erkenntnis von Sternbewegungen zu lösen versucht, jedoch ließen sich dagegen berechtigte Einwände erheben (vgl. Sohnckes kritische Bemerkungen in den Astron. Nachr., Nr. 1646). Unanfechtbar ist hingegen das Hugginssche Prinzip: *Verschiebt sich eine Spektrallinie nach dem violetten Ende hin, so erleiden die Lichtwellen des Sternes auf dem Wege zur Erde eine Verkürzung, und jener nähert sich also dem Sonnensysteme, während eine entgegengesetzte Bewegung durch eine Verschiebung solcher Linien gegen Rot angezeigt wird.*

[1]) H. Homann, Beiträge zur Untersuchung der Sternbewegungen und der Lichtbewegung durch Spektralmessungen, Berlin 1885. S. auch Clerke, Geschichte der Astronomie während des 19. Jahrhunderts, deutsch von Maser, Berlin 1889. S. 468.

von so geringer Exzentrizität mit derjenigen auf einer geometrischen Kugel so gut wie völlig sich decke, die Ermittlung dreier Koordinaten, zweier angularen und einer linearen, wirklich für einen beliebigen Erdort durchgeführt. *Durch Länge, Breite und Mittelpunktsdistanz (Erdradius $\pm$ Seehöhe) war sonach jeder Punkt der Litho-, Hydro- oder Atmosphäre auf ein mit der Erde fest verbundenes Polarkoordinatensystem bezogen.*

Nunmehr handelt es sich darum, die Lage dieses Systemes in einem gegebenen Zeitpunkte der als stabil betrachteten Sonne gegenüber zu fixieren. Es fand sich, daß die Erde in einer elliptischen Bahn von genau bekannten Elementen sich um die Sonne bewegt, daß diese Ellipse durch Gravitationsstörungen von gleichfalls erkennbarem Betrage gewisse periodische Aenderungen erleidet, daß sich die Erde um eine gewisse Achse in als konstant zu betrachtender Zeit dreht, und daß ferner auch die Erdachse infolge von Präzession und Nutation nicht stets nach dem nämlichen Punkte der Himmelskugel hinzeigt. Gesetzt also, man kenne ein *dem Sonnenkörper eigentümliches, mit diesem untrennbar verbundenes Achsensystem,* so wäre es ein zwar überaus schwieriges und umfassendes, aber *begrifflich und auch mathematisch lösbares* Problem der analytischen Geometrie, den *absoluten Ort irgend eines Erdpunktes im Raume,* d. h. die senkrechten Abstände desselben von den drei im Sonnenmittelpunkte sich unter rechten Winkeln durchschneidenden Koordinatenebenen zu bestimmen. Die im dritten Kapitel gegebenen Aufschlüsse müssen hierfür die Mittel liefern.

Im letzten Abschnitte gelangten wir zu der Erkenntnis, daß auch die Sonne nicht stillsteht im Raume, sondern eine — ungewiß ob rein progressive oder aber eine Zentral- — Bewegung besitzt. Wir sehen so: *Unsere Koordinatenbestimmung für einen beliebigen einer der drei Sphären der Erde, also dieser letzteren im weitesten Wortsinne angehörenden Punkt kann niemals eine absolute, sondern stets nur eine relative sein.* Mit dieser unserer Erkenntnis durch die Natur der Sache aufer-

legten Beschränkung[1]) aber kann unsere Aufgabe als gelöst betrachtet werden: *Die mathematische Geographie besitzt die Hilfsmittel, um den Ort beliebiger Punkte der Erde mit bezug auf ein im Raume selbst sich bewegendes Koordinatensystem festzulegen, wie es oben (S. 39) gefordert war.*

---

[1]) Von Carl Neumann (Ueber die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870) ist der *absolute Raum*, in dem sich Newton alle Bewegungen vor sich gehend dachte, dadurch „materialisiert" worden, daß ersterer einen „*Körper Alpha*" als konkret-existierend einführte, welchem die Eigenschaft vollkommener Bewegungslosigkeit, nicht bloß relativer, zukommen soll; wenn man dann in diesem Körper ein Achsensystem befindlich denkt, so können auf dieses sämtliche Ortsveränderungen bezogen werden. Indessen hat man es hier nur mit einer Hilfsvorstellung zu thun, welche zudem in dem uns hier beschäftigenden Falle versagt, da wir im Stellarraume einen solchen Körper Alpha aufzufinden unfähig sind und wohl für alle Zeiten bleiben werden. Ein besseres, für unser Kausalbedürfnis befriedigenderes Auskunftsmittel möchte wohl L. Langes *Inertialsystem* gewähren; vgl. dazu dieses Gelehrten Arbeiten (Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes, Wundts Philosoph. Studien, 3. Band. S. 337 ff. S. 643 ff.; Ueber das Beharrungsgesetz, Ber. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Math.-Phys. Kl., 1885. S. 333 ff.), sowie die daran geknüpften höchst instruktiven Bemerkungen Seeligers (Vierteljahrsschr. d. d. astron. Ges., 22. Jahrgang. S. 252 ff.). Wir dürfen in diesem geographischen Werke der wesentlich philosophischen Darstellung Langes nicht folgen, wiewohl sie für die von uns dem mathematisch-geographischen Fundamentalprobleme gegebene Einkleidung von entschiedener Bedeutung ist, und erwähnen nur noch, daß in der erstgenannten Abhandlung (S. 675 ff. S. 685 ff.) namentlich auch eine scharfe — hie und da wohl allzu schneidige — Prüfung der *erkenntnisstheoretischen* Verstöße zu finden ist, welche bei der Diskussion der Frage der Sonnenbewegung nicht selten gemacht worden sind und wohl noch gemacht werden.

Alphabetisches Namen- und Sachregister[1]).

A.

[1]) Personennamen sind durchweg durch Sperrdruck kenntlich gemacht.

D.

F.

H.

I. J.

K.

L.

M.

O.

P.

Q.

R.

T.

U.

V.

W.

X.

Y.

Z.

Verbesserungen.

S. 8, Z. 6 v. o. l. Sacrobosco. — S. 41, Z. 19 v. o. l. Φυσικαί. — S. 122, *Fig. 28* sollten die beiden Teilstriche bei N genau aufeinander passen. — S. 153, Z. 9 v. u. l. ZP statt ΣP. — S. 175, Z. 1 v. o. l. achten statt zwölften. — S. 192, Z. 9 v. o. l. Chronodeik. — S. 216, Z. 3 v. u. l. Riccò. — S. 226, Z. 14 v. o. l. 20400 statt 30400. — S. 250, Z. 19 v. u. l. Diogenes. — S. 264, Z. 16 v. u. ist vor tang beidemale ρ zu ergänzen. — S. 279, Z. 11 v. o. l. Garet. — S. 319, Z. 6 v. o. l. $\mathbf{F}\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ statt $\mathbf{F}(e, \varphi)$. — S. 349, Z. 1, 2 und 4 v. o. l. Buchstaben l statt b. — S. 352, Z. 3 v. u. l. nachher. — S. 389, Z. 10 v. u. l. aber. — S. 391, Z. 12 v. u. l. Harzburg. — S. 445, Z. 1 v. o. l. als. — S. 448, Z. 5 v. u. l. Beiziehung. — S. 506, Z. 4 v. u. l. Lemnos statt Lesbos. — S. 549, Z. 11 v. u. l. $<$ statt $\overset{=}{<}$. — S. 560, S. 16 v. u. l. $x = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha}$. — S. 569, Z. 21 v. o. l. Plattkartenprojektion. — S. 572, Z. 13 v. o. ergänze nach Sonne: und Sterne. — S. 660, Z. 7 v. u. l. Δb statt db. — S. 715, Z. 10 v. o. l. $1:f$ statt f. — S. 718, Z. 3 v. o. l. Ellipoide statt Ellipsoide. — S. 762, Z. 13 v. o. l. 151 statt 650. — S. 765, Z. 2 v. o. l. Alighieri.



